Chapitre n°5

Sommes et produits

§ 1 Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes

C5.1. Somme d'une famille de trois nombres complexes Soit $I := \{1,2,3\}$ et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. Il existe plusieurs manières de sommer les trois éléments a_1, a_2, a_3, suivant l'ordre dans lequel on place ces trois éléments et le parenthésage. Nous listons les douze possibilités ci-dessous.

$$\begin{array}{cccc}
(a_1+a_2)+a_3 & a_1+(a_2+a_3) & (a_1+a_3)+a_2 & a_1+(a_2+a_3) \\
(a_2+a_1)+a_3 & a_2+(a_1+a_3) & (a_2+a_3)+a_1 & a_2+(a_3+a_1) \\
(a_3+a_1)+a_2 & a_3+(a_1+a_2) & (a_3+a_2)+a_1 & a_3+(a_2+a_1)
\end{array}$$

Comme l'addition dans $\mathbb{C}$ est associative :

$$\forall\,(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \qquad (z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$$

et commutative :

$$\forall\,(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \qquad z_1+z_2 = z_2+z_1$$

ces douze sommes sont toutes égales. On note $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ ou $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i$ leur valeur commune.

C5.2. Produit d'une famille de trois nombres complexes Soit $I := \{1,2,3\}$ et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. Il existe plusieurs manières de multiplier les trois éléments a_1, a_2, a_3, suivant l'ordre dans lequel on place ces trois éléments et le parenthésage. Nous listons les douze possibilités ci-dessous.

$$\begin{array}{cccc}
(a_1\times a_2)\times a_3 & a_1\times(a_2\times a_3) & (a_1\times a_3)\times a_2 & a_1\times(a_2\times a_3) \\
(a_2\times a_1)\times a_3 & a_2\times(a_1\times a_3) & (a_2\times a_3)\times a_1 & a_2\times(a_3\times a_1) \\
(a_3\times a_1)\times a_2 & a_3\times(a_1\times a_2) & (a_3\times a_2)\times a_1 & a_3\times(a_2\times a_1)
\end{array}$$

Comme la multiplication dans $\mathbb{C}$ est associative :

$$\forall\,(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \qquad (z_1\times z_2)\times z_3 = z_1\times(z_2\times z_3)$$

et commutative :

$$\forall\,(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \qquad z_1\times z_2 = z_2\times z_1$$

ces douze produits sont tous égaux. On note $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{i=1}^{3} a_i$ leur valeur commune.

C5.3. Définition (ensemble fini) Un ensemble E est dit fini si : $E = \emptyset$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow E$.

C5.4. Exercice (vers la définition du cardinal d'un ensemble fini non vide)

1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On suppose qu'il existe une application $f : [\![1,n+1]\!] \longrightarrow [\![1,p]\!]$ qui est injective. Si l'on considère l'élément p du but de f, trois cas peuvent survenir.
   - p n'a pas d'antécédent par f, i.e. pour tout $i \in [\![1,n+1]\!]$, $f(i) \neq p$.
   - p a pour (unique) antécédent $n+1$ par f, i.e. $f(n+1) = p$.
   - p a pour (unique) antécédent un élément de $[\![1,n]\!]$ par f, i.e. il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $f(i) = p$.

   (a) On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n+1]\!]$, $f(i) \neq p$. Construire une application injective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p-1]\!]$.

   (b) On suppose que $f(n+1) = p$. déduire de f une application injective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p-1]\!]$.

   (c) On suppose qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $f(i) = p$. En considérant l'application :

$$\tau_{i,n+1} \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n+1]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+1]\!] \\ j & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } j = i \\ i & \text{si } j = n+1 \\ j & j \neq i \text{ et } j \neq n+1 \end{cases} \end{array} \right.$$

   déduire de f une application injective de $[\![1,n-1]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : « \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \underbrace{\big(\exists f \in \mathscr{F}\big([\![1,n]\!],[\![1,p]\!]\big) \text{ injective}\,\big) \implies n \leqslant p}_{\mathscr{Q}(n,p)} ».$$

   est vraie.

