Chapitre n°6

Petits systèmes linéaires

C6.1. Objectif Résoudre des systèmes linéaires de 2 ou 3 équations à 2 ou 3 inconnues par la méthode du pivot de Gauß.

§ 1 Systèmes linéaires à 2 inconnues

C6.2. Notations On munit le plan usuel $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ grâce auquel on identifie $\mathscr{P}$ et $\mathbb{R}^2$.

C6.3. Rappel sur les équations de droite dans le plan
Si $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ vérifie $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ alors l'équation :

$$\boxed{\alpha\, x+\beta\, y=\gamma}$$

est l'équation d'une droite $\mathscr{D}$ du plan dont $\overrightarrow{n}\,(\alpha,\beta)$ est un vecteur normal et $\overrightarrow{u}\,(-\beta,\alpha)$ est un vecteur directeur.

C6.4. Système de 2 équations à 2 inconnues Soient $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant 2}$ des familles de nombres réels. On considère le système suivant d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{(S_{2,2})\qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x & + & a_{12}\,y & = & b_1 & & L1\\ a_{21}\,x & + & a_{22}\,y & = & b_2 & & L2\end{array}\right.}$$

L'ensemble solution de $(S_{2,2})$ est :

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{(S_{2,2})}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \left|\begin{array}{ccccc} a_{11}\,x & + & a_{12}\,y & = & b_1\\ a_{21}\,x & + & a_{22}\,y & = & b_2\end{array}\right.\right\}.}$$

Si (a_{11},a_{12}) et (a_{21},a_{22}) diffèrent de $(0,0)$, alors :

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{(S_{2,2})}=\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}_2}$$

où :

- $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $a_{11}\,x+a_{12}\,y=b_1$;
- $\mathscr{D}_2$ est la droite d'équation $a_{21}\,x+a_{22}\,y=b_2$.

C6.5. Exercice Résoudre le système linéaire :

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & 4\,y & = & 1\\ 5\,x & - & 7\,y & = & 2\end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

C6.6. Système de 3 équations à 2 inconnues Soient $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ des familles de nombres réels. On considère le système suivant d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(S_{3,2})\qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x & + & a_{12}\,y & = & b_1 & & L1\\ a_{21}\,x & + & a_{22}\,y & = & b_2 & & L2\\ a_{31}\,x & + & a_{32}\,y & = & b_3 & & L3\end{array}\right.$$

L'ensemble solution de $(S_{3,2})$ est :

$$\mathrm{Sol}_{(S_{3,2})} := \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \left|\begin{array}{ccccc} a_{11}\,x & + & a_{12}\,y & = & b_1\\ a_{21}\,x & + & a_{22}\,y & = & b_2\\ a_{31}\,x & + & a_{32}\,y & = & b_3\end{array}\right.\right\}.$$

Si (a_{11},a_{12}), (a_{21},a_{22}) et (a_{31},a_{32}) diffèrent de $(0,0)$, alors :

$$\mathrm{Sol}_{(S_{3,2})} = \mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}_2\cap\mathscr{D}_3$$

où :
- $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $a_{11}\,x+a_{12}\,y=b_1$;
- $\mathscr{D}_2$ est la droite d'équation $a_{21}\,x+a_{22}\,y=b_2$;
- $\mathscr{D}_3$ est la droite d'équation $a_{31}\,x+a_{32}\,y=b_3$.

C6.7. Exercice Soit $m\in\mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire :

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 2\,x & + & 3\,y & = & 1\\ 4\,x & + & 5\,y & = & 1\\ 6\,x & + & 7\,y & = & m\end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

C6.8. Définition (opérations élémentaires pour les systèmes $(S_{2,2})$ et $(S_{3,2})$)
Soit (S) l'un des systèmes linéaires $(S_{2,2})$ (cf. C6.4) ou $(S_{3,2})$ (cf. C6.6). Une opération élémentaire sur (S) est l'une des trois opérations suivantes.
- *Permutation* Échange de la position des lignes Li et Lj, noté $Li\longleftrightarrow Lj$;
- *Dilatation* Multiplication chaque membre de la ligne Li par un scalaire λ non nul, notée $Li\longleftarrow \lambda Li$;
- *Transvection* Ajout d'un multiple λLj $(\lambda\in\mathbb{R})$ de la ligne Lj à une autre ligne Li, notée $Li\longleftarrow Li+\lambda Lj$.

C6.9. Proposition (effet d'une opération élémentaire sur les systèmes $(S_{2,2})$ et $(S_{3,2})$)
Soit (S) l'un des systèmes linéaires $(S_{2,2})$ (cf. C6.4) ou $(S_{3,2})$ (cf. C6.6). Une opération élémentaire sur (S) ne modifie pas son ensemble solution.

