Chapitre n°3

Nombres complexes

C3.1. Objectifs

1. Définir un ensemble de nombres $\mathbb{C}$ munis d'opérations qui lui confère la strucure de corps.
2. Développer la technique calculatoire dans le corps $\mathbb{C}$.
3. Résoudre des équations algébriques dans $\mathbb{C}$.
4. Donner une interprétation géométriques des nombres complexes qui livre un dictionnaire entre $\mathbb{C}$ et le plan.
5. Étudier des problèmes de géométrie plane grâce aux nombres complexes.
6. Définir une exponentielle complexe.
7. Étudier des problèmes de trigonométrie grâce à l'exponentielle complexe.

§ 1 L'ensemble des nombres complexes

C3.2. Définition (nombre complexe)

1. *Existence* Un nombre complexe est un « nombre » qui s'écrit sous la forme $a+ib$, où a et b sont des nombres réels.
2. *Unicité* Soient des réels a_1, b_1, a_2, b_2. Alors :
$$a_1+ib_1 = a_2+ib_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_1=a_2 \text{ et } b_1=b_2)\ .$$
3. *Forme algébrique* D'après 1. et 2., tout nombre complexe z s'écrit d'une unique manière sous la forme $z=a+ib$, où a et b sont des nombres réels. Cette écriture de z est appelée forme algébrique de z.

C3.3. Remarque

1. Si $a \in \mathbb{R}$, alors le nombre complexe $a+i0$ est simplement noté a.
2. Si $b \in \mathbb{R}$, alors le nombre complexe $0+ib$ est simplement noté ib.

C3.4. Exemple Les nombres $1+i$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $7i$ et $\ln(2)+i\pi$ sont des nombres complexes.

C3.5. Notation (ensemble des nombres complexes) L'ensemble formé par tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$:
$$\mathbb{C} := \{a+ib \ :\ a\in\mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}\ .$$
D'après C3.3, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

C3.6. Exercice (l'inclusion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est stricte) Justifier qu'il existe des nombres complexes non réels, grâce à l'unicité dans C3.2.

C3.7. Définition (partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition, il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.

1. *Partie réelle* Le nombre réel a est appelé partie réelle de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$.
2. *Partie imaginaire* Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathrm{Im}(z)$.

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R} \qquad z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z).}$$

C3.8. Exemple $\mathrm{Re}(7+13i) = 7$ et $\mathrm{Re}(7+13i) = 13$.

C3.9. Définition (imaginaire pur) Un nombre complexe est appelé imaginaire pur s'il s'écrit sous la forme ib où b est un nombre réel.

C3.10. Notation (ensemble des nombres imaginaires purs) L'ensemble formé par tous nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$:

$$i\mathbb{R} := \{ib \,:\, b \in \mathbb{R}\}\ .$$

D'après C3.3, $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

C3.11. Proposition (caractérisations des nombres réels et des nombres imaginaires purs) Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. *Caractérisation des réels*

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0}$$

2. *Caractérisation des imaginaires purs*

$$\boxed{z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0}$$

§ 2 Opérations sur les complexes

C3.12. Définition (addition et multiplication dans $\mathbb{C}$) Si z_1 et z_2 sont de formes algébriques $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ où a_1, b_1, a_2, b_2 sont réels alors on pose :

$$\boxed{z_1 + z_2 = \underbrace{(a_1+a_2)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(b_1+b_2)}_{\in\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad z_1 \times z_2 = \underbrace{(a_1a_2 - b_1b_2)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(a_1b_2 + b_1a_2)}_{\in\mathbb{R}}}$$

Le nombre complexe $z_1 \times z_2$ sera noté z_1z_2.

C3.13. Exercice Posons $z_1 = 2-3i$ et $z_2 = -1+5i$. Calculer $i^2 = i \times i$, $z_1 + z_2$ et z_1z_2 à l'aide de la définition C3.12

C3.14. PROPRIÉTÉS (DE L'ADDITION ET DE LA MULTIPLICATION DANS $\mathbb{C}$) Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes.

