Chapitre n°8
Fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

C8.1. Objectifs

1. Introduction de fonctions pour établir des inégalités ou optimiser des quantités
2. Étendre le corpus des fonctions usuelles
3. Calculer des dérivées

On privilégie l'aspect pratique, reléguant à plus tard l'établissement des fondements qui sont ici admis.

C8.2. Notations

1. On fixe un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan $\mathscr{P}$.
2. Les coordonnées d'un point M de $\mathscr{P}$ dans ce repère seront notées (x_M, y_M), d'où $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}$.
3. La lettre $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

§ 1 Ensemble de définition d'une fonction

C8.3. Définition (ensemble de définition d'une fonction) Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'ensemble de définition de f est l'ensemble :

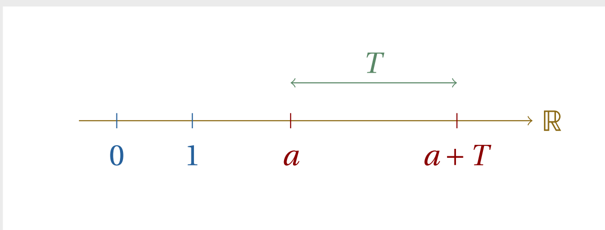
$$\boxed{\mathscr{D}_f := \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) \text{ est défini}\right\}.}$$

C8.4. Exercice Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\frac{11-x}{1+2x}\right)$.

C8.5. Définition (partie de $\mathbb{R}$ invariante par translation) Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Soit $T \in \mathbb{R}_{>0}$. On dit que A est <u>invariante par translation par T</u> si :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad a \in A \iff a + T \in A.}$$



C8.6. Propriété (d'un ensemble de définition stable par translation) Soient $T \in \mathbb{R}_{>0}$ et A une partie de $\mathbb{R}$ stable par translation par T. Alors :

$$\boxed{\forall a \in A \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad a + kT \in A.}$$

Démonstration

Soit $a \in A$. Nous démontrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(k)\ :\ a + kT \in A \text{ et } a - kT \in A$$

en raisonnant par récurrence.

- *Initialisation à $k = 0$* La proposition $\mathscr{P}(0)$ s'écrit $a \in A$. Elle est donc vraie, d'après l'hypothèse faite sur a.
- *Hérédité* Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
  — D'après $\mathscr{P}(k)$, $a + kT \in A$. Comme A est invariant par translation par T :

$$(a + kT) + T = a + (k+1)T \in A\,.$$

  — D'après $\mathscr{P}(k)$:

$$(a - (k+1)T) + T = a - kT \in A\,.$$

  Comme A est invariant par translation par T, $a - (k+1)T \in A$.

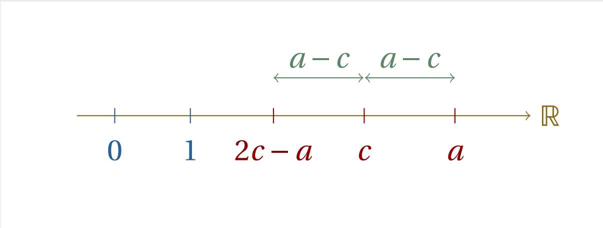
C8.7. Exercice La fonction cotangente est définie par cotan: $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_{\text{cotan}}$.
2. Démontrer qu'il existe une famille $(I_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $\mathscr{D}_{\text{cotan}} = \displaystyle\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$.
3. Démontrer que $\mathscr{D}_{\text{cotan}}$ est stable par translation par π.

C8.8. Définition (partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à un point)

Soit $c \in \mathbb{R}$. On dit que A est symétrique par rapport à c si :

$$\boxed{\forall a \in A \quad 2c - a \in A\,.}$$



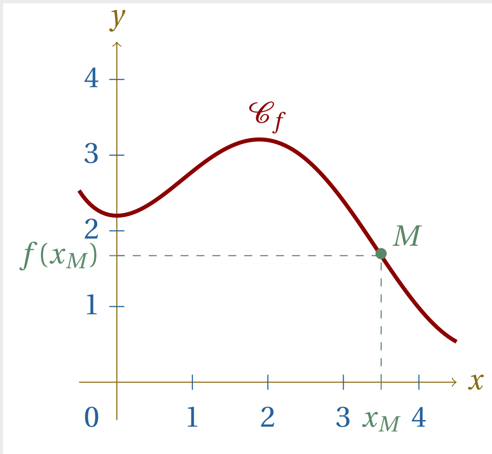
C8.9. Exercice Soient $c \in \mathbb{R}$. Justifier que $A := \mathbb{R} \setminus \{c\}$ est symétrique par rapport à c.

§ 2 Représentation graphique d'une fonction

C8.10. Définition (courbe représentative)

Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{R}$. La courbe représentative de f est :

$$\boxed{\mathscr{C}_f := \{M \in \mathscr{P}\ :\ x_M \in \mathscr{D}_f \text{ et } y_M = f(x_M)\}.}$$

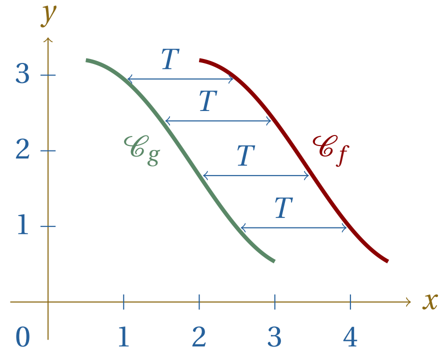


C8.11. Exercice

Soient $T \in \mathbb{R}_{>0}$ et $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que $\mathscr{D} := \mathscr{D}_f$ est stable par translation par T. Soit g la fonction définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+T) \end{array} \right.$$

Quel lien existe-t-il entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

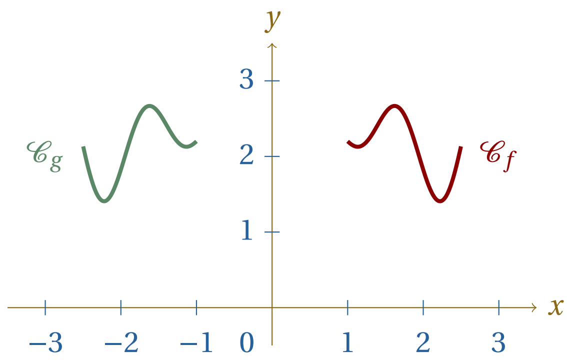


C8.12. Exercice

Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit g la fonction définie par :

$$g : x \longmapsto f(-x).$$

Quel lien existe-t-il entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

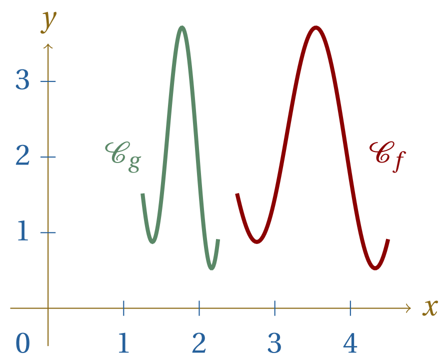


C8.13. Exercice

Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit g la fonction définie par :

$$g : x \longmapsto f(2x).$$

Quel lien existe-t-il entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?



§ 3 Parité et périodicité

C8.14. Définition (fonction paire, fonction impaire, fonction périodique) Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. La fonction f est dite paire si :

$$\boxed{\mathscr{D}_f \text{ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout } x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) = f(x).}$$

2. La fonction f est dite impaire si :

$$\boxed{\mathscr{D}_f \text{ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout } x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) = -f(x).}$$

3. Soit $T \in \mathbb{R}_{>0}$. La fonction f est dite périodique de période T si :

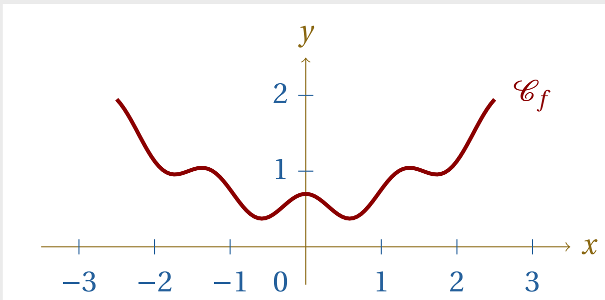
$$\boxed{\mathscr{D}_f \text{ est invariant par translation par } T \text{ et, pour tout } x \in \mathscr{D}_f,\ f(x+T) = f(x).}$$

C8.15. Propriété (d'une fonction périodique) Soient $T \in \mathbb{R}_{>0}$ et $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{K}$, périodique de période T. Alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad x + kT \in \mathscr{D}_f \ \text{ et } \ f(x+kT) = f(x)\,.}$$

C8.16. Propriété (réduction de l'intervalle d'étude d'une fonction paire)
Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui est paire.