C6.10. Notation Dans la suite, les symboles ■ désignent des scalaires non nuls non nécessairement égaux et les les symboles ■ désignent des scalaires non nécessairement égaux.

C6.11. ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS POUR LE SYSTÈME $(S_{2,2})$

On considère le système linéaire $(S_{2,2})$ (cf. C6.4).

• *Cas où* $a_{11} \neq 0$ *ou* $a_{21} \neq 0$ Après échange éventuel des deux lignes $a_{11} \neq 0$ et l'opération élémentaire :

$$L2 \longleftarrow L2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L1$$

transforme $(S_{2,2})$ en l'un des deux systèmes linéaires suivants.

$$(1) \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcl} {\color{darkred}\blacksquare}\, x & + & {\color{blue}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{darkred}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.} \qquad (2) \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcl} {\color{darkred}\blacksquare}\, x & + & {\color{blue}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.}$$

• *Cas où* $a_{11} = 0$ *et* $a_{21} = 0$ Après échange éventuel des deux lignes et application d'une transvection, $(S_{2,2})$ est transformé en l'un des systèmes linéaires suivants.

$$(3) \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} {\color{darkred}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.} \qquad (4) \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.}$$

Les quatre formes de systèmes encadrées, particulièrement simples à résoudre, sont appelées <u>formes échelonnées</u>.

C6.12. ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS POUR LE SYSTÈME $(S_{3,2})$

On considère le système linéaire $(S_{3,2})$ (cf. C6.6).

• *Cas où* $a_{11} \neq 0$ *ou* $a_{21} \neq 0$ *ou* $a_{31} \neq 0$ Après échange éventuel de deux lignes $a_{11} \neq 0$ et les opérations élémentaires :

$$L2 \longleftarrow L2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L1 \qquad\qquad L3 \longleftarrow L3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L1$$

transforme $(S_{3,2})$ en le système linéaire suivant :

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} {\color{darkred}\blacksquare}\, x & + & {\color{blue}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{blue}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{blue}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.$$

dont les coefficients sont notés comme ceux de $(S_{3,2})$.

- *Cas où* $a_{22} \neq 0$ *ou* $a_{32} \neq 0$ Après échange éventuel des deux lignes du sous-système formé des lignes $L2$ et $L3$ et application d'une transvection sur ce même sous-système, le système $(\star)$ est transformé en le système suivant.

$$(1) \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcl} {\color{darkred}\blacksquare}\, x & + & {\color{blue}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{darkred}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.}$$

- *Cas où* $a_{22} = a_{32} = 0$ Le système $(\star)$ est de la forme suivante.

$$(2) \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcl} {\color{darkred}\blacksquare}\, x & + & {\color{blue}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.}$$

• *Cas où* $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$ Après un échange éventuel de deux lignes et application de deux transvections $(S_{3,2})$ est transformé en l'un des deux systèmes linéaires suivants.

$$(3) \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} {\color{darkred}\blacksquare}\, y & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.} \qquad (4) \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array} \right.}$$

Les quatre formes de systèmes encadrées, particulièrement simples à résoudre, sont appelées <u>formes échelonnées</u>.

C6.13. Proposition (nombre de solutions des systèmes linéaires $(S_{2,2})$ et $(S_{3,2})$)
Les ensembles solution $\mathrm{Sol}_{(S_{2,2})}$ et $\mathrm{Sol}_{(S_{3,2})}$ des systèmes linéaires $(S_{2,2})$ (C6.11) ou $(S_{3,2})$ (C6.12) sont :
- soit l'ensemble vide ;
- soit un singleton ;
- soit un ensemble infini.

C6.14. Exercice Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre le système linéaire :

$$(S_m) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & m\,y & = & -3 \\ m\,x & + & 4\,y & = & 6 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

C6.15. Exercice Résoudre le système linéaire :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & - & 10y & = & 6 \\ x & + & 3y & = & -1 \\ 7x & + & 2y & = & 2 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

C6.16. Exercice Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (3x - 2y, 5x + y) \end{array} \right.$$

est bijective et calculer sa bijection réciproque.

C6.17. Exercice L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - 2y, 2x - y, x + y) \end{array} \right.$$

est-elle injective ? surjective ? bijective ?

§ 2 Systèmes linéaires à 3 inconnues

C6.18. Notations On munit l'espace usuel $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ grâce auquel on identifie $\mathscr{E}$ et $\mathbb{R}^3$.