1. *Propriétés de l'addition*
   (a) *L'addition est associative*
   $$\boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \forall z_3 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)}$$
   On peut donc se passer des parenthèses quand on calcule la somme de plusieurs nombres complexes.
   (b) *L'addition possède un élément neutre (le nombre* 0*)*
   $$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \qquad z + 0 = 0 + z = z}$$
   (c) *Tout nombre complexe possède un opposé*
   $$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists!\, z' \in \mathbb{C} \qquad z + z' = z' + z = 0}$$
   Si z est un nombre complexe, l'unique nombre complexe z' introduit ci-dessus est noté $-z$ et est appelé opposé de z. En outre $\boxed{-z = -\mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)\ .}$
   (d) *L'addition est commutative*
   $$\boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \qquad z_1 + z_2 = z_2 + z_1}$$
2. *Propriétés de la multiplication*
   (a) *La multiplication est associative*
   $$\boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \forall z_3 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)}$$
   On peut donc se passer des parenthèses quand on calcule le produit de plusieurs nombres complexes.
   (b) *La multiplication possède un élément neutre (le nombre* 1*)*
   $$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \qquad z \times 1 = 1 \times z = z}$$
   (c) *La multiplication est commutative*
   $$\boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \qquad z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1}$$
3. *Propriétés mixtes*
   (a) *Distributivité à gauche*
   $$\boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \forall z_3 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2) \times z_3 = z_1 \times z_3 + z_2 \times z_3}$$
   (b) *Distributivité à droite*
   $$\boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \forall z_3 \in \mathbb{C} \qquad z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3}$$

C3.15. Remarque (Cohérence entre la notation sous forme algébrique et les opérations)

1. Si b est un nombre réel, alors ib est bien une multiplication (notation non ambiguë). C'est la multiplication de $i = 0 + i1$ par le réel $b = b + i0$.
2. Si a et b sont deux nombres réels, alors la notation $a + ib$ est bien une addition (notation non ambiguë). C'est la somme du réel $a = a + i0$ et de l'imaginaire pur $ib = 0 + ib$.

C3.16. Remarque (Opposé versus multiplication par -1) Si $z \in \mathbb{C}$ alors l'opposé de z, noté $-z$, coïncide avec le complexe $(-1) \times z$.

C3.17. Méthode pratique pour calculer dans $\mathbb{C}$ Les règles de calcul pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, excepté qu'une nouvelle :

$$\boxed{i \times i = -1 \ .}$$

est ajoutée.

C3.18. Exercice Soient $z_1 = 7 - 3i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}i$. Calculer :

$$z_1 + z_2 \qquad z_1 z_2 \qquad z_1^4 := z_1 \times z_1 \times z_1 \times z_1$$

à l'aide des propriétés C3.14.

C3.19. Proposition (Identités remarquables dans $\mathbb{C}$) Si z est un nombre complexe, alors on pose $z^2 := z \times z$.

1. $\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2.$
2. $\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2.$
3. $\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2.$

C3.20. Proposition-Définition (Nombre complexe inversible et inverse d'un tel]) Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. On dit que z est inversible (pour la multiplication) s'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z \times z' = z' \times z = 1$.
2. Si z est inversible, alors le nombre complexe z' tel que $z \times z' = z' \times z = 1$ est unique. On l'appelle inverse de z et on le note z^{-1} ou $\frac{1}{z}$.

C3.21. Exercice Démontrer que $z = 1 + 2i$ est inversible et donner son inverse.

C3.22. Remarque Le nombre 0 n'est pas inversible.

C3.23. Proposition (Inversibilité et inverse d'un nombre complexe non nul) Soit z un nombre complexe non nul. On introduit la forme algébrique $z = a + ib$ de z, où a et b sont des réels.

1. z est inversible.
2. $z^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$

C3.24. Exercice Calculer l'inverse des nombres complexes suivants.

$$z_1 = 2 - 5i \qquad z_2 = i \qquad z_3 = \frac{7}{3} - \frac{2}{5}i \qquad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

C3.25. NOTATION FRACTIONNAIRE Si $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors on pose :

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} := z_1 \times \frac{1}{z_2}\,.}$$

C3.26. EXERCICE Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{1-3i}{1+2i}$.

C3.27. PROPOSITION ($\mathbb{C}$ EST INTÈGRE)

$$\forall\,(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad z_1 z_2 = 0 \Longrightarrow (\,z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0\,)$$

C3.28. EXERCICE (RÉSOLUTION GUIDÉE D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE)

1. Calculer $(2-3i)^2$.
2. Résoudre l'équation :

$$(E) \qquad (1+i)\,z^2 - 7 + 17i = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

C3.29. NOTATION (PUISSANCE D'UN NOMBRE COMPLEXE) Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$z^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0\,; \\ \underbrace{z \times \ldots \times z}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \geqslant 1\,; \\ \underbrace{z^{-1} \times \ldots \times z^{-1}}_{-n \text{ fois}} & \text{si } n \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Cette notation puissance possède les propriétés suivantes.

