Chapitre n°4

Ensembles et applications

§ 1 Notions d'ensemble, d'appartenance et de sous-ensembles

C4.1. Définition (ensemble et appartenance)

1. Un ensemble E est une collection d'éléments.
2. Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

C4.2. Exemple (ensembles de nombres) Nous connaissons les ensembles de nombres $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels), $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs), $\mathbb{Q}$ (ensemble des nombres rationnels), $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels) et $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes). Nous savons : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (C1.60).

C4.3. Définition (ensemble défini en extension) Si l'on définit un ensemble E en dressant la liste de ses éléments entre accolades, alors l'ensemble E est dit défini en extension.

C4.4. Exemple (ensemble défini par une liste finie d'éléments entre accolades) L'ensemble $E := \left\{1, -2, \frac{13}{7}, \sqrt{2}, e + i\pi\right\}$ est l'ensemble formé des 5 éléments $1, -2, \frac{13}{7}, \sqrt{2}, e + i\pi$. Ainsi $-2 \in E$ et $5 \notin E$.

C4.5. Exemple (ensemble défini par une liste d'éléments dépendant d'un paramètre) L'ensemble E dont les éléments s'écrivent sous la forme $4k$, où $k \in \mathbb{N}$, s'écrit :

$$E := \{4k \;:\; k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Ses éléments sont $0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \ldots, 4236, \ldots$ L'ensemble E est l'ensemble formé des multiples positifs ou nuls de 4.

C4.6. Exercice

1. Décrire l'ensemble $E := \left\{x^2 - 3x + 1 \;:\; x \in \mathbb{R}\right\}$ par une phrase, puis en donner trois éléments.
2. Écrire formellement l'ensemble F dont les éléments s'écrivent formellement sous la forme $\frac{r^2-1}{r^2+1}$, où $r \in \mathbb{Q}$, puis en donner trois éléments.

C4.7. Définition (inclusion, partie, sous-ensemble) Un ensemble E est inclus dans un ensemble F si, tout élément de E est élément de F, i.e. si :

$$\forall\, x \in E \qquad x \in F\,.$$

Dans ce cas on note $E \subset F$ et on dit que E est une partie ou un sous-ensemble de F.

C4.8. Transitivité de l'inclusion Soient E, F, G trois ensembles.

$$(E \subset F \text{ et } F \subset G) \quad \Longrightarrow \quad E \subset F$$

C4.9. Exemple (inclusions d'ensembles) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

C4.10. Négation d'une inclusion entre ensembles Soient E et F des ensembles. Écrire la proposition $\neg(E \subset F)$ à l'aide de quantificateurs.

C4.11. Un schéma rédactionnel d'une démonstration d'inclusion d'ensembles Pour démontrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, on pourra rédiger le début comme suit.

> Soit $x \in E$. Démontrons que $x \in F$.
>
> $\vdots$

Il sera ensuite pertinent de traduire (par une identité par exemple) l'appartenance de x à E et l'appartenance de x à F pour conduire la démonstration.

C4.12. Exemple Soient les ensembles $E := \left\{20k-3\ :\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $F := \{2\ell+1\ :\ \ell \in \mathbb{N}\}$. Démontrer : $E \subset F$ et $F \not\subset E$.

C4.13. Définition (ensemble vide) L'ensemble ne possédant aucun élément est appelé ensemble vide et est noté $\emptyset$.

C4.14. Proposition (L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble) Si E est un ensemble alors $\emptyset \subset E$.

C4.15. Définition (égalité d'ensembles) On dit que deux ensembles E et F sont égaux si $E \subset F$ et $F \subset E$, i.e. :

$$(\forall x \in E \qquad x \in F) \quad \text{et} \quad \left(\forall y \in F \qquad y \in E\right).$$

Dans ce cas, on note $E = F$.

C4.16. Négation d'une égalité entre ensembles Soient E et F des ensembles. Écrire la proposition $\neg(E = F)$ à l'aide de quantificateurs.

C4.17. Un schéma rédactionnel d'une démonstration d'égalité d'ensembles Soit E et F deux ensembles. Pour démontrer que $E = F$, on pourra rédiger le début comme suit.

> $\boxed{\subset}$ Soit $x \in E$. Démontrons que $x \in F$.
>
> $\vdots$
>
> $\boxed{\supset}$ Soit $y \in F$. Démontrons que $y \in E$.
>
> $\vdots$

C4.18. Exercice Soient $E := \{2k+1\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $F := \{3-2\ell\ :\ \ell \in \mathbb{Z}\}$. Démontrer : $E = F$.

C4.19. DÉFINITION (ENSEMBLE DÉFINI EN COMPRÉHENSION) Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat en la variable $x \in E$. L'ensemble des éléments de E qui vérifient le prédicat $P(x)$ est noté :

$$\{x \in E \,:\, P(x)\} \ .$$

Cet ensemble est donc obtenu en sélectionnant certains des éléments de E au moyen du prédicat $P(x)$.

C4.20. EXEMPLE Les ensembles $\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \,:\, z \neq 0\}$, $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ et $\mathbb{U}_7 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^7 = 1\right\}$ sont définis en compréhension.

C4.21. EXERCICE Décrire les ensembles $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_7$ de l'exemple C4.20 en extension.

C4.22. EXERCICE

1. Décrire l'ensemble $E := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0\right\}$ par une phrase, puis en donner une description en extension.
2. Écrire formellement l'ensemble F dont les éléments sont les réels y tels que $\cos(y) = \sin(y)$, puis en donner une description en extension.

C4.23. EXERCICE Soient les ensembles $A := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \sin(x) = 0\}$ et $B := \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Décrire les ensembles A et B par une phrase et préciser leurs modes de définitions (en extension ou en compréhension).
2. Justifier l'égalité ensembliste $A = B$.