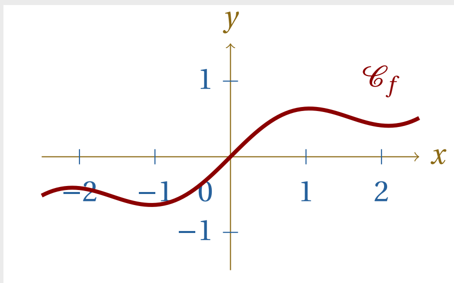
- $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- Le domaine d'étude de f peut être réduit à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.



C8.17. Exercice Proposer un domaine d'étude pour la fonction $\mathrm{ch} : x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

C8.18. Propriété (réduction de l'intervalle d'étude d'une fonction impaire)
Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui est impaire.

- $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.
- Le domaine d'étude de f peut être réduit à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.



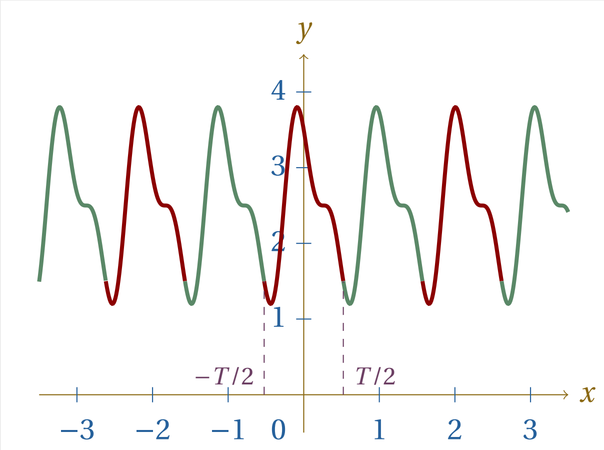
C8.19. Exercice Proposer un domaine d'étude pour la fonction sh : $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

C8.20. Exercice Proposer un domaine d'étude pour la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

C8.21. Propriété (réduction de l'intervalle d'étude d'une fonction périodique)

Soient $T \in \mathbb{R}_{>0}$ et $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui est périodique de période T.

- $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\,\overrightarrow{i}$.
- Le domaine d'étude de f peut être réduit à $\mathscr{D}_f \cap [0, T]$ où à $\mathscr{D}_f \cap [-T/2, T/2]$.



C8.22. Exercice Proposer un domaine d'étude pour la fonction cotan : $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

C8.23. Exercice Proposer un domaine d'étude pour la fonction $f : x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$.

C8.24. Exercice Soit la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(10 - 19x + 6x^2\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ possède un axe de symétrie.
3. Proposer un domaine d'étude pour f.

§ 4 Opérations sur les fonctions

C8.25. Définition (somme de deux fonctions) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(f, g) \in \mathscr{F}(A, \mathbb{K})^2$. La fonction $f + g$ est définie par :

$$\boxed{f+g \;\left|\; \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x)\,. \end{array}\right.}$$

C8.26. Définition (multiplication d'une fonction par un scalaire) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathscr{F}(A, \mathbb{K})$. La fonction λf est définie par :

$$\boxed{\lambda f \;\left|\; \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x)\,. \end{array}\right.}$$

C8.27. Définition (combinaison linéaire de fonctions) Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{F}(A, \mathbb{K})^n$. La fonction $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ est définie par :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\,. \end{array} \right.}$$

C8.28. Définition (produit de deux fonctions) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(f, g) \in \mathscr{F}(A, \mathbb{K})^2$. La fonction fg est définie par :

$$\boxed{fg \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x)\,g(x)\,. \end{array} \right.}$$

C8.29. Définition (inverse d'une fonction) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{K})$.
Si, <u>pour tout $x \in A$, $f(x) \neq 0$</u>, alors on définit la fonction $\dfrac{1}{f}$ par :

$$\boxed{\frac{1}{f} \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)}\,. \end{array} \right.}$$

C8.30. Définition (quotient de deux fonctions) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(f, g) \in \mathscr{F}(A, \mathbb{K})^2$.
Si, <u>pour tout $x \in A$, $g(x) \neq 0$</u>, alors on définit la fonction $\dfrac{f}{g}$ par :

$$\boxed{\frac{f}{g} \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)}\,. \end{array} \right.}$$

C8.31. Définition (composée de deux fonctions) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Soient deux fonctions $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si, <u>pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$</u>, alors on définit la fonction $g \circ f$ par :

$$\boxed{g \circ f \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x))\,. \end{array} \right.}$$

C8.32. EXERCICE (COURBE D'UNE SOMME DE DEUX FONCTIONS)
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathscr{F}(A,\mathbb{K})^2$. Comment peut-on construire $\mathscr{C}_{f+g}$ à partir de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

C8.33. EXERCICE (DÉCOMPOSITION D'UNE FONCTION) Soit la fonction $f\colon x \longmapsto 5 - \dfrac{3x^2+1}{\ln(x-7)}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 telles que $f = f_4 \circ \left(\dfrac{f_3}{f_2 \circ f_1}\right)$.

§ 5 MONOTONIE ET STRICTE MONOTONIE

C8.34. DÉFINITION (MONOTONIE ET STRICTE MONOTONIE D'UNE FONCTION) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f est croissante sur A si $\boxed{\forall (x,y) \in A^2 \qquad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)}$
2. La fonction f est décroissante sur A si $\boxed{\forall (x,y) \in A^2 \qquad x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)}$
3. La fonction f est strictement croissante sur A si $\boxed{\forall (x,y) \in A^2 \qquad x < y \implies f(x) < f(y)}$
4. La fonction f est strictement décroissante sur A si $\boxed{\forall (x,y) \in A^2 \qquad x < y \implies f(x) > f(y)}$

C8.35. STRICTE MONOTONIE ET ÉQUIVALENCE Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si f est strictement croissante alors :
$$\boxed{\forall (x,y) \in A^2 \qquad x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)\,.}$$
2. Si f est strictement décroissante alors :
$$\boxed{\forall (x,y) \in A^2 \qquad x \leqslant y \iff f(x) \geqslant f(y)\,.}$$

Ces équivalences, sous condition de stricte monotonie, sont un outil précieux dans la résolution d'inéquations.

C8.35.01. REMARQUE La propriété C8.35 est particulièrement utile pour résoudre des inéquations en raisonnant par équivalences.

C8.36. PROPRIÉTÉS (OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS ET MONOTONIE)

1. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathscr{F}(A,\mathbb{R})^2$.
$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ et } g \text{ croissantes sur } A & \implies & f+g \text{ croissante sur } A \\ f \text{ et } g \text{ décroissantes sur } A & \implies & f+g \text{ décroissante sur } A \end{array}}$$

2. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}(B,\mathbb{R})$.
On suppose que, pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$, de sorte que $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ croissante sur } A \text{ et } g \text{ croissante sur } B & \Longrightarrow & g \circ f \text{ croissante sur } A \\ f \text{ décroissante sur } A \text{ et } g \text{ croissante sur } B & \Longrightarrow & g \circ f \text{ décroissante sur } A \\ f \text{ croissante sur } A \text{ et } g \text{ décroissante sur } B & \Longrightarrow & g \circ f \text{ décroissante sur } A \\ f \text{ décroissante sur } A \text{ et } g \text{ décroissante sur } B & \Longrightarrow & g \circ f \text{ croissante sur } A \end{array}}$$

C8.37. Exercice Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathscr{F}(A,\mathbb{R})^2$. Si f et g sont croissantes sur A, que peut-on dire du sens de variation de fg ?