3. Soit I un ensemble. On suppose qu'il existe des entiers $n_1 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 \in \mathbb{N}^*$ et des applications bijectives $f_1 : [\![1,n_1]\!] \longrightarrow I$, $f_2 : [\![1,n_2]\!] \longrightarrow I$. Démontrer que $n_1 = n_2$.

C5.5. Définition (somme et produit d'une famille finie de nombres complexes) Soient I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$.

1. Si I est l'ensemble vide, alors on pose $\sum_{i \in I} a_i := 0$ et $\prod_{i \in I} a_i := 1$.
2. Si $I \neq \emptyset$, alors il existe un (unique, cf C5.4) $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow I$. On pose :

$$\sum_{i \in I} a_i := a_{f(1)} + a_{f(2)} + a_{f(3)} + \ldots + a_{f(n-1)} + a_{f(n)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i \in I} a_i := a_{f(1)} \times a_{f(2)} \times a_{f(3)} \times \ldots \times a_{f(n-1)} \times a_{f(n)}.$$

   - L'associativité de l'addition et l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$ rendent inutile le parenthésage dans les somme et produit ci-dessus.
   - La commutativité de l'addition et la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$ entrainent que les somme et produit ci-dessus de dépendent pas du choix de la bijection f. En effet, le choix d'une autre bijection de $[\![1,n]\!]$ dans I aurait pour seul effet de modifier l'ordre des termes des somme et produit ci-dessus.

C5.6. Exemple (somme et produit d'une famille indexée par un intervalle d'entiers)

Soient $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n \leqslant m$ et $(a_i)_{i\in[\![n,m]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![n,m]\!]}$. Dans ce cas, on note $\sum_{i=n}^{m} a_i$ la somme $\sum_{i\in[\![n,m]\!]} a_i$ et $\prod_{i=n}^{m} a_i$ le produit $\prod_{i\in[\![n,m]\!]} a_i$.

$$\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i\in[\![n,m]\!]} a_i := a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{m-1} + a_m$$

$$\prod_{i=n}^{m} a_i = \prod_{i\in[\![n,m]\!]} a_i := a_n \times a_{n+1} \times \ldots \times a_{m-1} \times a_m$$

Les somme et produit ci-dessus comportent $m-n+1$ termes.

C5.7. Exercice Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n)$ un n-uplet de nombres complexes non nuls. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{12}$
2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{10}{1024}$
3. $S_3 = 2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + 50$
4. $S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$
5. $S_5 = n + (n+1) + \ldots + 2n$
6. $S_6 = \frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_1}$

C5.8. Exercice Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_n)$ un n-uplet de nombres complexes. Écrire les produits suivants à l'aide du symbole $\prod$.

1. $P_1 = 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 100$
2. $P_2 = n \times (n+1) \times \ldots \times (2n+1)$
3. $P_3 = 1 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{4} \times \ldots \times 9 \times \frac{1}{10}$
4. $P_4 = x_1^n \times x_2^{n-1} \times \ldots x_{n-1}^2 \times x_n^1$

C5.9. Relation de récurrence fondamentale Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![1,n+1]\!]}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times a_{n+1}$$

C5.10. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ et $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

C5.11. Proposition (Premières sommes de Newton)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad S_1(n) := \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad S_2(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

C5.12. Proposition (Linéarité) Soit I un ensemble fini. Soient $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ des familles de nombres complexes indexées par I et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.

$$\boxed{\sum_{i\in I}\left(\lambda a_i+\mu b_i\right)=\lambda\sum_{i\in I}a_i+\mu\sum_{i\in I}b_i\,.}$$

C5.13. Exercice Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$ de deux manières.
2. Déduire alors la valeur de $S_2(n)$ de celle de $S_1(n)$ (cf. C5.11).

C5.14. Exercice Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)$ de deux manières.
2. Déduire alors la valeur de $S_3(n):=\displaystyle\sum_{k=1}k^3$ de celles de $S_1(n)$ et $S_2(n)$ (cf. C5.11).

C5.15. Exercice Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}$.