§ 2 PRODUIT CARTÉSIEN D'UN NOMBRE FINI D'ENSEMBLES

C4.24. DÉFINITION (n-UPLET) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

1. Un n-uplet est une liste ordonnée (avec répétitions éventuelles) de n éléments entourée de parenthèses, e.g. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Par essence, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux n-uplets, alors :

$$\boxed{(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = y_i \ .}$$

C4.25. DÉFINITION (PRODUIT CARTÉSIEN UN NOMBRE FINI D'ENSEMBLES) Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles. Le produit cartésien $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E_i$, i.e. :

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} E_i := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,:\, \forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad x_i \in E_i\} \ .}$$

C4.26. EXEMPLE Si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$ alors $E \times F = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$.

C4.27. EXERCICE Représenter graphiquement l'ensemble $[-1, 2] \times [3, 4]$.

C4.28. Exercice Soit E un ensemble. Déterminer $\emptyset \times E$ et $E \times \emptyset$.

C4.29. Exercice Décrire l'ensemble $H := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\right\}$ en extension.

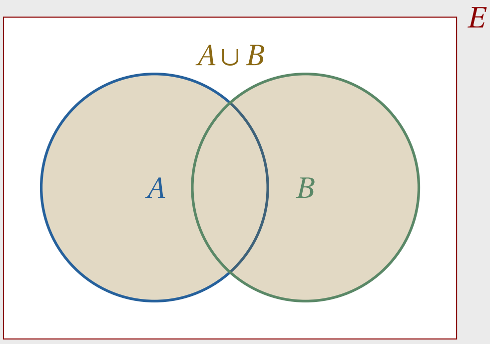
C4.30. Exercice Démontrer que $D_f(0,1) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ n'est pas le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

§ 3 Opérations sur les parties d'un ensemble

C4.31. Définition (Réunion de deux parties d'un ensemble)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. La réunion de A et B est l'ensemble défini par :

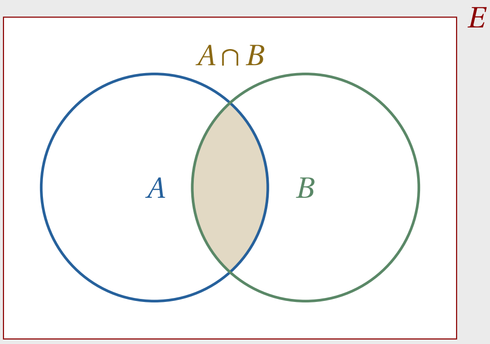
$$\boxed{A \cup B := \{x \in E \ : \ x \in A \text{ ou } x \in B\} \ .}$$



C4.32. Définition (Intersection de deux parties d'un ensemble)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. L'intersection de A et B est l'ensemble défini par :

$$\boxed{A \cap B := \{x \in E \ : \ x \in A \text{ et } x \in B\} \ .}$$

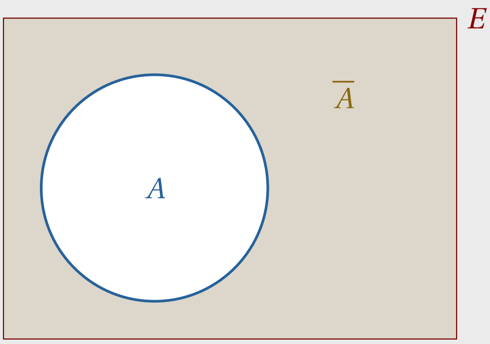


C4.33. Définition (Complémentaire d'une partie d'un ensemble)

Soit A une partie d'un ensemble E. Le complémentaire de A est l'ensemble défini par :

$$\boxed{\overline{A} := \{x \in E \ : \ x \notin A\} \ .}$$

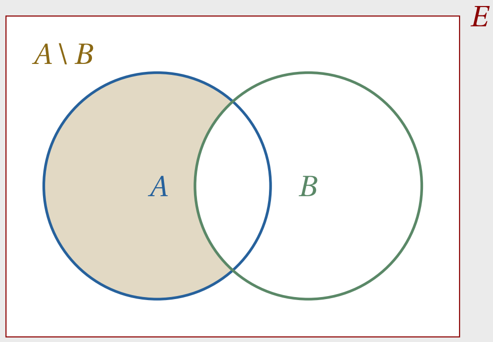
L'ensemble $\overline{A}$ est également noté A^c ou $E \setminus A$.



C4.34. Définition (Différence de deux parties d'un ensemble)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. L'ensemble A privé de B est l'ensemble défini par :

$$\boxed{A \setminus B := \{x \in A \,:\, x \notin B\}\,.}$$



C4.35. Appartenance à un complémentaire, une réunion, une intersection, une différence

Soient A, B deux parties d'un ensemble E.

$$\boxed{\forall\, x \in E \qquad x \in \overline{A} \iff x \notin A}$$

$$\boxed{\forall\, x \in E \qquad x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)}$$

$$\boxed{\forall\, x \in E \qquad x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)}$$

$$\boxed{\forall\, x \in E \qquad x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B)}$$

C4.36. Remarque Si A et B sont deux parties d'un ensemble E alors $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

C4.37. Propriété (Propriétés du complémentaire, de la réunion et de l'intersection)

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

1. *Complémentaire du complémentaire*

$$\boxed{\overline{\overline{A}} = A}$$

2. *Lois de De Morgan*

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad ; \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

3. *Associativité de* $\cup$ *et* $\cap$

$$\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup B) \qquad ; \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$$

4. *Commutativité de* $\cup$ *et* $\cap$

$$\boxed{A \cup B = B \cup A \qquad ; \qquad A \cap B = B \cap A}$$

5. *Distributivité de* $\cup$ *par rapport à* $\cap$

$$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad ; \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)}$$

6. *Distributivité de* $\cap$ *par rapport à* $\cup$

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad ; \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)}$$

Démonstration Ces propriétés sont les versions ensemblistes de celles vérifiées par les opérations logiques $\neg, \vee, \wedge$ (cf. C1.14) via la correspondance entre $\neg$ et le complémentaire, $\vee$ et la réunion, $\wedge$ et l'intersection.