C8.38. Exercice Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1} + \ln(2+\cos(x))$ est décroissante sur $[0,\pi]$.

C8.39. Exercice (fonction pente en un point) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(A,\mathbb{R})$. On suppose que f est croissante et on fixe $a \in A$. Étudier le signe de la fonction :

$$p_{f,a} \left| \begin{array}{ccc} A \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

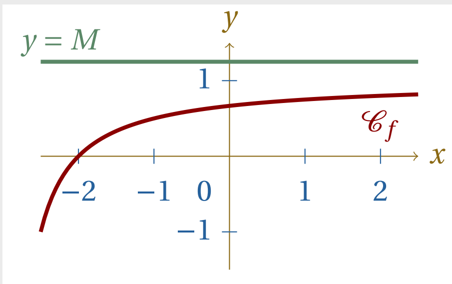
et interpréter géométriquement le résultat.

§ 6 Fonction majorée, minorée, bornée

C8.40. Définition (Fonction majorée, minorée, bornée) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(A,\mathbb{R})$.

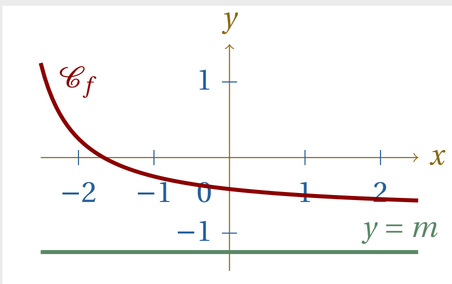
- La fonction f est dite <u>majorée</u> si :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad f(a) \leqslant M\,.}$$



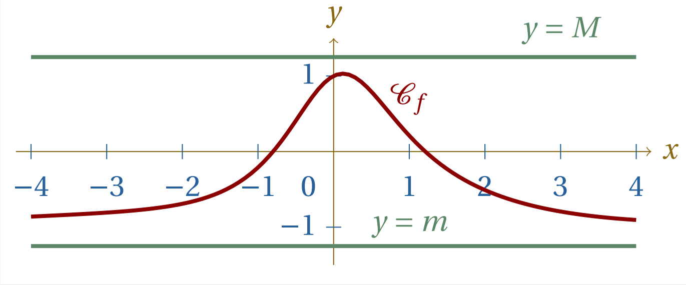
- La fonction f est dite <u>minorée</u> si :

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad m \leqslant f(a)\,.}$$



- La fonction f est dite bornée si elle est minorée et majorée, i.e. si :

$$\boxed{\exists\,(m,M)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall\, a\in A \quad m\leqslant f(a)\leqslant M\,.}$$



C8.41. Propriété (Caractérisation des fonctions bornées) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f\in\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$.

$$\boxed{f \text{ est bornée} \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\exists\, M\in\mathbb{R}_+ \quad \forall\, a\in A \quad \left|f(a)\right|\leqslant M\right)}$$

C8.42. Exercice Démontrer que la fonction $f\colon x\longmapsto \dfrac{\cos(7x+1)+e^{-2x+5}}{3+\sin(11-2x)}$ est bornée sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

C8.43. Exercice Démontrer que la fonction $f\colon x\longmapsto x\sin(x)$ n'est ni minorée, ni majorée sur $\mathbb{R}$.

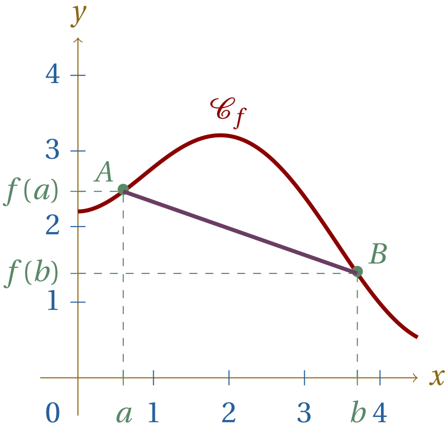
§ 7 Dérivée d'une fonction

C8.44. Corde d'une courbe représentative Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction.

Une corde de la courbe $\mathscr{C}_f$ est un segment joignant deux points distincts de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Si $(a,b) \in I^2$ alors la corde joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ a pour équation :

$$\boxed{y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \quad \text{où} \quad x \in [a,b]\,.}$$



C8.45. Définition (dérivabilité en un point et nombre dérivé) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction et $a \in I$.

- La fonction f est dite dérivable au point a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

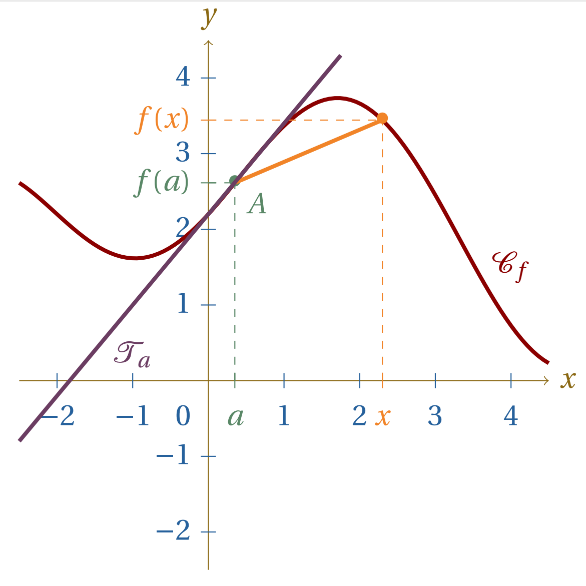
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell\,.$$

- Si f est dérivable en a, alors son nombre dérivée en a est :

$$\boxed{f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}\,.}$$

- Si f est dérivable en a, la tangente $\mathscr{T}_a$ au point $A(a, f(a)) \in \mathscr{C}_f$ est la droite d'équation passant par $A(a, f(a))$, de coefficient directeur $f'(a)$. Elle a donc pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)\,.}$$



C8.46. Définition (dérivabilité sur un intervalle et fonction dérivée) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction.

- La fonction f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
- Si f est dérivable sur I, la fonction dérivée de f est :

$$f' \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) =: \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))\,. \end{array} \right.$$

C8.47. EXERCICE Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et calculer sa fonction dérivée.

C8.48. EXERCICE Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$$

n'est pas dérivable en 0.

C8.49. EXERCICE Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$, mais non dérivable en 0.

C8.50. EXERCICE Démontrer que les courbes représentatives des fonctions carrées et inverse possèdent une unique tangente commune.

C8.51. LA DÉRIVABILITÉ EN UN POINT ENTRAÎNE LA CONTINUITÉ EN CE POINT

- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction, $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
- La fonction partie entière n'est donc dérivable en aucun point entier.

§ 8 DÉRIVÉES DES PREMIÈRES FONCTIONS USUELLES

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$ de f en $x \in \mathscr{D}'_f$	$\mathscr{D}'_f$
$f \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a \end{array} \right.$ où $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \end{array} \right.$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$ de f en $x \in \mathscr{D}'_f$	$\mathscr{D}'_f$
$f \left\lvert \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$f \left\lvert \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f \left\lvert \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f \left\lvert \begin{array}{ccc} \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array} \right.$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$

§ 9 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

C8.52. PROPRIÉTÉ (COMBINAISON LINÉAIRE DE FONCTIONS DÉRIVABLES) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(f_1,\dots,f_n) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})^n$. Si les fonctions $f_1,\dots,f_n$ sont dérivables sur I, alors la fonction $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall x \in I \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k'(x) \ .}$$

C8.53. PROPRIÉTÉ (PRODUIT DE DEUX FONCTIONS DÉRIVABLES) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})^2$. Si les fonctions f et g sont dérivables sur I, alors la fonction fg est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall x \in I \qquad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .}$$

C8.54. PROPRIÉTÉ (INVERSE D'UNE FONCTION DÉRIVABLE) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Si, pour tout $x \in A$, $f(x) \neq 0$ et si la fonction f est dérivable sur I alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall x \in I \qquad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \ .}$$

C8.55. Propriété (quotient de deux fonctions dérivables) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})^2$.
Si, pour tout $x \in A$, $g(x) \neq 0$ et si les fonctions f et g sont dérivables sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall\, x \in I \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\ .}$$

C8.56. Propriété (composée de deux fonctions) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient deux fonctions $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$, et si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall\, x \in I \qquad (g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x))\ .}$$

C8.57. Corollaire

- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, et si la fonction f est dérivable sur I alors la fonction :

$$\sqrt{f} \;\left|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{f(x)} \end{array}\right.$$

est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall\, x \in I \qquad \left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\ .}$$

- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction f est dérivable sur I alors la fonction

$$f^n \;\left|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)^n \end{array}\right.$$

est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall\, x \in I \qquad (f^n)'(x) = n\, f'(x)\, f^{n-1}(x)\ .}$$

C8.58. Exercice La fonction $f\colon x \longmapsto \left(9x^2 - 3x + 4\right)^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.