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) & \forall\, z \in \mathbb{C}^* & \forall\,(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 & z^{n_1}\, z^{n_2} = z^{n_1+n_2} \\ (2) & \forall\, z \in \mathbb{C}^* & \forall\,(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 & (z^{n_1})^{n_2} = z^{n_1 \times n_2} \\ (3) & \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \forall\, n \in \mathbb{Z} & (z_1 z_2)^n = z_1^n\, z_2^n \end{array}}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $0^n = 0$. Enfin, on adopte la convention suivante : $0^0 = 1$.

C3.30. EXERCICE (CALCULS DE PUISSANCES) Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $z_1^2, z_1^4, z_2^3, z_2^6$.

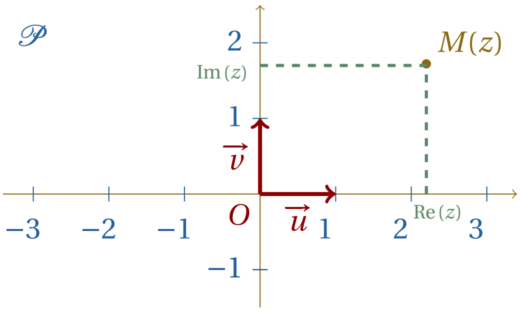
§ 3 Représentation géométrique des nombres complexes

C3.31. Notation On fixe, pour toute la suite de ce chapitre, un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ du plan usuel $\mathscr{P}$.

C3.32. Définition (point du plan $\mathscr{P}$ associé à un nombre complexe)

On associe à un nombre complexe z le point $M(z)$ du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z))$ dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$. Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{OM(z)} = \mathrm{Re}\,(z)\ \overrightarrow{u} + \mathrm{Im}\,(z)\ \overrightarrow{v}\ .}$$



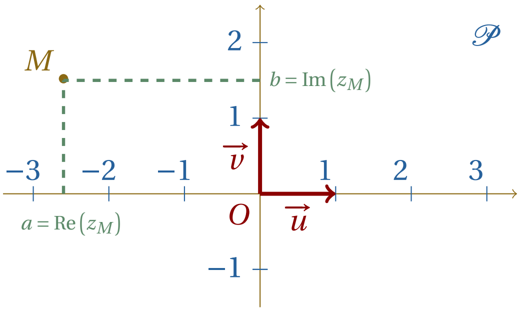
C3.33. Exercice Placer les points du plan $\mathscr{P}$ associés aux nombres complexes $3-2i$, $-1+\dfrac{7}{2}i$, 4 et $-2i$.

C3.34. Définition (affixe d'un point du plan $\mathscr{P}$)

Soit M un point du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées (a,b) dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$. On lui associe le nombre complexe :

$$\boxed{z_M = a+ib}$$

appelé <u>affixe du point M</u>.



C3.35. Exercice Soit $z \in \mathbb{C}$. Quelle est l'affixe du point $M(z)$ du plan $\mathscr{P}$?

C3.36. Identification de $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathscr{P}$ Grâce à C3.32 et C3.37, nous définissons deux applications :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ z & \longmapsto & M(z) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M & \longmapsto & z_M \end{array}\right.$$

qui sont inverses l'une de l'autre :

$$\left(\forall z \in \mathbb{C} \quad z_{M(z)} = z\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\forall M \in \mathscr{P} \quad M\left(z_M\right) = M\right)\ .$$

Ces deux constructions initient la construction d'un dictionnaire qui va nous permettre :

- de donner une interprétation géométrique à des concepts/résultats issus du monde des nombres complexes ;
- d'appliquer les résultats sur les nombres complexes à la résolution de problèmes de géométrie plane.

En fin de chapitre, nous dresserons une synthèse de la correspondance :

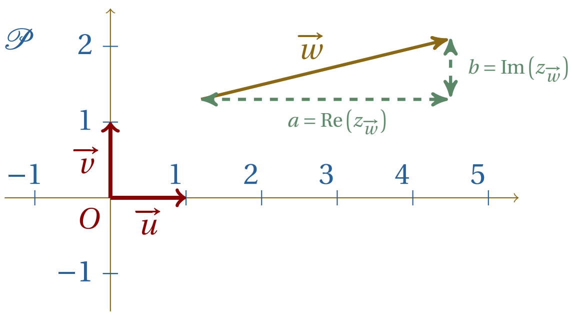
$$\boxed{\text{Nombres complexes} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Géométrie plane}\ .}$$

C3.37. Définition (affixe d'un vecteur du plan $\mathscr{P}$)

Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées (a,b) dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$. On lui associe le nombre complexe :

$$\boxed{z_{\overrightarrow{w}} = a+ib}$$

appelé <u>affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$</u>.