C4.38. Exercice Soient $A := \{z \in \mathbb{C} : |z-1+i| \leqslant 4\}$ et $B := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geqslant -1 \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leqslant 2\}$ deux parties de $\mathbb{C}$. Déterminer $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et représenter graphiquement ces ensembles.

C4.39. Exercice Soient $\Delta_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$ et $\Delta_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)\}$.

1. Justifier $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|\}$.
2. Décrire l'ensemble $\mathbb{U} \cap (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ en extension.

C4.40. Exercice

1. Déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_{18} \cap \mathbb{U}_{30}$.
2. Plus généralement, si $(n, m) \in \mathbb{N}_{\geqslant 2} \times \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, déterminer $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.

C4.41. Exercice Soient E et F deux ensembles. Soient A, C deux parties de E et B, D deux parties de F. Démontrer :

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)\,.$$

C4.42. Exercice Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.
2. Démontrer que, si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ alors $B = C$.
3. Une seule des deux conditions $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ suffit-elle pour avoir $B = C$?

C4.43. Exercice Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue une partie X et E.
2. Résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue une partie X et E.

§ 4 Ensemble des parties d'un ensemble

C4.44. Définition (ensemble des parties d'un ensemble) Soit E un ensemble. L'ensemble formé de toutes les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$, i.e. :

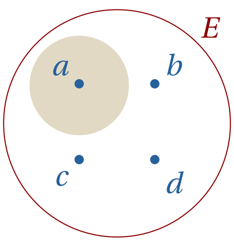
$$\mathscr{P}(E) := \{A : A \subset E\}\,.$$

C4.45. Exemple Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à 4 éléments. Une partie de E possède 0, 1, 2, 3 ou 4 éléments. Pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, nous posons :

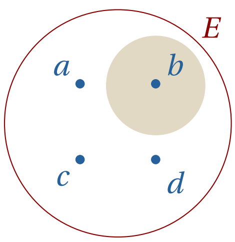
$$\mathscr{P}_k(E) := \left\{A \in \mathscr{P}(E) : A \text{ possède } k \text{ éléments}\right\}\,.$$

Nous avons $\mathscr{P}_0(E) = \{\varnothing\}$ et nous représentons les éléments de $\mathscr{P}_1(E)$, $\mathscr{P}_2(E)$, $\mathscr{P}_3(E)$, et $\mathscr{P}_4(E)$ ci-dessous.

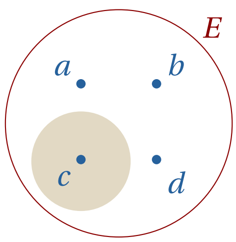
$\{a\} \in \mathscr{P}_1(E)$



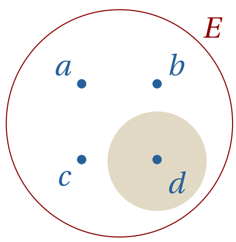
$\{b\} \in \mathscr{P}_1(E)$



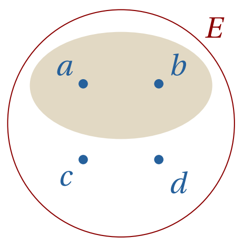
$\{c\} \in \mathscr{P}_1(E)$

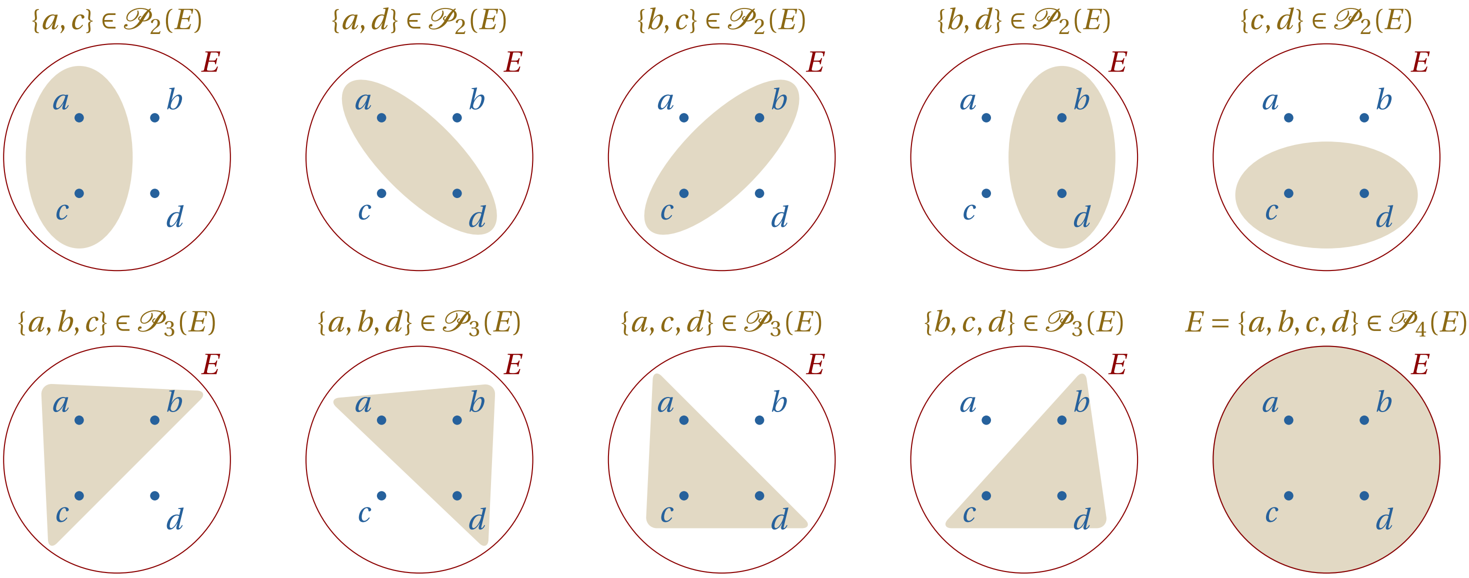


$\{d\} \in \mathscr{P}_1(E)$



$\{a, b\} \in \mathscr{P}_2(E)$





Nous remarquons que :