C8.59. Exercice La fonction $f\colon x \longmapsto \sqrt{x^2 + x + 2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.

C8.60. Exercice La fonction $f\colon x \longmapsto \tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\left]\dfrac{2}{\pi}, +\infty\right[$. Calculer sa dérivée.

C8.61. Exercice La fonction $f\colon x \longmapsto \cos^2(3x-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.

C8.62. Exercice La fonction $f\colon x \longmapsto \sqrt{x^5 + 5x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa dérivée.

C8.63. Exercice La fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{5+4\cos^2(x)}{1+\cos(x)}$ est dérivable sur $]-\pi,\pi[$. Calculer sa dérivée.

C8.64. Exercice La fonction $f\colon x \longmapsto \sqrt{2\cos^2(x)-\cos(x)}$ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right[$. Calculer sa dérivée.

C8.65. Exercice Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que la limite $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin^4(x)-\sin^4(a)}{x-a}$ existe et la calculer.

§ 10 Critères différentiels de monotonie

C8.66. Propriété (caractérisation des fonctions dérivables constantes) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

$$\boxed{f \text{ est constante sur } I \iff \big(\forall\, x \in I \quad f'(x)=0\big)}$$

C8.67. Propriété (caractérisation des fonctions dérivables monotones) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- f est croissante sur $I \iff \big(\forall\, x \in I \quad f'(x) \geqslant 0\big)$
- f est décroissante sur $I \iff \big(\forall\, x \in I \quad f'(x) \leqslant 0\big)$

C8.68. Propriété (caractérisation des fonctions dérivables strictement monotones) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- f est strictement croissante sur $I \iff \left\{\begin{array}{c} \forall\, x \in I \quad f'(x) \geqslant 0 \\ \text{et} \\ \forall\,(a,b) \in I^2 \quad a<b \Longrightarrow f'_{|[a,b]} \neq 0_{\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})} \end{array}\right.$
- f est strictement décroissante sur $I \iff \left\{\begin{array}{c} \forall\, x \in I \quad f'(x) \leqslant 0 \\ \text{et} \\ \forall\,(a,b) \in I^2 \quad a<b \Longrightarrow f'_{|[a,b]} \neq 0_{\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})} \end{array}\right.$

C8.69. Exercice Étudier la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x+2}$.

C8.70. Exercice

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \geqslant x-\dfrac{x^3}{6}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Encadrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et en déduire le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

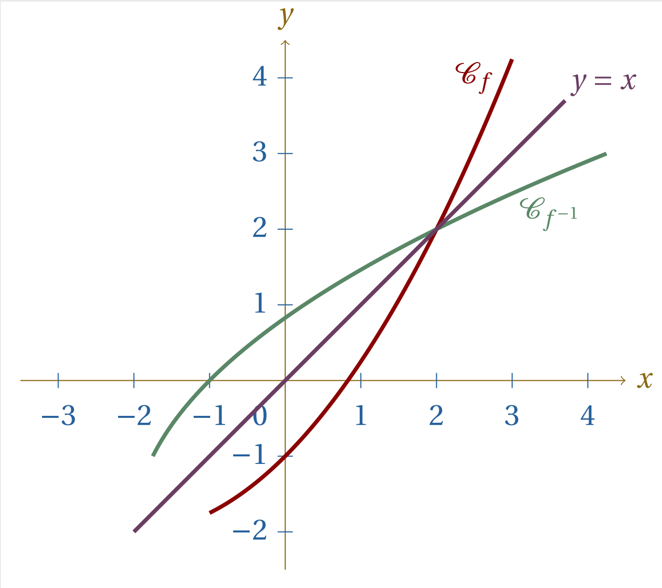
C8.71. EXERCICE Étudier la fonction $f\colon x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

C8.72. EXERCICE Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

§ 11 COURBE, DÉRIVABILITÉ ET DÉRIVÉE D'UNE FONCTION RÉCIPROQUE

C8.73. PROPRIÉTÉ (COURBE D'UNE FONCTION RÉCIPROQUE)

Soient A, B des parties de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow B$ une fonction bijective. Alors la courbe représentative $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de sa réciproque, est le symétrique de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).



C8.74. THÉORÈME (DE LA BIJECTION) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si :

(H1) f est strictement monotone sur I ;

(H2) f est continue sur I ;

alors :

(C1) $f(I)$ est un intervalle ;

(C2) l'application :

$$\boxed{\tilde{f} := f^{|f(I)} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.}$$

est bijective.

C8.75. Théorème (dérivabilité et dérivée d'une fonction réciproque) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

(H1) f est dérivable sur I ;

(H2) f est strictement monotone sur I.

D'après le théorème de la bijection C8.74, l'ensemble $J := f(I)$ est un intervalle et la fonction :

$$\widetilde{f} \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est bijective.

(C1) Pour tout $y \in J$:

$$\boxed{\widetilde{f}^{-1} \text{ est dérivable en } y \quad \Longleftrightarrow \quad f'\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right) \neq 0.}$$

(C2) Pour tout point y de J en lequel $\widetilde{f}^{-1}$ est dérivable :

$$\boxed{\left(\widetilde{f}^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(\widetilde{f}^{-1}(y)\right)}.}$$

C8.76. Exercice (fonction Arctangente)

1. Démontrer que la fonction :
$$f \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array} \right.$$
est bijective. La réciproque de f est appelée fonction Arctangente et notée Arctan.
2. Calculer $\operatorname{Arctan}(0)$, $\operatorname{Arctan}(1)$ et $\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})$.
3. Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ et $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\right)$.
4. Étudier la parité de Arctan.
5. Démontrer que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
6. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
7. Préciser les limites de Arctan en $-\infty$ et $+\infty$.
8. Préciser la position relative de la courbe représentative de Arctan par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
9. Tracer la courbe représentative de Arctan.

§ 12 Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et dérivées d'ordre supérieur

C8.77. Définition (fonction de classe $\mathscr{C}^1$) Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } I \text{ et si } f' \text{ est continue sur } I.}$$

C8.78. Définition (dérivées d'ordre supérieur) Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

- On pose $\boxed{f^{(0)} := f.}$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f^{(k)}$ est définie et dérivable sur I, alors on pose $\boxed{f^{(k+1)} := \left(f^{(k)}\right)'.}$

C8.79. Exercice Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 5x^2 + 7x - 13\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que f admet des dérivées de tout ordre et les calculer.

C8.80. Exercice Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que f admet des dérivées de tout ordre et les calculer.

C8.81. Exercice Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x + 2 \geqslant (2-x)e^x$.

§ 13 Fonction exponentielle

C8.82. Théorème de Cauchy linéaire Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(P1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
(P2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$;
(P3) $f(0) = a$.

C8.83. Exercice Quelle est la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f' = f$ et $f(0) = 0$?

C8.84. Définition (fonction exponentielle) L'unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(P1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
(P2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$;
(P3) $f(0) = 1$;

est appelée fonction exponentielle et est notée exp. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note e^x le nombre $\exp(x)$.

C8.85. Notation (nombre e) Le nombre

$$\exp(1) \approx 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277$$

est noté e.