C3.38. Proposition (Affixe d'un bipoint) Soient A et B des points du plan $\mathscr{P}$. Les affixes z_A, z_B des points A, B et l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont liées par la relation :

$$\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \,.}$$

§ 4 Conjugaison

C3.39. Définition (Conjugué d'un nombre complexe) Le <u>conjugué</u> d'un nombre complexe z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

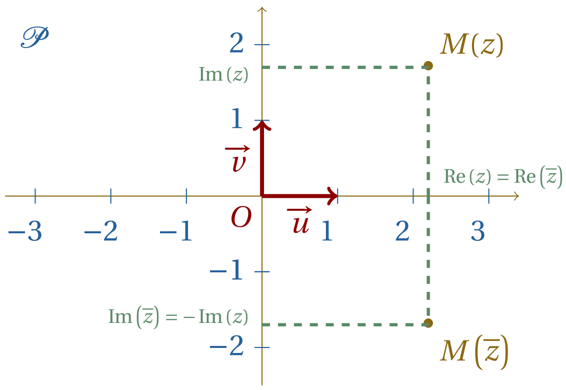
$$\boxed{\overline{z} := \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z).}$$

C3.40. Interprétation géométrique de la conjugaison

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$M(\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses

qui est aussi l'axe des réels.



C3.41. Exercice Calculer les conjugués des nombres complexes $2+i$, $-i$, 3 et $\dfrac{1-i}{1+2i}$.

C3.42. Propositions (algébriques de la conjugaison complexe)

1. *Caractère involutif* $\quad \boxed{\forall z \in \mathbb{C} \qquad \overline{\overline{z}} = z}$
2. *Additivité* $\quad \boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$
3. *Multiplicativité* $\quad \boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \qquad \overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}}$
4. *Conjugué d'un inverse* $\quad \boxed{\forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$
5. *Conjugué d'un quotient* $\quad \boxed{\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C}^* \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$

C3.43. Exercice Calculer de nouveau (cf. C3.41) le conjugué de $\frac{1-i}{1+2i}$, mais en utilisant la proposition C3.42.

C3.44. Exercice Donner une propriété remarquable du complexe $z = \frac{2-i}{1+i} - \frac{2+i}{1-i}$, sans calculer sa forme algébrique.

C3.45. Remarque (Partie réelle, partie imaginaire et conjugué)

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

C3.46. Remarque (Nombre réel, imaginaire pur et conjugué)

$$\left(\forall z \in \mathbb{C} \qquad z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z\right) \quad \text{et} \quad \left(\forall z \in \mathbb{C} \qquad z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z\right).$$

§ 5 Module

C3.47. Rappel sur la racine carrée d'un nombre réel positif ou nul

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\text{il existe un unique } r \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } r^2 = x.$$

  Ce nombre r est appelé racine carrée de x et est noté $\sqrt{x}$.
- La racine carrée est multiplicative :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \qquad \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\,.$$

C3.48. Définition (module d'un nombre complexe) Le module d'un nombre complexe z est le nombre réel positif ou nul, noté $|z|$, défini par :

$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2}.$$

C3.49. Exercice Calculer le module de $-2+6i$.

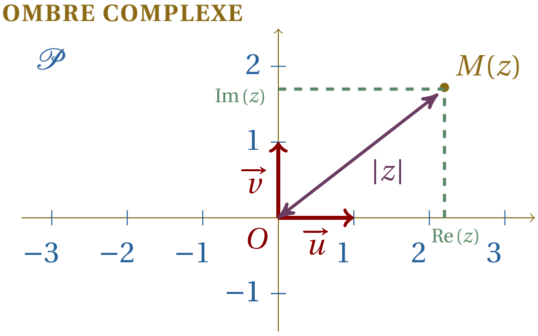
C3.50. Module versus valeur absolue d'un nombre réel Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors le module de a, vu comme un nombre complexe, est égal à la valeur absolue de a.

C3.51. Le module d'un complexe est égal à celui de son conjugué Si $z \in \mathbb{C}$, alors $|z| = |\overline{z}|$.

C3.52. Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

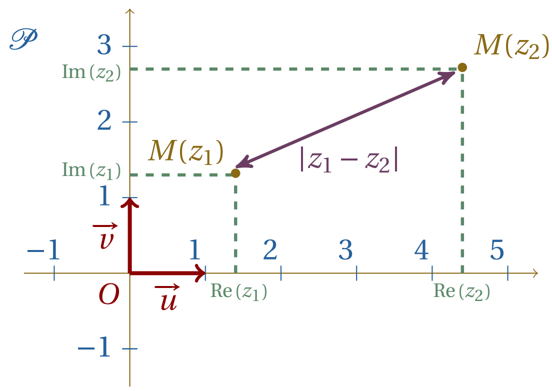
$$|z| = OM(z).$$



C3.53. Interprétation géométrique du module de la différence de deux nombres complexes