$\mathscr{P}_0(E)$ possède $1 = \binom{4}{0}$ élément. $\quad$ $\mathscr{P}_1(E)$ possède $4 = \binom{4}{1}$ éléments. $\quad$ $\mathscr{P}_2(E)$ possède $6 = \binom{4}{2}$ éléments.

$\mathscr{P}_3(E)$ possède $4 = \binom{4}{3}$ éléments. $\quad$ $\mathscr{P}_4(E)$ possède $1 = \binom{4}{4}$ élément.

Ainsi, $\mathscr{P}(E)$ possède $\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^k 1^{4-k} = (1+1)^4 = 2^4 = 16$ éléments.

C4.46. Appartenance à un ensemble de parties Soit E un ensemble.

$$\boxed{A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E}$$

On veillera à ne jamais confonde le symbole appartenance $\in$ et le symbole inclusion $\subset$ quand on considérera des éléments ou des ensembles. Il faudra en particulier être vigilant avec des ensembles de parties d'un ensemble, cf. C4.46.

C4.47. Exercice Soient E un ensemble. Nous observons que, si F est une partie de E, alors l'ensemble $\mathscr{P}(F)$ est naturellement un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$ par transitivité de l'inclusion (cf. C4.8). Soient A et B des parties de E.

1. Démontrer $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$.
2. Démontrer $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$. L'inclusion réciproque, $\mathscr{P}(A \cup B) \subset \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ est-elle nécessairement vraie ?

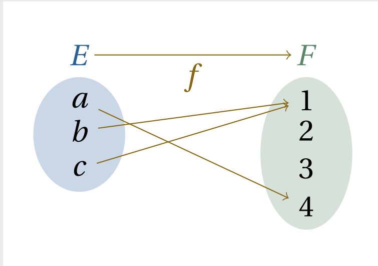
C4.48. Exercice Décrire $\mathscr{P}(\emptyset)$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$.

§ 5 Notion d'application

C4.49. Définition (Application)

Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F associe à chaque élément x de E un unique élément $f(x)$ de F :

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x)\,. \end{array} \right.$$

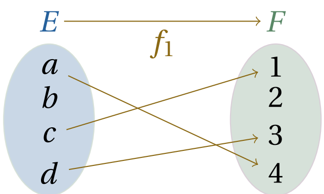


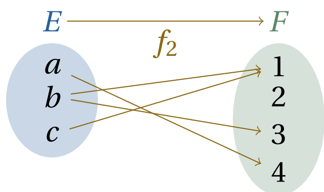
L'ensemble E est appelé ensemble de départ (ou source) de l'application f et l'ensemble F ensemble d'arrivée (ou but).

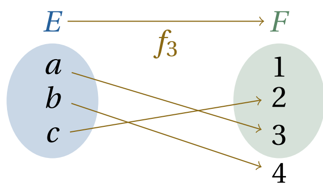
C4.50. Exemple Ci-dessous on donne trois exemples d'applications.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2+7 \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x^2+3\right) \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\{a,b,c,d\}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\{a,d\}) \\ A & \longmapsto & A\cap\{a,d\} \end{array} \right.$$

C4.51. Exercice Justifier que les applications suivantes ne sont pas bien définies.







C4.52. Exemple Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Justifier la réponse.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & x^4-2x^2y^3+y^6 \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & x^2-4x+3 \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & iz-i\overline{z} \end{array} \right.$$

Une application est définie par :
- son ensemble de départ (source) E ;
- son ensemble d'arrivée (but) F ;
- une règle (ou formule parfois) qui assigne à chaque élément x de E un unique élément $f(x)$ de F.

En aucun cas, une application f ne peut être définie par une formule $f(x)=\ldots$

C4.53. Égalité de deux applications Soient des ensembles E_1, E_2, F_1, F_2.
Deux applications $f_1 : E_1 \longrightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F_2$ sont égales si :
(1) $E_1 = E_2$;
(2) $F_1 = F_2$;
(3) pour tout $x \in E_1 = E_2$, $f_1(x) = f_2(x)$.

C4.54. Définition (Image d'un point de la source, antécédent d'un point du but)

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
- L'image d'un élément x de E par f est l'élément $f(x) \in F$.
- Un antécédent d'un élément $y \in F$ par f est un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

C4.55. EXERCICE Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-4x+3\,. \end{array} \right.$$

1. Quelles sont les images de 1, 2 et 3 par f ?
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Étudier les antécédents de y par f, en distinguant plusieurs cas.

C4.56. DÉFINITION (ENSEMBLE D'APPLICATIONS) Soient E et F deux ensembles. L'ensemble formé par toutes les applications de E dans F est noté F^E ou $\mathscr{F}(E,F)$.

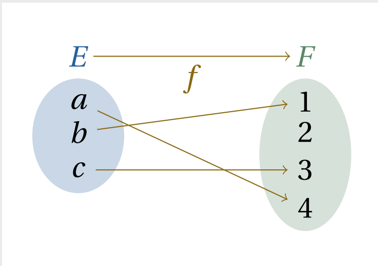
C4.57. EXERCICE Donner un élément de chacun des ensembles $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}$ et $[-1,1]^{\mathbb{R}}$.