C8.86. Propriété (algébrique de la fonction exponentielle)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad e^{x+y} = e^x e^y \quad , \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad , \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

C8.87. Exercice Démontrer que, pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $e^{nx} = (e^x)^n$.

C8.88. Propriétés (signe et variation de la fonction exponentielle)

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$
2. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

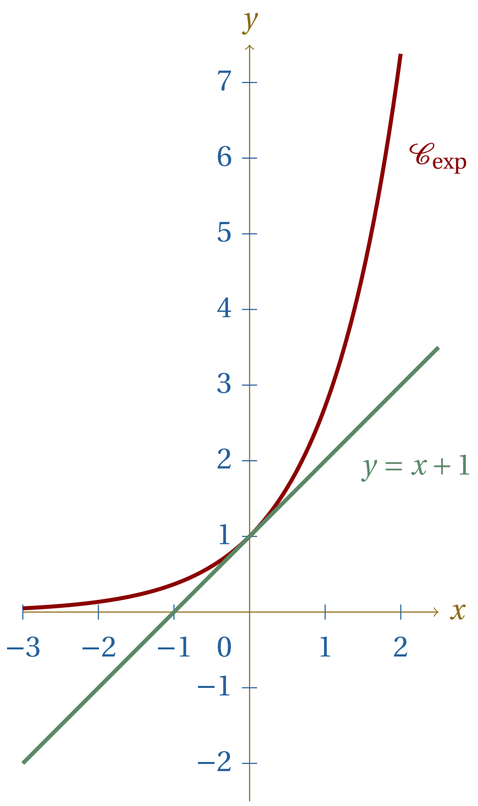
C8.89. Inégalité de convexité de la fonction exponentielle La courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x \geqslant x+1\,.$$

C8.90. Propriétés (limites de la fonction exponentielle)

$$e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

C8.91. Représentation graphique de la fonction exponentielle



C8.92. Exercice Justifier que les limites $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin(2x)}$ existent et les calculer.

C8.93. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{kx}$.

C8.94. Exercice Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

En déduire le comportement asymptotique de $\frac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

§ 14 Fonction logarithme népérien

C8.95. Propriété-Définition (fonction logarithme népérien) La fonction :

$$\exp^{|]0,+\infty[} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{>0} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$$

est bijective. Son application réciproque est appelée logarithme népérien et est notée ln :

$$\ln \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution de l'équation } y = e^x \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R} \end{array} \right..$$

C8.96. Propriété (composition de exp et ln)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(x)) = x} \qquad \boxed{\forall y \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exp(\ln(y)) = y}$$

C8.97. Propriété (algébrique de la fonction logarithme népérien)

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad , \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad , \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$$

C8.98. Exercice Démontrer que, pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

C8.99. Propriété (dérivabilité et dérivée de ln) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.}$$

C8.100. Propriété (variation et signe de ln)

1. La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_{>0}$.
2. La fonction ln s'annule uniquement en 1, est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.

C8.101. Propriétés (limites de la fonction logarithme népérien)

$$\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$

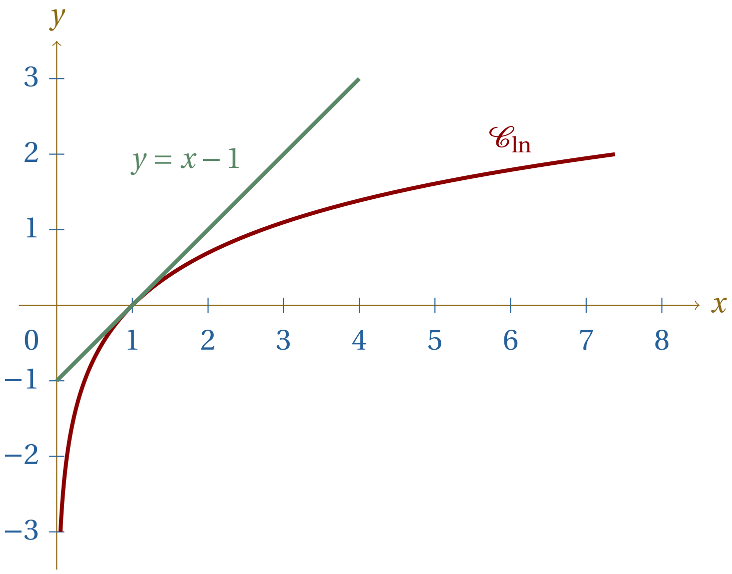
C8.102. Inégalité de concavité de la fonction logarithme népérien La courbe représentative de la fonction lograithme népérien est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1 : i.e. :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_{>0} \qquad \ln(x) \leqslant x-1$$

ce qui peut également se formuler comme suit :

$$\forall\, x \in]-1,+\infty[\qquad \ln(1+x) \leqslant x\,.$$

C8.103. Représentation graphique de la fonction logarithme népérien



C8.104. Exercice Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$, $\dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2} \leqslant \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

C8.105. Exercice Déterminer les couples de réels (x,y) tels que $e^x e^y = 10$ et $e^{x-y} = \dfrac{2}{5}$.

C8.106. Exercice Résoudre l'équation $\ln\left(x^2-1\right) - \ln(2x-1) + \ln(2) = 0$.

C8.107. Exercice Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

C8.108. Exercice Justifier que les limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(4x))}{\tan(3x)}$ existent et les calculer.

C8.109. Exercice Justifier que pour tout $x > 1$:

$$0 \leqslant \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x} - 2$$

et en déduire le comportement asymptotique de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.110. Exercice Démontrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

§ 15 Fonctions puissances

C8.111. Définition (fonction puissance) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \in \mathbb{N}$ la fonction p_α est définie sur $\mathscr{D}_\alpha := \mathbb{R}$ par :

$$p_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha := \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{\alpha \text{ fois}} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}^* . \end{cases} \end{array} \right.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{Z}_{\leqslant -1}$ la fonction p_α est définie sur $\mathscr{D}_\alpha := \mathbb{R}^*$ par :

$$p_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha := \underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \ldots \times \frac{1}{x}}_{-\alpha \text{ fois}} . \end{array} \right.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{N}^*$ la fonction p_α est définie sur $\mathscr{D}_\alpha := \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ par :

$$p_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geqslant 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\alpha \ln(x)} & \text{si } x > 0 . \end{cases} \end{array} \right.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant -1}$ la fonction p_α est définie sur $\mathscr{D}_\alpha := \mathbb{R}_{>0}$ par :

$$p_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} . \end{array} \right.$$

C8.112. Propriétés (des fonctions puissances) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

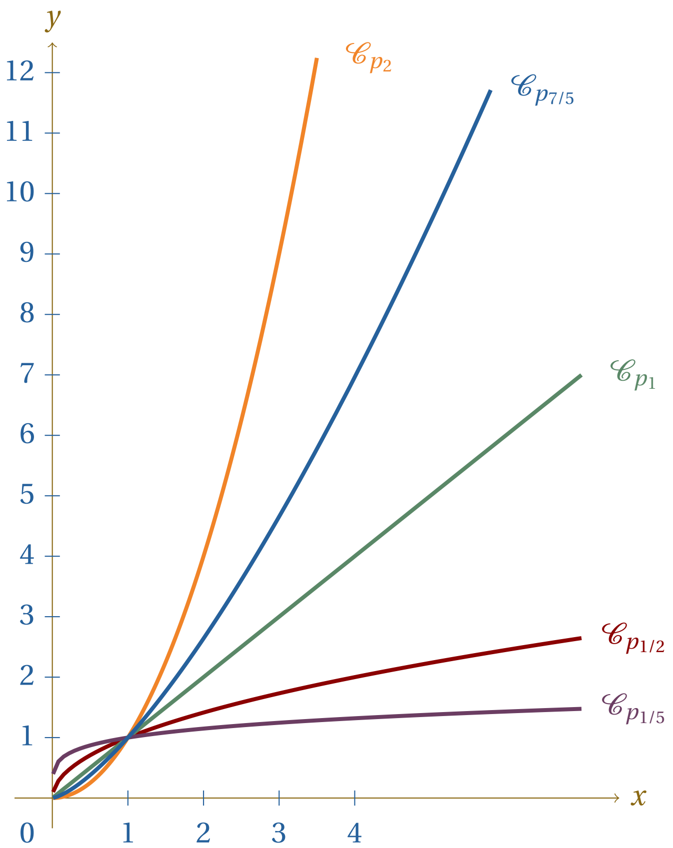
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
2. La fonction p_α est continue sur son domaine de définition $\mathscr{D}_\alpha$.
3. Si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la fonction p_α est dérivable sur $\mathscr{D}_\alpha$ et :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathscr{D}_\alpha \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha - 1} .}$$

4. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_{>0} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}\,.$$

C8.113. Représentation graphique de quelques fonctions puissances



C8.114. Exercice Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{N}^*$. Donner une CNS sur α pour que $p_\alpha : \mathscr{D}_\alpha = \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable en 0.