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\boxed{|z_1 - z_2| = M(z_1)M(z_2).}$$



C3.54. Proposition (carré du module et conjugaison)

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \qquad z\overline{z} = |z|^2 \ .}$$

C3.55. Proposition (inverse d'un nombre complexe non nul, conjugaison et module)

La forme algébrique d'un nombre complexe non nul z admet une expression à l'aide du conjugué et du module de z. Précisément :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \ .}$$

C3.56. Exercice (calcul de la forme algébrique d'un inverse)

Calculer la forme algébrique de $\dfrac{1}{-2+6i}$ à l'aide de C3.55.

C3.57. Proposition (propriétés algébriques du module)

1. *Module d'un produit* $\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|}$
2. *Module d'un inverse* $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}}$
3. *Module d'un quotient* $\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$

C3.58. Exercice (calcul du module d'un quotient)

Calculer le module de $\dfrac{(1+i)(2-3i)}{(1-3i)(-1+4i))}$ à l'aide de C3.57.

C3.59. Exercice (le module n'est pas additif)

Démontrer que l'assertion « $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ » est fausse.

§ 6 Lieux géométriques

C3.60. Proposition (équation complexe d'un cercle)
Soit Ω un point du plan et soit $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Notons $\mathscr{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r :

$$\mathscr{C}(\Omega, r) := \{M \in \mathscr{P} : \Omega M = r\} .$$

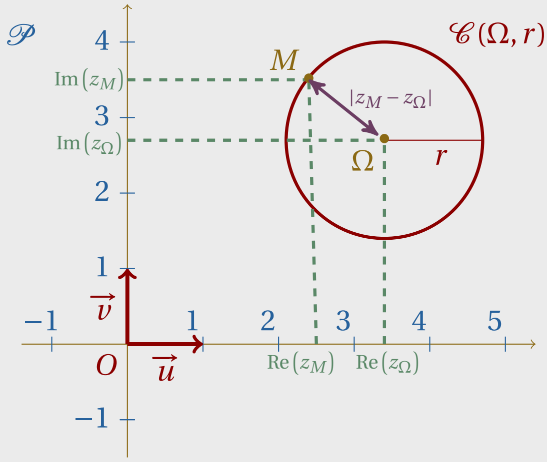
Alors :

$$\boxed{\mathscr{C}(\Omega, r) = \{M \in \mathscr{P} : |z_M - z_\Omega| = r\} .}$$

L'équation :

$$\boxed{|z - z_\Omega| = r \quad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C}}$$

est appelée <u>équation complexe du cercle de centre Ω et de rayon r.</u>



C3.61. Proposition (équation complexe d'un disque ouvert)
Soit Ω un point du plan et soit $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Notons $\mathscr{D}(\Omega, r)$ le disque ouvert de centre Ω et de rayon r :

$$\mathscr{D}(\Omega, r) := \{M \in \mathscr{P} : \Omega M < r\} .$$

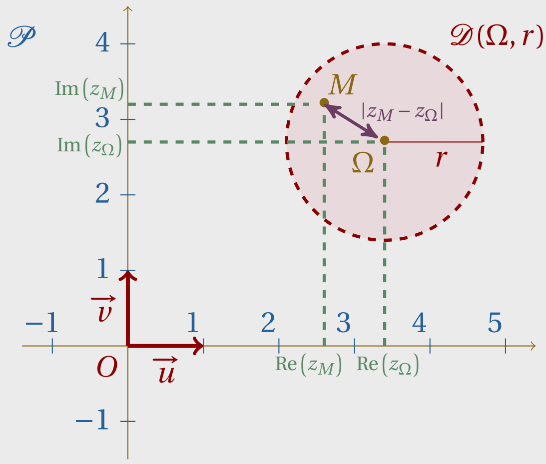
Alors :

$$\boxed{\mathscr{D}(\Omega, r) = \{M \in \mathscr{P} : |z_M - z_\Omega| < r\} .}$$

L'équation :

$$\boxed{|z - z_\Omega| < r \quad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C}}$$

est appelée <u>équation complexe du disque ouvert de centre Ω et de rayon r.</u>



C3.62. Exercice (lieu géométrique donné par une équation complexe)

1. Déterminer le lieu $\mathscr{C}$ des points M d'affixe z tels que $|z - 1 + 3i| = 5$ et le réprésenter graphiquement.
2. Le point $M(2 - i)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?

C3.63. Exercice (résolution d'un système d'équations complexes) Résoudre le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \\ |z+1| & = & 1 \end{array} \right.$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ par voie géométrique, puis de manière analytique.