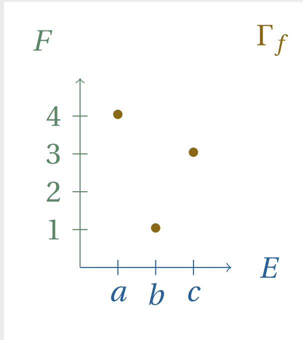
C4.58. DÉFINITION (GRAPHE D'UNE APPLICATION)
Soient E,F deux ensembles et :

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

une application. Le graphe Γ_f de l'application f est la partie de $E\times F$ définie par :

$$\Gamma_f := \left\{(x,f(x)) \;:\; x\in E\right\}.$$





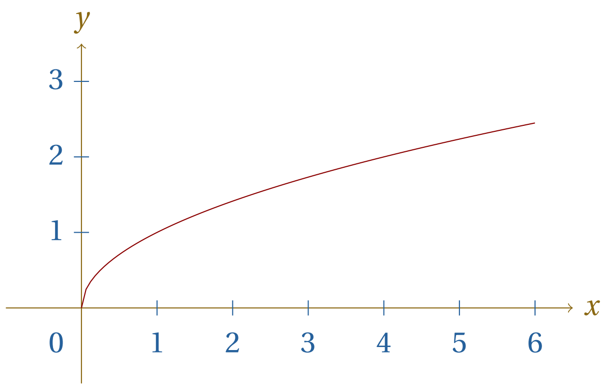
C4.59. EXEMPLE (GRAPHE D'UNE RESTRICTION DE LA FONCTION RACINE CARRÉE)
Le graphe de l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

défini par :

$$\Gamma_f := \left\{\left(x,\sqrt{x}\right) \;:\; x\in[0,6]\right\}$$

est représenté ci-contre.



C4.60. EXERCICE Soit f l'application définie par :

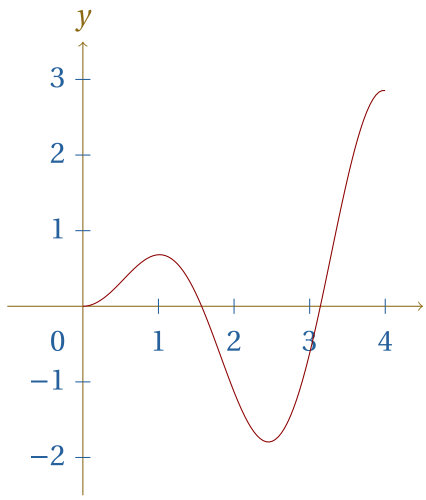
$$f \left| \begin{array}{ccc} [1,10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1\,. \end{array} \right.$$

Les points $(2,5)$, $(7,13)$, $(0,1)$ appartiennent-ils au graphe Γ_f de f ?

C4.61. Exercice

Soit l'application $f\colon [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe est représenté ci-contre.

1. Quelle est la partie entière de $f(2)$?
2. Combien 4 possède-t-il d'antécédents par f ?
3. Combien 2 possède-t-il d'antécédents par f ?
4. Combien 0 possède-t-il d'antécédents par f ?



C4.62. Exercice Soient E, F deux ensembles et $f\colon E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit x un élément de E fixé. Combien d'éléments $y \in F$ vérifient $(x,y) \in \Gamma_f$?
2. Soit y un élément de F fixé. Peut-on énoncer une propriété générale sur l'ensemble des $x \in E$ tel que $(x,y) \in \Gamma_f$? Justifier la réponse, en donnant plusieurs exemples.

§ 6 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

C4.63. Définition (fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble) Soient E un ensemble et A une partie de E. La fonction indicatrice de A est la fonction :

$$\mathbb{1}_A \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{array} \right.$$

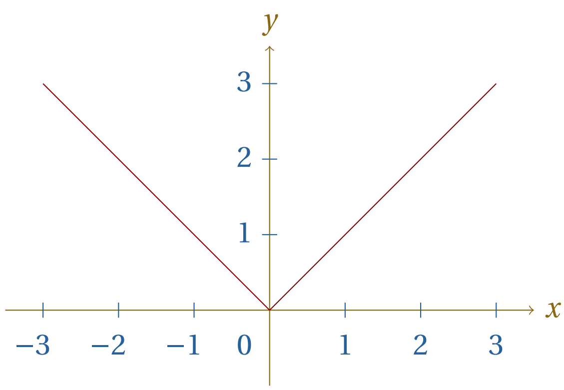
C4.64. Exercice Représenter graphiquement la fonction $\mathbb{1}_{[-1,3]}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$.

C4.65. Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est définie par :

$$|\cdot| \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \max\{-x, x\}. \end{array} \right.$$

Écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ à l'aide de deux indicatrices de parties de $\mathbb{R}$.



C4.66. Exercice (l'indicatrice caractérise la partie) Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Démontrer que $A = B$ si et seulement si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

C4.67. Exercice (indicatrice et opérations sur les parties d'un ensemble) Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Soit $x \in E$.

1. Exprimer $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_A(x)$.
2. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_A(x)$ et $\mathbb{1}_B(x)$.
3. En déduire une expression de $\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_A(x)$ et $\mathbb{1}_B(x)$.

§ 7 Image directe et image réciproque

C4.68. Définition (image directe et image réciproque)
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

(1) Soit A une partie de E. L'image de A par f, notée $f(A)$, est la partie de F formée par les éléments $f(x) \in F$ lorsque x parcourt A :

$$f(A) = \{f(x) \,:\, x \in A\} \subset F\,.$$

Représentation de $f(A)$

(2) Soit B une partie de F. L'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$, est la partie de E formée par les éléments $x \in E$ tels que $f(x) \in B$.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,:\, f(x) \in B\} \subset E\,.$$

Représentation de $f^{-1}(B)$

C4.69. Exercice (détermination d'images directes et d'images réciproques) Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 4x - 4\,. \end{array} \right.$$

Déterminer $f([0,6])$ et $f^{-1}([-4,6])$.