C5.16. Exercice

1. Déterminer deux constantes réelles a et b telles que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

§ 2 Changement d'indice

C5.17. Proposition (Changement d'indices dans une somme ou un produit) Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$. Soit J un ensemble et $\varphi\colon J\longrightarrow I$ une bijection.

$$\boxed{\sum_{i\in I}a_i=\sum_{j\in J}a_{\varphi(j)}}\qquad\boxed{\prod_{i\in I}a_i=\prod_{j\in J}a_{\varphi(j)}}$$

C5.18. Exemple (Changement d'indice par translation sur un intervalle entier) Soient $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $n\leqslant m$ et $(a_i)_{i\in[\![n,m]\!]}\in\mathbb{C}^{[\![n,m]\!]}$. Soit $p\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\sum_{i=n}^{m}a_i=\sum_{j=n-p}^{m-p}a_{j+p}}\qquad\boxed{\prod_{i=n}^{m}a_i=\prod_{j=n-p}^{m-p}a_{j+p}}$$

C5.19. Exercice Soit $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n-1}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$.

C5.20. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$.

C5.21. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

C5.22. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$.

C5.23. Exercice Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet de nombres complexes non nuls. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{n+1-k}}$.

C5.24. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$.

C5.25. Exercice Calculer $\displaystyle\sum_{k=-5}^{15} k(10-k)$.

C5.26. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}$.

C5.27. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ à l'aide du changement d'indice $j = n-k$.

§ 3 Sommes et produits télescopiques

C5.28. Proposition (sommes et produits télescopiques) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $(u_k)_{k \in [\![0,n+1]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![0,n+1]\!]}$, alors $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 .}$

2. Si $(u_k)_{k \in [\![0,n+1]\!]} \in (\mathbb{C}^*)^{[\![0,n+1]\!]}$, alors $\boxed{\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} .}$

C5.29. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

C5.30. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

C5.31. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

§ 4 Somme de termes en progression géométrique

C5.32. Proposition (somme de termes en progression géométrique) Soit $(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1\,. \end{cases}}$$

C5.33. Exercice Soit $(n,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} q^k$.

C5.34. Exercice Calculer $\dfrac{1}{2^{10}} + \dfrac{1}{2^{20}} + \dfrac{1}{2^{30}} + \ldots + \dfrac{1}{2^{1000}}$.

C5.35. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$.

C5.36. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

C5.37. Exercice Soit $(n,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$.

1. Calculer $G_1(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\, q^i$ à l'aide du changement d'indice $j = i-1$.
2. Calculer $G_2(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2\, q^i$ à l'aide du changement d'indice $j = i-1$.

C5.38. Exercice Soit $x \in [0,1]$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k} = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la limite éventuelle de $S_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

§ 5 Différence de deux puissances n-ièmes où $n \in \mathbb{N}^*$

C5.39. Proposition (différence de deux puissances n-ièmes où $n \in \mathbb{N}^*$) Soit $(a,b,n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\,.}$$

C5.40. Exercice Soit $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer que si $2^p - 1$ est premier, alors p est également premier.

C5.41. Exercice Soit $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On considère l'application :

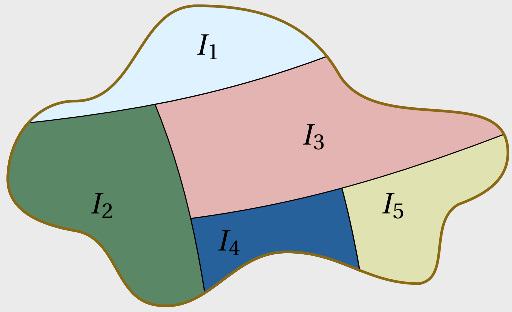
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^p\,. \end{array} \right.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\tau_{f,a}(h) := \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, puis étudier la limite éventuelle de $\tau_{f,a}(h)$ lorsque h tend vers 0.
2. Intepréter le résultat démontré en Q1.