C3.64. EXERCICE (LIEU GÉOMÉTRIQUE DONNÉ PAR UNE ÉQUATION COMPLEXE)

1. Déterminer le lieu $\mathscr{D}$ des points M d'affixe z tels que $|z+1-i|<3$ et le représenter graphiquement.
2. Le point $M(3+2i)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?

C3.65. EXERCICE (ÉQUATION COMPLEXE D'UNE DROITE) Soient $\omega \in \mathbb{C}^*$ de forme algébrique $\omega = a+ib$ ($(a,b)\in\mathbb{R}^2$) et $k\in\mathbb{R}$. Caractériser l'ensemble $\mathscr{D}$ défini par :

$$\mathscr{D} := \left\{M \in \mathscr{P} \, : \, \overline{\omega}\, z_M + \omega \overline{z_M} = k\right\} .$$

On pourra introduire la forme algébrique $z_M = x+iy$ ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$) de l'affixe z_M d'un point M du plan.

§ 7 INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

C3.66. LEMME Soit $z \in \mathbb{C}$.

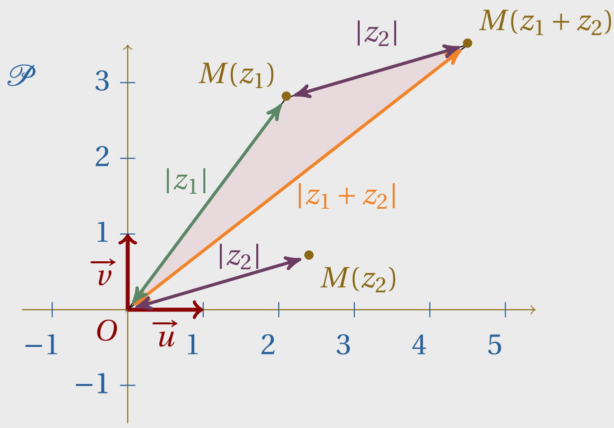
1. $\mathrm{Re}\,(z) \leqslant |z|$
2. $\mathrm{Re}\,(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}^+$

C3.67. PROPOSITION (INÉGALITÉ TRIANGULAIRE)

Soit $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$. Alors :

$$\boxed{\left||z_1|-|z_2|\right| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|}$$

Ce résultat est appelé <u>inégalité triangulaire</u>.



C3.68. PROPOSITION (CAS D'ÉGALITÉ DANS L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE)

$$\boxed{\forall\,(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \qquad |z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \iff (\exists\,\lambda\in\mathbb{R}_+ \quad z_1=\lambda z_2 \text{ ou } z_2=\lambda z_1)}$$

C3.69. EXERCICE (INÉGALITÉ TRIANGULAIRE POUR TROIS POINTS) Soient trois nombres complexes z_1,z_2,z_3. Démontrer :

$$|z_1-z_3| \leqslant |z_1-z_2|+|z_2-z_3| \, .$$

C3.70. EXERCICE (MAJORATION D'UNE DISTANCE) Soient z_1 et z_2 des nombres complexes appartenant au cercle de centre $\Omega(1-2i)$ et de rayon 3. Majorer la distance $M(z_1)M(z_2)$.

C3.71. EXERCICE (SYSTÈME D'ÉQUATIONS COMPLEXES) Résoudre le système :

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} |z+1| & \geqslant & 5 \\ |z-2-2i| & \leqslant & 1 \end{array}\right.$$

d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ par voie géométrique, puis de manière analytique.

§ 8 Deux formules sommatoires

C3.72. Symbole de sommation $\sum$ Soient $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $p\leqslant q$ et $u_p,u_{p+1},\ldots,u_{q-1},u_q$ des nombres complexes. Nous notons $\sum_{k=p}^{q} u_k$ la somme des $q-p+1$ nombres complexes $u_p,u_{p+1},\ldots,u_{q-1},u_q$, i.e. :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{q} u_k := u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{q-1}+u_q\,.}$$

C3.73. Propriété (somme de termes en progression géométrique)

$$\forall\,(q,n)\in\mathbb{C}\times\mathbb{N}\qquad \sum_{k=0}^{n} q^k=\begin{cases} n+1 & \text{si } q=1\\[4pt] \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1\end{cases}$$

C3.74. Exercice Soient $q\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=-n}^{n} q^k$.

C3.75. Propriété (factorisation d'une différence de puissances)

$$\forall\,(a,b,n)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{N}^*\qquad a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\,.$$

C3.76. Exercice Calculer la forme algébrique de $\sum_{k=0}^{2022} i^k 2^{2022-k}$.