C4.70. Remarque (images réciproques de $\emptyset$ et du but, images directes de $\emptyset$ et de la source)
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \qquad f^{-1}(F) = E \qquad f(\emptyset) = \emptyset$$

mais $f(E)$ n'est pas nécessairement égal à F, comme le montre l'exemple de l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} E := \{0,1\} & \longrightarrow & F := \{2,3\} \\ x & \longmapsto & 2 \end{array} \right.$$

pour laquelle $f(E) = \{2\} \neq F$.

C4.71. Propriétés (des images directes et des images réciproques)
Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. $\forall\, (A_1, A_2) \in \mathscr{P}(E)^2 \quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $\forall\, (B_1, B_2) \in \mathscr{P}(F)^2 \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ et $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
3. $\forall\, B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$
4. $f^{-1}(f(E)) = E$

C4.72. Exercice Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soient A_1, A_2 deux parties de E. Démontrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ mais que cette inclusion n'est pas nécessairement une égalité.
2. Démontrer que $f\left(f^{-1}(F)\right) \subset F$ mais que cette inclusion n'est pas nécessairement une égalité.

§ 8 Famille d'éléments d'un ensemble

C4.73. Définition (famille d'éléments d'un ensemble) Soient I et E deux ensembles.

1. Une famille d'éléments de E indexée par I est une application :

$$x \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$$

   que l'on notera plus simplement $(x_i)_{i\in I}$.
2. L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I est noté E^I.

C4.74. Exemple Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$ est aussi appelée « suite réelle indexée par $\mathbb{N}$ ».

C4.75. Définition (réunion et intersection d'une famille de parties)
Soient I, E des ensembles et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

(1) La réunion de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est :

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \in E : \exists\, i \in I \quad x \in A_i\}.$$

Diagramme de Venn

(2) L'intersection de la famille $(A_i)_{i\in I}$ est :

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \in E : \forall\, i \in I \quad x \in A_i\}.$$

Diagramme de Venn

C4.76. Propriétés (des opérations sur les familles d'ensembles) Soient E, I, J des ensembles.
On considère deux familles $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ de parties de E.

1. *Lois de De Morgan*

$$\boxed{\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$$

2. *Distributivités*

$$\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j \qquad \text{et} \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j}$$

C4.77. Exercice Soit E un ensemble. Justifier $\displaystyle\bigcup_{x\in E} \{x\} = E$.

C4.78. Exercice L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien, i.e. :

$$(\star) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \qquad x < N.$$

Démontrer $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \left]0, 1\right]$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$ à l'aide de la propriété $(\star)$.

§ 9 Composition d'applications

C4.79. Définition (composée de deux applications) Soient E, F, G des ensembles et $f: E \longrightarrow F$, $g: F \longrightarrow G$ des applications. La composée des applications f et g est l'application :

$$g \circ f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \,. \end{array} \right.$$

Nous représenterons souvent l'application $g \circ f$ à l'aide d'un diagramme comme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Avant de considérer la composée $g \circ f$ de deux applications f et g, nous aurons toujours le souci de vérifier qu'elle est bien définie, i.e que le but de f coïncide avec la source de g.

C4.80. Exercice (la composition n'est pas commutative) Soient les deux applications :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \,. \end{array} \right.$$

Justifier que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, puis les calculer. Commenter.

C4.81. Remarque (la composition est associative) Soient E, F, G, H des ensembles et $f: E \longrightarrow F$, $g: F \longrightarrow G$, $h: G \longrightarrow H$ des applications. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend right=50, "h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & g \arrow[r, "h"] & h \end{tikzcd}$$

On note donc simplement $h \circ g \circ g$ l'application $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

C4.82. Définition (restriction et corestriction d'une application) Soient E, F des ensembles et $f: E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit A une partie de E. La restriction de f à A est l'application :

$$f_{|A} \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \,. \end{array} \right.$$

2. Soit B une partie de F telle que $f(E) \subset B$. La corestriction de f à B est l'application :

$$f^{|B} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \,. \end{array} \right.$$

C4.83. Exercice (Décomposition d'une fonction homographique)

1. Soit la fonction homographique :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+14}{x-2} \end{array} \right. .$$

   Justifier que la fonction f est bien définie et l'écrire comme la composée $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ de trois applications f_1, f_2, f_3 où :
   - f_1 qui est une restriction et corestriction de fonction affine ;
   - f_2 qui est la fonction inverse ;
   - f_3 qui est une restriction et corestriction de fonction affine.
2. Généraliser le résultat à toute fonction homographique (quotient de deux fonctions affines).

C4.84. Définition (Application identité d'un ensemble) Soit E un ensemble. L'application identité de E est :

$$\mathrm{id}_E \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$

C4.85. Effet d'une composition par l'application identité Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

$$\boxed{f \circ \mathrm{id}_E = f \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_F \circ g = g\,.}$$

C4.86. Exercice (Inversibilité et inverse d'une similitude directe) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on définit la similitude directe $f_{a,b}$ par :

$$f_{a,b} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array} \right. .$$

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Démontrer qu'il existe un unique couple $(c,d) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que :

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \qquad \text{et} \qquad f_{c,d} \circ f_{a,b} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\ .$$

2. Proposer une solution géométrique de Q1, en utilisant l'interprétation géométrique d'une simititude (cf. C3.171). On considérera d'abord le cas $a = 1$, puis le cas $a \neq 1$.