§ 6 Regroupement de termes dans une somme ou un produit

C5.42. Définition (partition d'un ensemble fini) Soit I un ensemble fini. Une partition de I en $p \in \mathbb{N}^*$ parties est la donnée d'une famille $(I_1, I_2, \ldots, I_p)$ de p parties de I telles que :

- les parties $I_1, I_2, \ldots, I_p$ sont deux-à-deux disjointes :
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \qquad i \neq j \Longrightarrow I_i \cap I_j = \emptyset\,;$$
- la réunion des parties $I_1, I_2, \ldots, I_p$ égale I :
$$\bigcup_{i=1}^{p} I_i = I\,.$$



C5.43. Exemple Soient n, m, p des entiers tels que $n \leqslant p < m$. La famille :
$$\left([\![n,p]\!]\,,\,[\![p+1,m]\!]\right)$$
de parties de $[\![n,m]\!]$ forme une partition de $[\![n,m]\!]$.

C5.44. Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La famille :
$$\left(\{2p\ :\ p \in [\![0,n]\!]\}\,,\,\{2p+1\ :\ p \in [\![0,n-1]\!]\}\right)$$
de parties de $[\![0,2n]\!]$ forme une partition de $[\![0,2n]\!]$.
2. La famille :
$$\left(\{2p\ :\ p \in [\![0,n]\!]\}\,,\,\{2p+1\ :\ p \in [\![0,n]\!]\}\right)$$
de parties de $[\![0,2n+1]\!]$ forme une partition de $[\![0,2n+1]\!]$.
3. La famille :
$$\left(\{3p\ :\ p \in [\![0,n]\!]\}\,,\,\{3p+1\ :\ p \in [\![0,n-1]\!]\}\,,\,\{3p+2\ :\ p \in [\![0,n-1]\!]\}\right)$$
de parties de $[\![0,3n]\!]$ forme une partition de $[\![0,3n]\!]$.

C5.45. Proposition (regroupement des termes dans une somme ou un produit) Soient I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. Soit une partition $(I_1, I_2, \ldots, I_p)$ de I en $p \in \mathbb{N}^*$ parties.

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i\in I_j} a_i} \qquad \boxed{\prod_{i\in I} a_i = \prod_{j=1}^{p} \prod_{i\in I_j} a_i}$$

C5.46. Relation de Chasles pour les sommes et produits Soient n, m, p des entiers tels que $n \leqslant p < m$. Soit $(a_i)_{i\in[\![n,m]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![n,m]\!]}$.

$$\boxed{\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{m} a_i} \qquad \boxed{\prod_{i=n}^{m} a_i = \left(\prod_{i=n}^{p} a_i\right) \times \left(\prod_{i=p+1}^{m} a_i\right)}$$

C5.47. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k$.

C5.48. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2n+1}^{3n} (2k)$.

C5.49. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \min\{k, 2n\}$.

C5.50. Regroupement des termes dans une somme ou un produit suivant la parité de l'indice
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $(u_k)_{k\in[\![0,2n]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![0,2n]\!]}$. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n} u_k = \sum_{p=0}^{n} u_{2k} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2k+1}} \qquad \boxed{\prod_{k=0}^{2n} u_k = \left(\prod_{p=0}^{n} u_{2k}\right) \times \left(\prod_{p=0}^{n-1} u_{2k+1}\right).}$$

2. Soit $(u_k)_{k\in[\![0,2n+1]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![0,2n+1]\!]}$. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \sum_{p=0}^{n} u_{2k} + \sum_{p=0}^{n} u_{2k+1}} \qquad \boxed{\prod_{k=0}^{2n+1} u_k = \left(\prod_{p=0}^{n} u_{2k}\right) \times \left(\prod_{p=0}^{n} u_{2k+1}\right).}$$

C5.51. Exercice Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1}$ à l'aide de H_{2n+1} et H_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C5.52. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$.

Une solution

• *Cas où n est pair* Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2m$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2m} (-1)^k k &= \sum_{p=1}^{m} (-1)^{2p}(2p) + \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{2p+1}(2p+1) \\
&= \sum_{p=1}^{m} (2p) - \sum_{p=0}^{m-1} (2p+1) \\
&= \sum_{p=1}^{m} (2p) - \sum_{q=1}^{m} (2q-1) \\
&= \sum_{p=1}^{m} (2p-(2p-1)) \\
&= m
\end{aligned}$$

• *Cas où $n \geqslant 3$ est impair* Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2m+1$. Comme $n-1 = 2m$ est pair le calul précédent livre $\displaystyle\sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k k - (2m+1) = m - (2m+1) = -m-1$.