C8.115. Propriétés (algébriques des fonctions puissances)
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$.

$$(x\,y)^{\alpha} = x^{\alpha}\, y^{\alpha} \quad , \quad x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}\, x^{\beta} \quad , \quad (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$$

C8.116. Propriétés (croissances comparées) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$.

$$\frac{\exp(\alpha\, x)}{x^{\beta}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad , \quad |x|^{\alpha}\, e^{\beta x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \quad , \quad \frac{\ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad , \quad |x|^{\alpha}\, |\ln(x)|^{\beta} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

C8.117. Exercice Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$. Étudier le comportement asymptotique de $\dfrac{e^{\alpha x}}{\ln^{\beta}(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.118. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $x^5 \ln(x^2+x)$ lorsque x tend vers 0^+.

C8.119. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $\ln(x) - e^x + x^3$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.120. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $2x - \ln\left(9^x + x^2\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.121. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $\dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.122. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.123. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^{x^2}+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.124. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^{x^2}+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.125. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.126. Exercice Soit $a > 1$. Étudier le comportement asymptotique de $\dfrac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.127. Exercice Étudier le comportement asymptotique de $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

C8.128. Exercice Étudier la fonction $f : x \longmapsto x\,e^{-x^2}$.

C8.129. Exercice Étudier la fonction $f : x \longmapsto \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$.

C8.130. Exercice

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto x^x$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x) = y$?

C8.131. Exercice Étudier la fonction $f : x \longmapsto x^{-\ln(x)}$.

C8.132. Exercice Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$.

C8.133. Exercice Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de réels strictement positifs tels que $x^y = y^x$ et $x^2 = y^3$.

§ 16 Fonctions logarithmes de base a où $a > 1$

C8.134. Définition (fonction logarithme de base a où $a > 1$) Soit $a > 1$. La fonction logarithme de base a, noté $\log_a$, est définie par :

$$\log_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} \right. .$$

C8.135. Remarque La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien, i.e. $\ln = \log_e$.

C8.136. Propriété (exponentielle vs. logarithme de base $a>1$) Soit $a>1$.
La fonction $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective et son application réciproque est l'exponentielle de base a, définie par :

$$\exp_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{>0} \\ x & \longmapsto & a^x := e^{x\ln(a)} \end{array} \right. .$$

C8.137. Remarque Quel est le nombre de chiffres en base 10 de $2^{123456789}$?

C8.138. Remarque Démontrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

C8.139. Remarque Soient x et y des réels strictements positifs. Simplifier $\log_x\left(\log_x\left(x^{(x^y)}\right)\right)$.

§ 17 Fonctions hyperboliques

C8.140. Définition (des fonctions ch, sh et th) Les fonctions cosinus hyperbolique (ch), sinus hyperbolique (sh) et tangente hyperbolique (th) sont définies comme suit.

$$\mathrm{ch} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array} \right. \qquad \mathrm{sh} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array} \right. \qquad \mathrm{th} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array} \right.$$

C8.141. Une formule de trigonométrie hyperbolique

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1}$$

C8.142. Exercice Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer :

$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) \qquad , \qquad \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$$

et en déduire une expression pour $\mathrm{th}(x+y)$.

C8.143. Exercice Soient x et y des nombres réels. Exprimer e^x+e^y en fonction de $\mathrm{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ et e^x-e^y en fonction de $\mathrm{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

C8.144. Exercice Soit $(x,n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}$. Calculer $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$.

C8.145. Exercice Démontrer que, pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{1+\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)}\right)^n = \dfrac{1+\mathrm{th}(nx)}{1-\mathrm{th}(nx)}$.

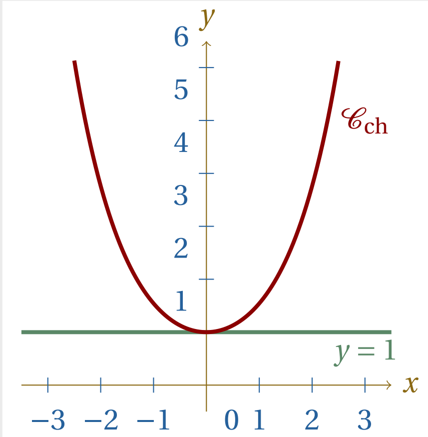
C8.146. Exercice Déterminer les couples de réels (a,b) tels que le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \mathrm{ch}(x) & + & \mathrm{ch}(y) & = & a \\ \mathrm{sh}(x) & + & \mathrm{sh}(y) & = & b \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ possède une solution.

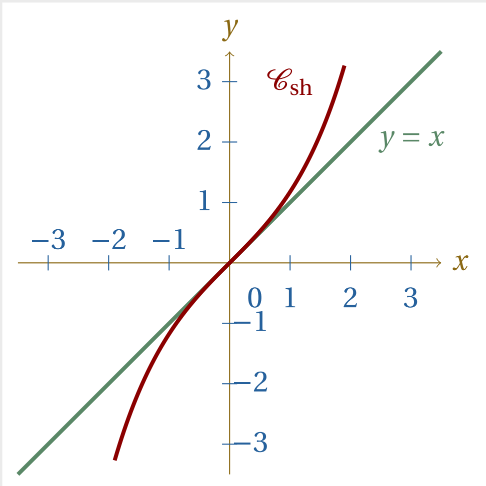
C8.147. Propriétés (de la fonction ch)

1. La fonction ch est paire.
2. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{ch}' = \text{sh}$.
3. La fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) \geqslant 1$
5. $\text{ch}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
6. $\text{ch}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$



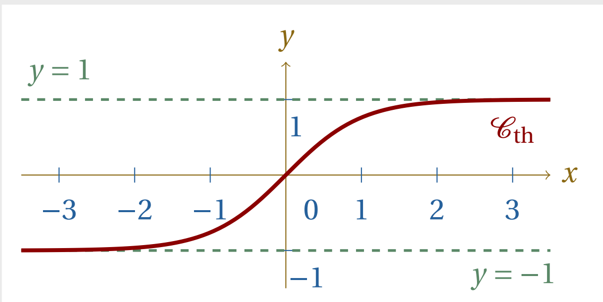
C8.148. Propriétés (de la fonction sh)

1. La fonction sh est impaire.
2. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.
3. La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{sh}(x) > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_{<0} \quad \text{sh}(x) < 0$
6. $\text{sh}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
7. $\text{sh}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$



C8.149. Propriétés (de la fonction th)

1. La fonction th est impaire.
2. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x)\,.$$
3. La fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{th}(x) > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_{<0} \quad \text{th}(x) < 0$
6. $\text{th}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$
7. $\text{th}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$



C8.150. Exercice Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\text{sh}(x) \geqslant x$.

C8.151. Exercice Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\text{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

C8.152. Exercice Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $2\,\mathrm{sh}(x) + \mathrm{th}(x) \geqslant 3x$.

C8.153. Exercice Démontrer que la fonction $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective ; puis effectuer une étude complète de sa réciproque, appelée fonction argument sinus hyperbolique et notée Argsh.