C4.87. Exercice (Propriété universelle du produit cartésien) Soient E, F_1, F_2 des ensembles. Nous définissons les projections canoniques π_1 et π_2 par :

$$\pi_1 \left| \begin{array}{ccc} F_1 \times F_2 & \longrightarrow & F_1 \\ (y_1,y_2) & \longmapsto & y_1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \pi_2 \left| \begin{array}{ccc} F_1 \times F_2 & \longrightarrow & F_2 \\ (y_1,y_2) & \longmapsto & y_2 \end{array} \right. .$$

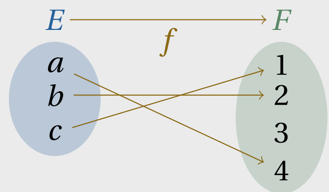
Démontrer que pour tout $f \in (F_1 \times F_2)^E$ il existe un unique $f_1 \in F^{E_1}$ et un unique $f_2 \in F^{E_2}$ tels que :

$$f_1 = \pi_1 \circ f \qquad \text{et} \qquad f_2 = \pi_2 \circ f\,.$$

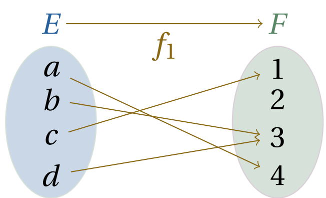
§ 10 Injection et surjection

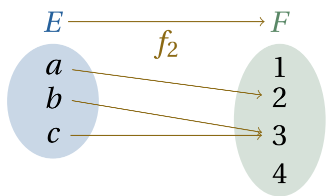
C4.88. Définition (application injective) Soient E, F des ensembles et $f: E \longrightarrow F$ une application. L'application f est <u>injective</u>, et l'on note $f: E \hookrightarrow F$, si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

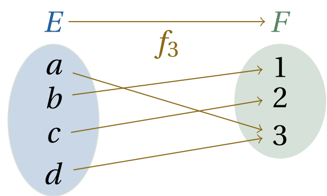
(a) $\forall (x_1, x_2) \in E^2 \qquad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
(b) Tout élément de F possède au plus un antécédent par f dans E.
(c) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E possède au plus une solution.



C4.89. Exercice Les applications suivantes sont-elles injectives ?







C4.90. Un schéma rédactionnel d'une démonstration d'injectivité Soient E, F des ensembles et $f: E \longrightarrow F$ une application. Pour démontrer que f est injective, on pourra rédiger le début comme suit.

> Soient x_1, x_2 deux éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Démontrons que $x_1 = x_2$.
>
> $\vdots$

C4.91. Exercice Les applications suivantes sont-elles injectives ?

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x + 2 \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x + 2 \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 \end{array} \right.$$

C4.92. Exercice Soient E, F des ensembles et $f: E \longrightarrow F$ une application.

1. Que dire de l'application f si elle vérifie la propriété suivante ?

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 \qquad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

2. Que dire de l'application f si elle vérifie la propriété suivante ?

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2 \qquad x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)\,.$$

C4.93. Exercice (injectivité et stricte monotonie)

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, i.e. telle que :
$$\forall (x_1, x_2) \in A^2 \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
Démontrer que f est injective.
2. Donner une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante, i.e. telle que :
$$\forall (x_1, x_2) \in A^2 \qquad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$
mais non injective.
3. Donner une fonction $g\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est injective, mais non strictement monotone sur $\mathbb{R}^*$.

C4.94. Exercice Soient les applications :
$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z. \end{array} \right.$$
Démontrer que l'application f_1 est injective et que l'application f_2 n'est pas injective.

C4.95. Exercice Soient E, F des ensembles et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Démontrer que f est injective si et seulement si :
$$\forall (A_1, A_2) \in \mathscr{P}(E)^2 \qquad f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

C4.96. Proposition (injectivité et inversibilité à gauche)
Soient E, F des ensembles non vides et $f\colon E \longrightarrow F$ une application.
$$\boxed{f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\exists g \in \mathscr{F}(F, E) \quad g \circ f = \mathrm{id}_E\right)}$$

C4.97. Remarque Soient les applications :
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array} \right.$$

1. Justifier $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}$.
2. Les fonctions $f \circ g$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ sont-elles égales ?

C4.98. Proposition (composition et injectivité)
Soient E, F, G des ensembles et $f\colon E \longrightarrow F$, $g\colon F \longrightarrow G$ des applications.

1. $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont injectives} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \text{ est injective}}$
2. $\boxed{g \circ f \text{ est injective} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est injective}}$

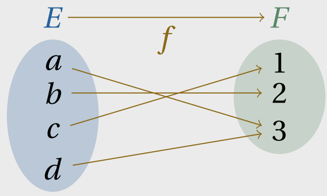
C4.99. Exercice Donner, à l'aide de diagrammes de Venn, des ensembles E, F, G et une application $f\colon E \longrightarrow F$ et une application $g\colon F \longrightarrow G$ non injective, telles que $g \circ f$ est injective.

C4.100. Définition (application surjective) Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application f est surjective, et l'on note $f : E \twoheadrightarrow F$, si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

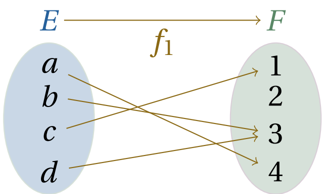
(a) $\forall\, y \in F \quad \exists\, x \in E \qquad f(x) = y$

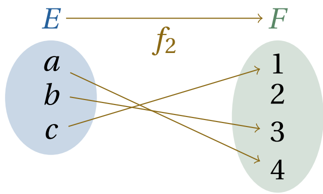
(b) Tout élément de F possède au moins un antécédent par f dans E.

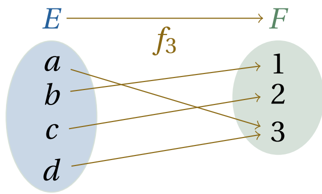
(c) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E possède au moins une solution.



C4.101. Exercice Les applications suivantes sont-elles surjectives ?







C4.102. Un schéma rédactionnel d'une démonstration de surjectivité Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour démontrer que f est surjectivité, on pourra rédiger le début comme suit.