• *Conclusion* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Ce résultat vaut aussi pour $n = 1$.

C5.53. Exercice

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{C}^n$, s'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

   $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des solutions deux-à-deux distinctes de l'équation $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$

   alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{i\frac{k2\pi}{n}}\right) = z^n - 1$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) z + 1\right) = \frac{z^{2n+1} - 1}{z - 1}$.

§ 7 Sommes doubles

C5.54. Proposition (sommes doubles) Soient I, J deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in \mathbb{C}^{I \times J}$.

$$\boxed{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}}$$

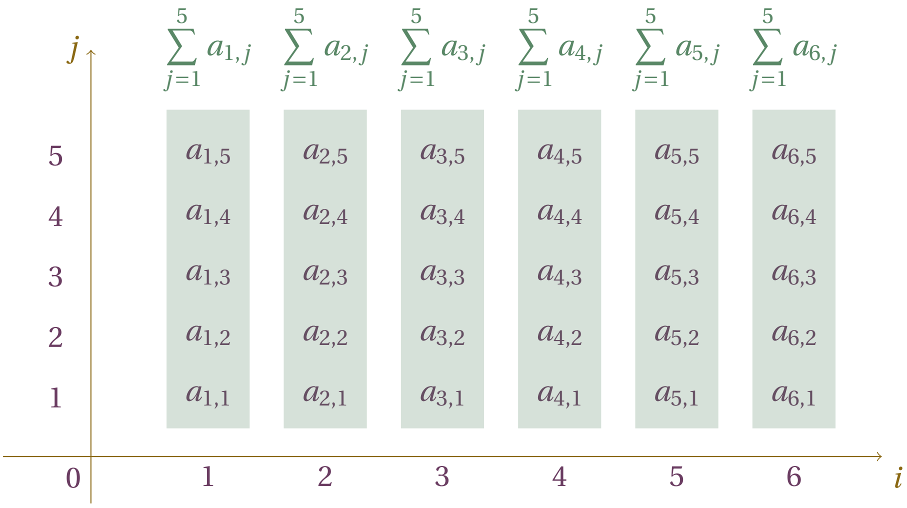
C5.55. Sommes rectangulaires Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]}$.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}}$$

Ci-contre, on considère une famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,6]\!] \times [\![1,5]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![1,6]\!] \times [\![1,5]\!]}$ et on illustre l'identité :

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{5} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [\![1,6]\!] \times [\![1,5]\!]} a_{i,j} .$$

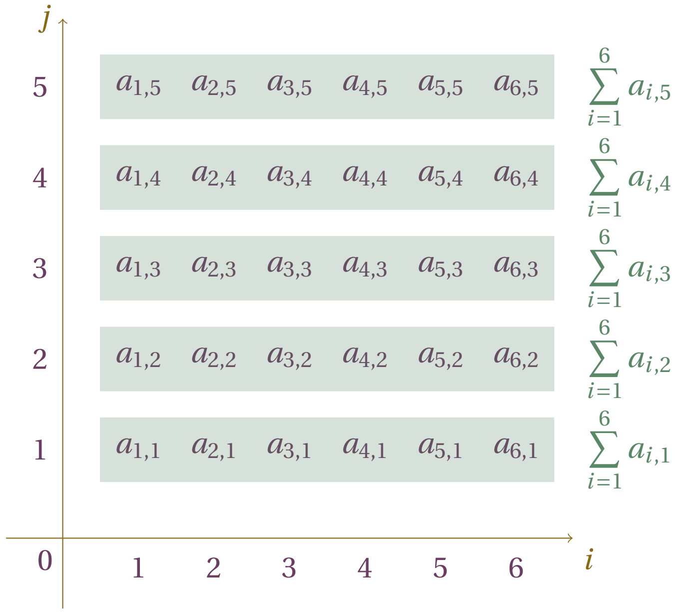
On commence par sommer les nombres verticalement avant d'additionner toutes les sommes ainsi obtenues.