§ 9 Nombres complexes de module 1

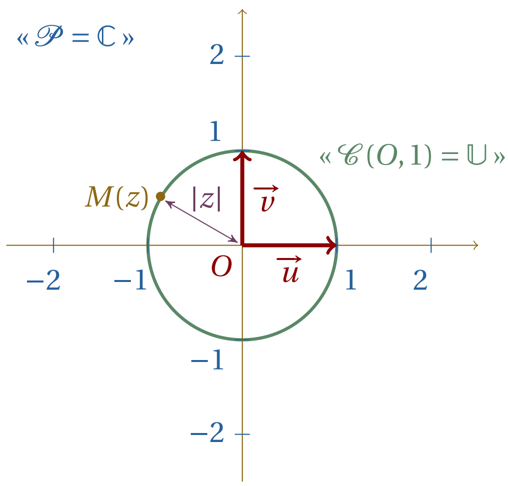
C3.77. Notation (ensemble $\mathbb{U}$)

Nous notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de modules 1 :

$$\boxed{\mathbb{U}:=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|=1\}\,.}$$

L'ensemble des points du plan d'affixe un élément de $\mathbb{U}$ est le cercle unité. Son image dans le plan $\mathscr{P}$ est le cercle unité, i.e. :

$$\{M(z)\ :\ z\in\mathbb{U}\}=\mathscr{C}(O,1)\,.$$



C3.78. L'ENSEMBLE $\mathbb{U}$ EST UN SOUS-GROUPE DE $(\mathbb{C}^*, \times)$

1. *L'ensemble $\mathbb{U}$ est inclus dans $\mathbb{C}^*$ (donc tout élément de $\mathbb{U}$ est inversible).*

$$\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$$

2. *L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par multiplication.*

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2 \qquad z_1 z_2 \in \mathbb{U}$$

3. *L'ensemble $\mathbb{U}$ contient le neutre de la multiplication complexe.*

$$1 \in \mathbb{U}$$

4. *L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse.*

$$\forall z \in \mathbb{U} \qquad \frac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}$$

C3.79. NOTATION e^{it}

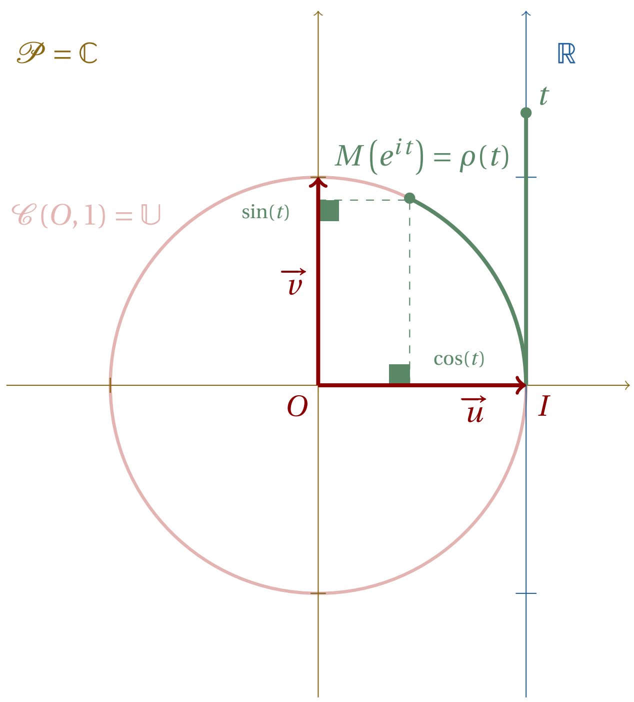
Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\boxed{e^{it} := \cos(t) + i\sin(t) \in \mathbb{U}\,.}$$

Ainsi le point $M\left(e^{it}\right)$ de $\mathscr{P}$ associé à e^{it} coïncide avec le point $\rho(t)$, où

$$\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{C}(O,1)$$

est l'application « enroulement de la droite réelle autour du cercle unité ».



C3.80. EXERCICE

Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifier $\overline{e^{it}}$, $e^{i(t+2\pi)}$ $e^{i(t+\pi)}$, $e^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$ et $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$.