§ 18 Fonctions circulaires réciproques

C8.154. Propriété-définition (fonction arcsinus) La fonction :

$$\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}^{|[-1,1]} \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

est bijective. Son application réciproque est appelée fonction arcsinus et est notée Arcsin. Ainsi :

$$\mathrm{Arcsin} \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin(x) = y \end{array} \right.$$

et :

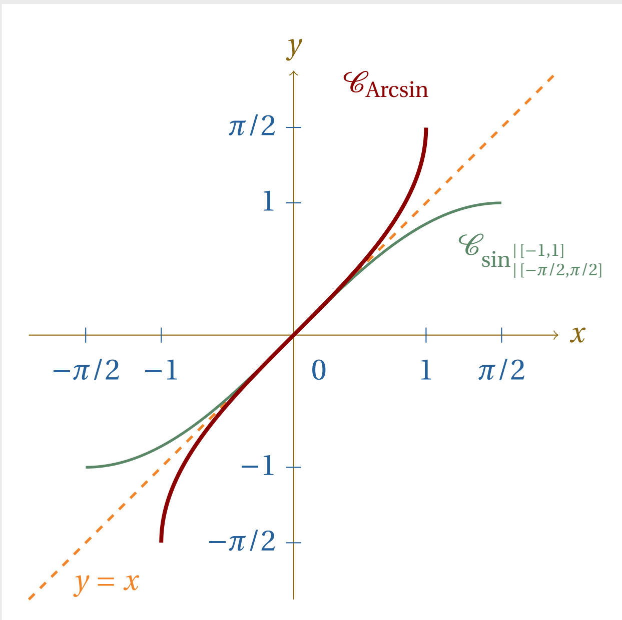
$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x \qquad , \qquad \forall y \in [-1,1] \quad \sin(\mathrm{Arcsin}(y)) = y\,.$$

C8.155. Exercice Calculer $\mathrm{Arcsin}(0)$, $\mathrm{Arcsin}(1)$ et $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)$.

C8.156. Exercice Calculer $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right)$ et $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right)$.

C8.157. Propriétés (de la fonction Arcsin)

1. La fonction Arcsin est impaire.
2. La fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$.
3. La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$
4. La fonction Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
5. $\forall x \in]-1,0[\quad \mathrm{Arcsin}(x) < 0$
6. $\forall x \in]0,1[\quad \mathrm{Arcsin}(x) > 0$



C8.158. Exercice Soit $f : x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, exprimer $f(x)$ à l'aide de $\mathrm{Arcsin}(x)$.

C8.159. Exercice Soit $f : x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'_f$ de f.
3. Réaliser une étude complète de la fonction f.

C8.160. Propriété-définition (fonction arcosinus) La fonction :

$$\cos_{|[0,\pi]}^{|[-1,1]} \left| \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

est bijective. Son application réciproque est appelée fonction arcosinus et est notée Arccos. Ainsi :

$$\mathrm{Arccos} \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos(x) = y \end{array} \right.$$

et :

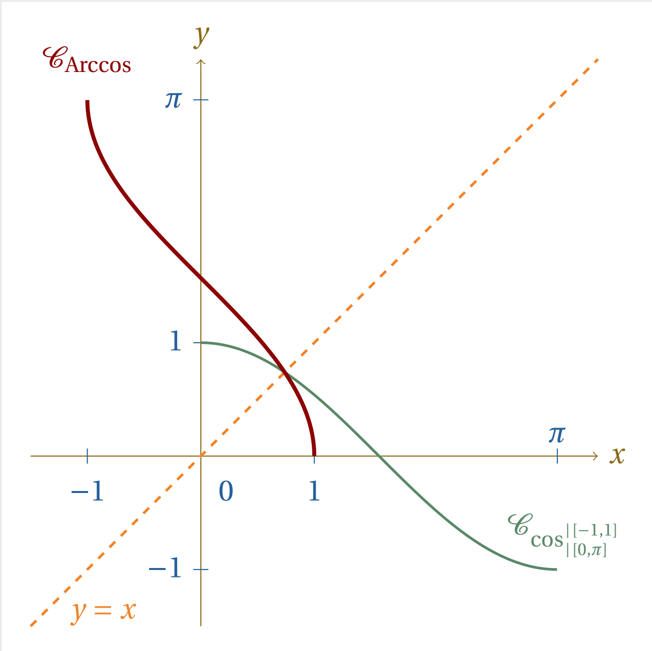
$$\forall x \in [0,\pi] \quad \mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x \qquad , \qquad \forall y \in [-1,1] \quad \cos(\mathrm{Arccos}(y)) = y\,.$$

C8.161. Exercice Calculer $\mathrm{Arccos}(0)$, $\mathrm{Arccos}(1)$ et $\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

C8.162. Exercice Calculer $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ et $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{2023\pi}{4}\right)\right)$.

C8.163. Propriétés (de la fonction Arccos)

1. La fonction Arccos est continue sur $[-1,1]$.
2. La fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$
3. La fonction Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.
4. $\forall x \in [-1,1[\quad \mathrm{Arccos}(x) > 0$



C8.164. Propriété (lien entre Arcsin et Arccos)

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] \quad \mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

C8.165. EXERCICE Calculer, pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$.

C8.166. EXERCICE Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$.

C8.167. EXERCICE (POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux fonctions f_n et g_n définies par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) \end{array} \right. \qquad f_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(n \operatorname{Arccos}(x))}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right.$$

sont polynomiales.

C8.168. PROPRIÉTÉ-DÉFINITION (FONCTION ARCTANGENTE) La fonction :

$$\tan_{|]-\pi/2,\pi/2[} \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array} \right.$$

est bijective. Son application réciproque est appelée fonction arctangente et est notée Arctan. Ainsi :

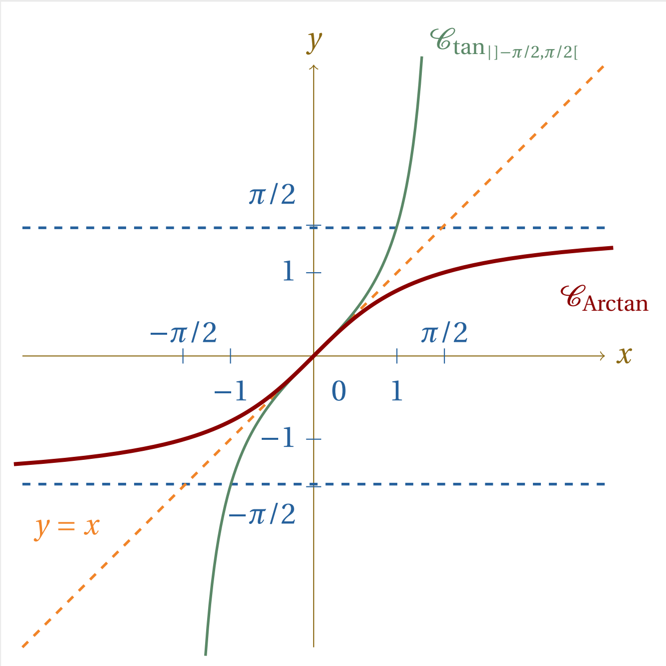
$$\operatorname{Arctan} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } \tan(x) = y \end{array} \right.$$

et :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x \qquad , \qquad \forall y \in \mathbb{R} \quad \tan(\operatorname{Arctan}(y)) = y\,.$$

C8.169. PROPRIÉTÉS (DE LA FONCTION Arctan)

1. La fonction Arctan est impaire.
2. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$
3. La fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_{<0} \quad \operatorname{Arctan}(x) < 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad \operatorname{Arctan}(x) > 0$
6. $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$
7. $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2}$



C8.170. Propriété (Arctangentes d'un réel non nul et de son inverse)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\,\frac{\pi}{2}$$

C8.171. Exercice Simplifier, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\tan(\operatorname{Arcsin}(x))$.

C8.172. Exercice Calculer $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5) + \operatorname{Arctan}(8)$.