Ci-contre, on considère toujours une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,6]\!]\times[\![1,5]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![1,6]\!]\times[\![1,5]\!]}$ et on illustre l'identité :

$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{6} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,6]\!]\times[\![1,5]\!]} a_{i,j}\ .$$

On commence par sommer les nombres horizontalement avant d'additionner toutes les sommes ainsi obtenues.



C5.56. EXERCICE Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$.

C5.57. EXERCICE Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min\{i,j\}$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max\{i,j\}$.

C5.58. EXERCICE Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$.

C5.59. EXERCICE Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{i+j}$.

C5.60. PROPOSITION (FORMULES D'INVERSION) Soit $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On pose :

$$T := \left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\ :\ i\leqslant j\right\} \qquad \text{et} \qquad T^+ := \left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\ :\ i< j\right\}\ .$$

1. *Première formule d'inversion* Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in T}\in\mathbb{C}^T$.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\ .}$$

2. *Deuxième formule d'inversion* Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in T^+}\in\mathbb{C}^{T^+}$.

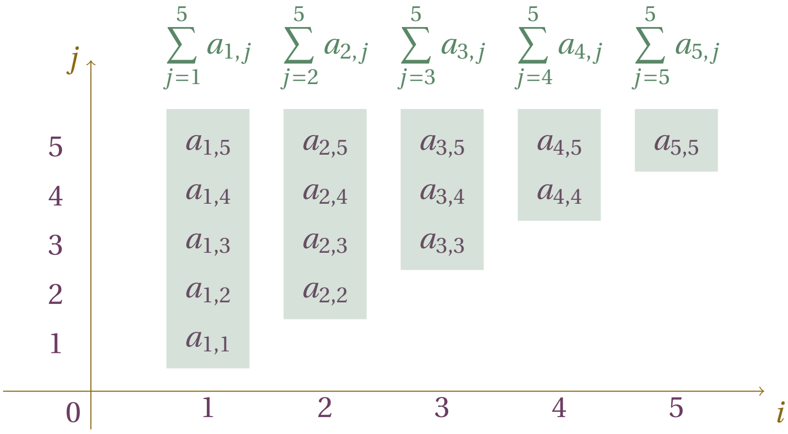
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\ .}$$

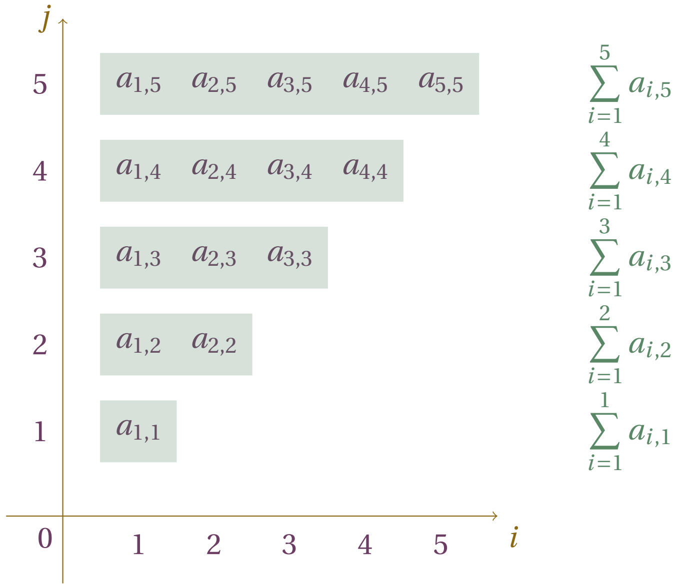
C5.61. ILLUSTRATION DE LA PREMIÈRE FORMULE D'INVERSION

Ci-contre, on considère une famille $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 5}$ et on illustre l'identité :

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i}^{5} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 5} a_{i,j}\ .$$

On commence par sommer les nombres verticalement avant d'additionner toutes les sommes ainsi obtenues.





Ci-contre, on considère toujours une famille

$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 5} a_{i,j}\ .$$

On commence par sommer les nombres horizontalement avant d'additionner toutes les sommes ainsi obtenues.

C5.62. EXERCICE Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{j}$.