C6.19. Rappel sur les équations de plans dans l'espace
Si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ alors l'équation :

$$\boxed{\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z = \delta}$$

est l'équation d'un plan $\mathscr{P}$ de l'espace dont $\vec{n}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur normal.

C6.20. Système de 2 équations à 3 inconnues Soient $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant 2}$ des familles de nombres réels. On considère le système suivant d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{(S_{2,3})\quad\left\{\begin{array}{ccccccccl} a_{11}\,x & + & a_{12}\,y & + & a_{13}\,z & = & b_1 & & L1\\ a_{21}\,x & + & a_{22}\,y & + & a_{23}\,z & = & b_2 & & L2\end{array}\right.}$$

L'ensemble solution de $(S_{2,3})$ est :

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{(S_{2,3})} := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; \left|\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x & + & a_{12}\,y & + & a_{13}\,z & = & b_1\\ a_{21}\,x & + & a_{22}\,y & + & a_{23}\,z & = & b_2\end{array}\right.\right\}.}$$

Si (a_{11},a_{12},a_{13}) et (a_{21},a_{22},b_{23}) diffèrent de $(0,0,0)$, alors :

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{(S_{2,3})} = \mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2}$$

où :

- $\mathscr{P}_1$ est le plan d'équation $a_{11}\,x+a_{12}\,y+a_{13}\,z=b_1$;
- $\mathscr{P}_2$ est la droite d'équation $a_{21}\,x+a_{22}\,y+a_{23}\,z=b_2$.

C6.21. Exercice Résoudre le système linéaire :

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{ccccccr} 2x & + & 4\,y & - & 6\,z & = & 2\\ x & + & 5\,y & + & 13\,z & = & -1\end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

C6.22. Système de 3 équations à 3 inconnues Soient $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ des familles de nombres complexes. On considère le système suivant d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{(S_{3,3})\quad\left\{\begin{array}{ccccccccl} a_{11}\,x & + & a_{12}\,y & + & a_{13}\,z & = & b_1 & & L1\\ a_{21}\,x & + & a_{22}\,y & + & a_{23}\,z & = & b_2 & & L2\\ a_{31}\,x & + & a_{32}\,y & + & a_{33}\,z & = & b_3 & & L3\end{array}\right.}$$

L'ensemble solution de $(S_{3,3})$ est :

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{(S_{3,3})} := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; \left|\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x & + & a_{12}\,y & + & a_{13}\,z & = & b_1\\ a_{21}\,x & + & a_{22}\,y & + & a_{23}\,z & = & b_2\\ a_{31}\,x & + & a_{32}\,y & + & a_{33}\,z & = & b_3\end{array}\right.\right\}.}$$

Si (a_{11},a_{12},a_{13}), (a_{21},a_{22},a_{23}) et (a_{31},a_{32},a_{33}) diffèrent de $(0,0,0)$, alors :

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{(S_{3,3})} = \mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2\cap\mathscr{P}_3}$$

où :

- $\mathscr{P}_1$ est le plan d'équation $a_{11}\,x+a_{12}\,y+a_{13}\,z=b_1$;
- $\mathscr{P}_2$ est le plan d'équation $a_{21}\,x+a_{22}\,y+a_{23}\,z=b_2$;
- $\mathscr{P}_3$ est le plan d'équation $a_{31}\,x+a_{32}\,y+a_{33}\,z=b_3$.

C6.23. Exercice Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire :

$$(S_m) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 15 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & m \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

C6.24. Définition (opérations élémentaires pour les systèmes $(S_{2,3})$ et $(S_{3,3})$)
Soit (S) l'un des systèmes linéaires $(S_{2,3})$ (cf. C6.20) ou $(S_{3,3})$ (cf. C6.22). Une opération élémentaire sur (S) est l'une des trois opérations suivantes.

- *Permutation* Échange de la position des lignes Li et Lj, noté $Li \longleftrightarrow Lj$;
- *Dilatation* Multiplication chaque membre de la ligne Li par un scalaire λ non nul, notée $Li \longleftarrow \lambda Li$;
- *Transvection* Ajout d'un multiple λLj ($\lambda \in \mathbb{R}$) de la ligne Lj à une autre ligne Li, notée $Li \longleftarrow Li + \lambda Lj$.

C6.25. Proposition (effet d'une opération élémentaire sur les systèmes $(S_{2,3})$ et $(S_{3,3})$)
Soit (S) l'un des systèmes linéaires $(S_{2,3})$ (cf. C6.20) ou $(S_{3,3})$ (cf. C6.22). Une opération élémentaire sur (S) ne modifie pas son ensemble solution.