C8.173. Exercice

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n+2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+3n+1}\right)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$. Étudier le comportement asymptotique de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

C8.174. Exercice Démontrer $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{3}{5}\right) = 2 \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

§ 19 Nouveaux exemples de formules de dérivée d'une composée

C8.175. Propriété Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. L'application $x \longmapsto e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{u(x)}\right) = u'(x)e^{u(x)}.$$
2. L'application $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(u(x))$ est définie et dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{Arctan}(u(x))) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$
3. Si, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, l'application $x \longmapsto \ln(u(x))$ est définie et dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(u(x))) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$
4. Si, pour tout $x \in I$, $-1 < u(x) < 1$, l'application $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(u(x))$ est définie et dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{Arcsin}(u(x))) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$$

C8.176. Exercice Étudier la fonction $f\colon x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

C8.177. Exercice Étudier la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

C8.178. Exercice Écrire le trinôme du second degré $X^2 + X + 1$ sous forme canonique, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

§ 20 Compléments sur les études de fonctions

C8.179. Définition (branches infinies d'une courbe représentative de fonction) Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction dont le domaine de définition est noté $\mathscr{D}_f$ et la courbe représentative est notée $\mathscr{C}_f$. On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$, i.e. qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[\alpha, +\infty[\subset \mathscr{D}_f$.

1. Si :
$$\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \quad \text{et} \quad f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} b}$$
alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

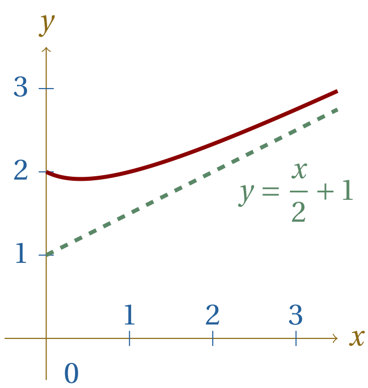
2. Si :
$$\boxed{\exists a \in \mathbb{R} \qquad \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \quad \text{et} \quad \left(f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \right)}$$
alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$, au voisinage de $+\infty$.

3. Si :
$$\boxed{\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty \quad \text{ou} \quad \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$$
alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy), au voisinage de $+\infty$.

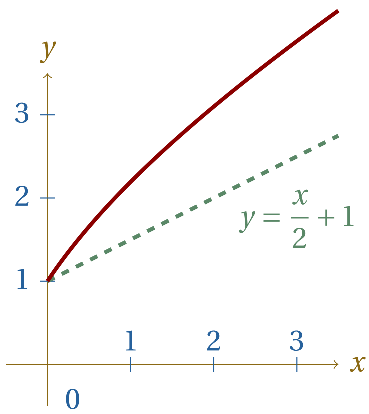
Tout ce qui précède se généralise *mutatis mutandis* au voisinage de $-\infty$.

C8.180. Illustration graphique des branches infinies d'une courbe représentative

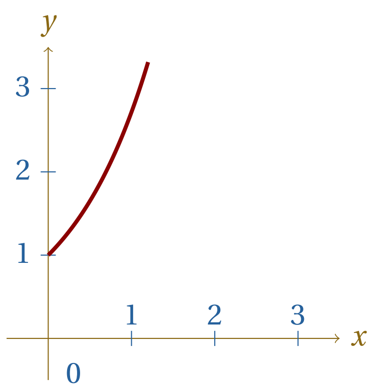
Droite asymptote d'équation $y = x/2 + 1$



Branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x/2 + 1$



Branche parabolique de direction (Oy)



C8.181. Exercice Étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $f\colon x \longmapsto \ln(x) + \sqrt{x}$.

C8.182. Exercice Étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x+2}$.

C8.183. Exercice Étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $f\colon x \longmapsto x\ln(x+\sqrt{x})$.

C8.184. Définition (axe de symétrie d'une courbe représentative) Soit $f\colon x \longmapsto f(x)$ une fonction dont le domaine de définition est noté $\mathscr{D}_f$ et la courbe représentative est notée $\mathscr{C}_f$. Soit $a \in \mathbb{R}$. La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(C1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a+x \in \mathscr{D}_f \Longrightarrow a-x \in \mathscr{D}_f$.

(C2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a+x \in \mathscr{D}_f \Longrightarrow f(a+x) = f(a-x)$.

Si tel est le cas, on peut choisir $\mathscr{D}_f \cap [a, +\infty[$ comme domaine d'étude.

C8.185. Exercice Soient $f\colon x \longmapsto f(x)$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que la droite l'équation $x = a$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si la fonction $g\colon x \longmapsto f(x+a)$ est paire.

C8.186. Exercice Démontrer que la courbe représentative de $f\colon x \longmapsto x^2 - 4x + 7 - |x-2|$ possède une axe de symétrie.

C8.187. Définition (centre de symétrie d'une courbe représentative) Soit $f\colon x \longmapsto f(x)$ une fonction dont le domaine de définition est noté $\mathscr{D}_f$ et la courbe représentative est notée $\mathscr{C}_f$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Le point $\Omega(a,b)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(C1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in \mathscr{D}_f \Longrightarrow 2a - x \in \mathscr{D}_f$.

(C2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in \mathscr{D}_f \Longrightarrow f(2a-x) = 2b - f(x)$.

Si tel est le cas, on peut choisir $\mathscr{D}_f \cap [a, +\infty[$ comme domaine d'étude.

C8.188. Exercice Soient $f\colon x \longmapsto f(x)$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que la droite l'équation $x = a$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si la fonction $g\colon x \longmapsto f(x+a)+b$ est impaire.

C8.189. Exercice Démontrer que la courbe représentative de $f\colon x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x+1}$ possède une axe de symétrie.

C8.190. Plan d'étude d'une fonction Soif $f\colon x \longmapsto f(x)$. On liste quelques étapes pour étudier la fonction f.

(1) Détermination du domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
(2) Recherche de périodicité, parité, axe de symétrie, centre de symétrie et réduction du domaine d'étude le cas échéant.
(3) Étude des variations de f, par exemple en étudiant la dérivabilité et la dérivée de f.
(4) Étude des limites éventuelles aux bornes de $\mathscr{D}_f$.
(5) Le cas échéant, étude des branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
(6) Tracer de l'allure de $\mathscr{C}_f$, en ajoutant éventuellement quelques tangentes en des points remarquables.

§ 21 Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes

C8.191. Définition Soit $f\colon x \longmapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes, dont le domaine de définition est noté $\mathscr{D}_f$. On lui associe les fonctions $\mathrm{Re}\left(f\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f\right)$ définies par :

$$\mathrm{Re}\left(f\right) \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}\left(f(x)\right) \end{array}\right. \qquad \mathrm{Im}\left(f\right) \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Im}\left(f(x)\right) \end{array}\right.$$

de sorte que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \mathrm{Re}\left(f\right)(x) + i\ \mathrm{Im}\left(f\right)(x)$.

1. On dit que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ si les fonctions $\mathrm{Re}\left(f\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f\right)$ à valeurs réelles sont dérivables sur $\mathscr{D}_f$.
2. Si f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ alors sa fonction dérivée est :

$$f' \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \left(\mathrm{Re}\left(f\right)\right)'(x) + i\ \left(\mathrm{Im}\left(f\right)\right)'(x) \end{array}\right.$$

de sorte que :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathscr{D}_f \qquad f'(x) = \left(\mathrm{Re}\left(f\right)\right)'(x) + i\ \left(\mathrm{Im}\left(f\right)\right)'(x)\,.}$$

C8.192. Propriétés (opérations sur les fonction dérivables à valeurs complexes) Les résultats sur :

1. les combinaisons linéaires de fonctions dérivables C8.52 ;
2. les produits de fonctions dérivables C8.53 ;
3. les inverses de fonctions dérivables C8.54 ;
4. les quotients de fonctions dérivables C8.55 ;

énoncés et démontrés pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ s'étendent aux fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

C8.193. Propriété (dérivée d'une composée d'une fonction dérivable par l'exponentielle) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors la fonction :

$$\exp\circ\varphi \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\varphi(t)} \end{array}\right.$$

est dérivable sur I et :

$$\boxed{\forall\, t \in I \qquad \left(\exp\circ\varphi\right)'(t) = \varphi'(t)\, e^{\varphi(t)}\,.}$$

C8.194. Exercice Déterminer une fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, non identiquement nulle, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \varphi''(t) + \varphi'(t) + \varphi(t) = 0\,.$$