C5.63. EXERCICE Soit $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.

C5.64. EXERCICE Soit $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j}$.

C5.65. EXERCICE Soit $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{j-i}$ en fonction de $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

C5.66. PROPOSITION (PRODUIT DE DEUX SOMMES FINIES) Soient I, J des ensembles finis, $(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$ et $(b_j)_{j\in J}\in\mathbb{C}^J$.

$$\boxed{\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j}$$

C5.67. EXERCICE Soient $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$. Démontrer $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j\ .$

C5.68. Exercice Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $((a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$. Prouver $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.

§ 8 Factorielle d'un entier

C5.69. Définition (factorielle d'un entier) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\boxed{n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \geqslant 1\,. \end{cases}}$$

C5.70. Relation de récurrence pour les factorielles Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la factorielle de n notée $n!$ par :

$$\boxed{(n+1)! = (n+1) \times n!\,.}$$

C5.71. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ et $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$.

C5.72. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k = (k+1) - 1$, calculer $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$.

C5.73. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $P_n = \prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ à l'aide de factorielles et de puissances de 2.

C5.74. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$.

§ 9 Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

C5.75. Définition (coefficient binomial) Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on pose :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n \\ \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n\,. \end{cases}}$$

C5.76. Interprétation combinatoire des coefficients binomiaux Nous démontrerons plus tard que, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

C5.77. Triangle de Pascal Les coefficients binomiaux sont usuellement écrits dans un triangle, appelé triangle de Pascal, dont une portion figure ci-dessous.

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$$

C5.78. Proposition (propriétés des coefficients binomiaux)

1. *Symétrie* Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.}$

2. *Relation de Pascal* Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.}$

3. *Valeurs remarquables* Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$:

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

C5.79. Illustration de la relation de Pascal sur le triangle

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

C5.80. Exercice

1. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leqslant k\leqslant n$. Exprimer $k\binom{n}{k}$ en fonction de n et $\binom{n-1}{k-1}$.
2. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $2\leqslant k\leqslant n$. Exprimer $k(k-1)\binom{n}{k}$ en fonction de n et $\binom{n-2}{k-2}$.

C5.81. Exercice

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $k\in[\![0,n-1]\!]$ a-t-on $\binom{n}{k}<\binom{n}{k+1}$?
2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$. Pour quelles valeurs de $\ell\in[\![0,n]\!]$ a-t-on $\binom{n}{\ell}=\binom{n}{k}$?

C5.82. Exercice (formule des colonnes) Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leqslant n$.
Démontrer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$ et illustrer cette propriété sur le triangle de Pascal.

C5.83. Exercice Soient $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}^*$.
À l'aide de la formule des colonnes (C5.82), calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\prod_{p=1}^{m}(k+p)$.

C5.84. Proposition (formule du binôme de Newton) Pour tout $(a,b,n)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{N}$:

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\,.}$$

C5.85. Exercice Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\qquad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\qquad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\qquad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k3^{k-1}\,.$$

C5.86. Linéarisation d'une expression polynomiale en cosinus et sinus

- Une expression polynomiale en cosinus et sinus est une combinaison linéaire de termes de la forme $\cos^n(x)\sin^m(x)$ où $(n,m,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}$.
- Linéariser une expression polynomiale en cosinus et sinus signifie l'écrire comme une combinaison linéaire de termes de la forme $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$ où $(\alpha,\beta,x)\in\mathbb{R}^3$.
- La linéarisation d'une expression polynomiale en cosinus et sinus est un outil précieux pour calculer des primitives.

C5.87. Exercice Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $(1+i)^{4n}$ et en déduire les valeurs des sommes de $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{4n}{2k+1}$.

C5.88. Exercice En utilisant C5.80 calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$.

C5.89. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, en remarquant que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\, \mathrm{d}x$.

C5.90. Exercice

1. Linéariser $\cos^6(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^6(x)$.

C5.91. Exercice

1. Linéariser $\sin^5(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^5(x)$.

C5.92. Exercice Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire $\cos(5x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.

C5.93. Exercice Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire $\sin(6x)$ comme $\sin(x)$ multiplié par un polynôme en $\cos(x)$.