> Soit $y \in F$. Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
>
> $\vdots$

C4.103. Exercice Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x^2+4x+4 \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [3, +\infty[\\ x & \longmapsto & 4x^2+4x+4 \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 4z^2+4z+4 \end{array} \right.$$

C4.104. Exercice Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Que dire d'une application f vérifiant $f(E) = F$?

C4.105. Exercice Soient les applications :

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right. .$$

Justifier que l'application f_1 n'est pas surjective et que l'application f_2 est surjective.

C4.106. Proposition (surjectivité et inversibilité à droite)
Soient E, F des ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$\boxed{f \text{ est surjective} \iff \left(\exists\, g \in \mathscr{F}(F, E) \quad f \circ g = \mathrm{id}_F\right)}$$

C4.107. Exercice Soient E, F des ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ des applications telles que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Que dire des applications f et g ?

C4.108. PROPOSITION (COMPOSITION ET SURJECTIVITÉ)
Soient E, F, G des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications.

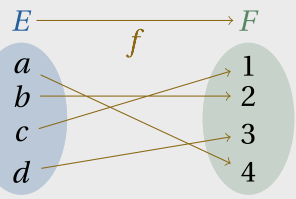
1. $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont surjectives} \implies g \circ f \text{ est surjective}}$
2. $\boxed{g \circ f \text{ est surjective} \implies g \text{ est surjective}}$

C4.109. EXERCICE Donner, à l'aide de diagrammes de Venn, des ensembles E, F, G et une application $f : E \longrightarrow F$ non surjective et une application $g : F \longrightarrow G$, telles que $g \circ f$ est surjective.

§ 11 BIJECTION

C4.110. DÉFINITION (APPLICATION BIJECTIVE) Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application f est <u>bijective</u>, et l'on note $f : E \xrightarrow{\sim} F$, si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

(a) L'application f est injective et surjective.
(b) $\forall\, y \in F \quad \exists!\, x \in E \qquad f(x) = y$
(c) Tout élément de F possède un unique antécédent par f dans E.
(d) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E possède une unique une solution.



C4.111. EXERCICE Dresser la liste de toutes les applications bijectives de l'ensemble $E := \{a, b, c\}$ dans l'ensemble $F := \{1, 2, 3\}$.

C4.112. EXERCICE Les applications suivantes sont-elles bijectives ?

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x-3}{1-x} \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, 5] & \longrightarrow & [2, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 - 10x + 27 \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

C4.113. DÉFINITION (INVERSIBILITÉ ET RÉCIPROQUE D'UNE APPLICATION) Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. L'application f est <u>inversible</u> s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que :
$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F\ .$$
2. Si f est inversible, l'application g introduite en 1 est unique. Elle est notée f^{-1} et est appelée <u>application réciproque de f</u>.

Si f est une application, on ne peut considérer sa réciproque f^{-1} qu'après avoir établi l'inversibilité de f.

C4.114. Définition (bijectivité et inversibilité) Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. L'application f est inversible si et seulement si elle est bijective.
2. Si f est bijective alors son application réciproque est l'application :

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } f(x) = y. \end{array} \right.$$

C4.115. Exercice Dans l'exercice C4.112 nous avons établi la bijectivité de l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, 5] & \longrightarrow & [2, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 - 10x + 27 \end{array} \right.$$

Expliciter sa réciproque f^{-1}.

C4.116. Exercice Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 5 - 13z \end{array} \right.$$

est bijective et calculer son application réciproque.

C4.117. Exercice Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{1-x} \end{array} \right.$$

est bijective et calculer son application réciproque.

C4.118. Exercice Démontrer que l'application :

$$\mathrm{sh} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

est bijective et calculer son application réciproque.

C4.119. Exercice Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

bien définie, bijective et calculer son application réciproque.

C4.120. Exercice Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, 1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array} \right.$$

bien définie, bijective et calculer son application réciproque.

C4.121. EXERCICE Soient E, F des ensembles et $f\colon E \longrightarrow F$ une application bijective.

1. Que valent les applications $f \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ f$?
2. Justifier que f^{-1} est bijective et expliciter $\left(f^{-1}\right)^{-1}$.

C4.122. PROPOSITION (COMPOSITION ET BIJECTIVITÉ)
Soient E, F, G des ensembles et $f\colon E \longrightarrow F$, $g\colon F \longrightarrow G$ des applications.

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont bijectives} \quad \Longrightarrow \quad \left(g \circ f \text{ est bijective et } (g\circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\right)}$$

C4.123. EXERCICE Soient E, F, G des ensembles et $f\colon E \longrightarrow F$, $g\colon F \longrightarrow G$ des applications telles que $g \circ f$ est bijective.

1. Que dire des applications f et g ?
2. Les applications f et g sont-elles nécessairement bijectives ?

C4.124. REMARQUE Soient E, F des ensembles et $f\colon E \longrightarrow F$ une application bijective. Soit B une partie de F. Notons :

- A_1 l'image réciproque de B par f ;
- A_2 l'image directe de B par f^{-1}.

Alors $A_1 = A_2$ et donc la notation $f^{-1}(B)$ est non ambiguë.

Si E, F sont des ensembles, si $f\colon E \longrightarrow F$ est une application non bijective alors $f^{-1}(B)$ <u>n'est pas $\{f^{-1}(y) \,:\, y \in B\}$ puisque l'application f^{-1} n'est pas définie.</u> En effet, f n'est pas inversible.

C4.125. EXERCICE Soient A, B, C, D des ensembles et $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$, $h\colon C \longrightarrow D$ des applications.

1. Démontrer que les applications $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si les applications f, g, h sont bijectives.
2. On suppose que les applications f, g, h sont bijectives. Expliciter la réciproque de l'application $h \circ g \circ f$ à l'aide des applications réciproques de f, g, h.