C6.26. Algorithme du pivot de Gauss pour le système $(S_{2,3})$
On considère le système linéaire $(S_{2,3})$ (cf. C6.20)

• *Cas où $a_{11} \neq 0$ ou $a_{21} \neq 0$* Après échange éventuel de deux lignes, $a_{11} \neq 0$ et l'opération élémentaire :

$$L2 \longleftarrow L2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L1$$

transforment $(S_{2,3})$ en l'un des trois systèmes linéaires suivants.

$$(1) \ \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, x & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, y & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ & & \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, y & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \end{array} \right.} \qquad (2) \ \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, x & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, y & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ & & & & \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \end{array} \right.}$$

$$(3) \ \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, x & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, y & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ & & & & 0 & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \end{array} \right.}$$

• *Cas où $a_{11} = a_{21} = 0$* Après échange éventuel de deux lignes et application d'une transvection, $(S_{2,3})$ est transformé en l'un des systèmes linéaires suivants :

$$(4) \ \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcl} \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, y & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ & & \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \end{array} \right.} \qquad (5) \ \boxed{\left\{ \begin{array}{rcrcl} \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, y & + & \textcolor{blue}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ & & 0 & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \end{array} \right.}$$

$$(6) \ \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \textcolor{darkred}{\blacksquare}\, z & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ 0 & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \end{array} \right.} \qquad (7) \ \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ 0 & = & \textcolor{blue}{\blacksquare} \end{array} \right.}$$

comme en C6.11.

Les sept formes de systèmes encadrées, particulièrement simples à résoudre, sont appelées formes échelonnées.

C6.27. ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS POUR LE SYSTÈME $(S_{3,3})$

On considère le système linéaire $(S_{3,3})$ (cf. C6.22)

• *Cas où $a_{11} \neq 0$ ou $a_{21} \neq 0$ ou $a_{31} \neq 0$* Après échange éventuel de deux lignes $a_{11} \neq 0$ et les opérations élémentaires :

$$L2 \longleftarrow L2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L1 \qquad\qquad L3 \longleftarrow L3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L1$$

transforme $(S_{3,3})$ en le système linéaire suivant.

$$(\star)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} {\color{red}\blacksquare}x & + & {\color{blue}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{blue}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{blue}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.$$

Après une échange éventuel de deux lignes du sous-système formé par L2 et L3 et application d'une transvection sur ce même sous-système, $(\star)$ est transformé en l'un des systèmes linéaires suivants :

$$(1)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcrcrcl} {\color{red}\blacksquare}x & + & {\color{blue}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{red}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & & & {\color{red}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.} \qquad (2)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcrcrcl} {\color{red}\blacksquare}x & + & {\color{blue}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{red}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.}$$

$$(3)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcrcrcl} {\color{red}\blacksquare}x & + & {\color{blue}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & & & {\color{red}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.} \qquad (4)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcrcrcl} {\color{red}\blacksquare}x & + & {\color{blue}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.}$$

comme en C6.11.

• *Cas où $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$* Après échange éventuel de deux lignes et application d'une ou deux transvection(s) $(S_{3,3})$ est transformé en l'un des deux systèmes linéaires suivants :

$$(5)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcrcl} {\color{red}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & {\color{red}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.} \qquad (6)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcrcl} {\color{red}\blacksquare}y & + & {\color{blue}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ & & 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.}$$

$$(7)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} {\color{red}\blacksquare}z & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.} \qquad (8)\quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \\ 0 & = & {\color{blue}\blacksquare} \end{array}\right.}$$

comme en C6.12.

Les huit formes de systèmes encadrées, particulièrement simples à résoudre, sont appelées <u>formes échelonnées</u>.

C6.28. PROPOSITION (NOMBRE DE SOLUTIONS DES SYSTÈMES LINÉAIRES $(S_{2,3})$ ET $(S_{3,3})$)

Les ensembles solution $\mathrm{Sol}_{(S_{2,3})}$ et $\mathrm{Sol}_{(S_{3,3})}$ des systèmes linéaires $(S_{2,3})$ (C6.20) ou $(S_{3,3})$ (C6.22) sont :

- soit l'ensemble vide;
- soit un singleton;
- soit un ensemble infini.

C6.29. EXERCICE

Résoudre le système linéaire :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

C6.30. EXERCICE Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 9y & + & 16z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

C6.31. EXERCICE Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, x+y, y+z) \end{array}\right.$$

est bijective et calculer sa bijection réciproque.

C6.32. EXERCICE L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+3z, -x+y+9z) \end{array}\right.$$

est-elle injective ? surjective ? bijective ?