C3.81. CAS D'ÉGALITÉ DE DEUX NOMBRES COMPLEXES DE LA FORME e^{it} OÙ $t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad e^{it_1} = e^{it_2} \iff t_1 \equiv t_2\ [2\pi]}$$

C3.82. Proposition (écriture trigonométrique d'un nombre complexe de module 1)

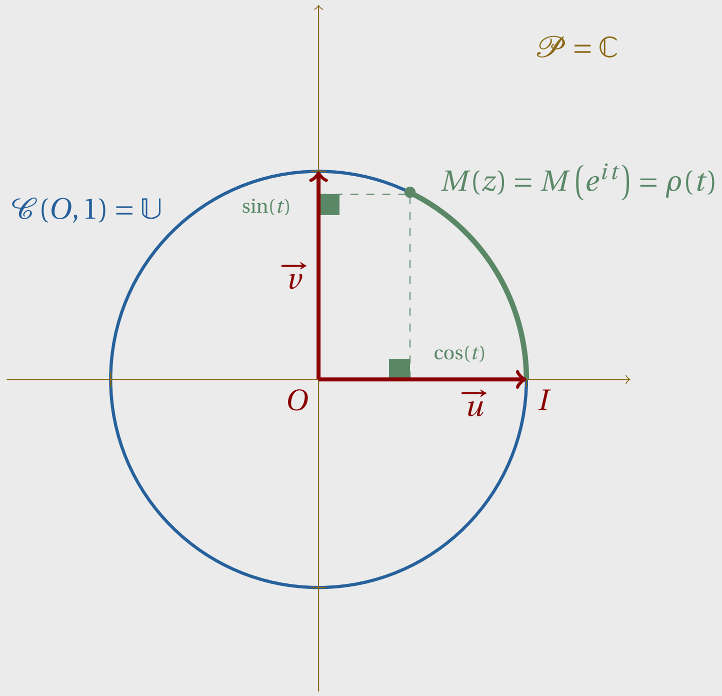
Nous savons que tout point du cercle $\mathscr{C}(O,1)$ égale $\rho(t)$ pour un (unique) réel $t \in]-\pi,\pi]$ (cf. C2.9). Ainsi :

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{U} \quad \exists\, t \in \mathbb{R} \qquad z = e^{it}\,.}$$

Si $z \in \mathbb{U}$, l'écriture :

$$\boxed{z = e^{it} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}}$$

est appelée <u>une forme trigonométrique de z</u>.



C3.83. Exercice Écrire les nombres $1, -1, i, -i$ de $\mathbb{U}$ sous forme trigonométrique.

C3.84. Proposition (exponentielle d'une somme de deux imaginaires purs)

$$\boxed{\forall\, (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1}\, e^{it_2}}$$

C3.85. Exercice Calculer $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

C3.86. Exercice Vérifier que $z := \dfrac{2-2i}{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}} \in \mathbb{U}$, puis déterminer la forme algébrique et une forme trigonométrique de z. Qu'en déduire ?

C3.87. Proposition (formules d'Euler)

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\,.}$$

C3.88. Exercice (primitive de la fonction $\cos^3$) En utilisant les formules d'Euler, donner une primitive de la fonction $t \longmapsto \cos^3(t)$ sur $\mathbb{R}$.

C3.89. Proposition (technique de l'angle moitié) Soient $(t, p, q) \in \mathbb{R}^3$.

(1) $$\boxed{1 + e^{it} = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}}$$

(2) $$\boxed{1 - e^{it} = -2\,i\sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}}$$

figure

(3) $$\boxed{e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}}$$

(4) $$\boxed{e^{ip} - e^{iq} = 2\,i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}}$$

figure

Éléments de démonstration

$\boxed{1}$ On commence par factoriser $1 + e^{it}$ par $e^{i\frac{t}{2}}$:

$$1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\, e^{-i\frac{t}{2}}\left(1 + e^{it}\right) = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}}\right)$$

puis on applique une formule d'Euler.

$\boxed{2}$ On commence par factoriser $1 - e^{it}$ par $e^{i\frac{t}{2}}$:

$$1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\, e^{-i\frac{t}{2}}\left(1 - e^{it}\right) = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)$$

puis on applique une formule d'Euler. On commence par factoriser $1 + e^{it}$ par $e^{i\frac{t}{2}}$:

$$1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\, e^{-i\frac{t}{2}}\left(1 + e^{it}\right) = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}}\right)$$

puis on applique une formule d'Euler.

$\boxed{3}$ On commence par factoriser $e^{ip} + e^{iq}$ par $e^{i\frac{p+q}{2}}$:

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\, e^{-i\frac{p+q}{2}}\left(e^{ip} + e^{iq}\right) = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}\right)$$

puis on applique une formule d'Euler.

$\boxed{4}$ On commence par factoriser $e^{ip} - e^{iq}$ par $e^{i\frac{p+q}{2}}$:

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\, e^{-i\frac{p+q}{2}}\left(e^{ip} - e^{iq}\right) = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{q-p}{2}}\right)$$

puis on applique une formule d'Euler.

C3.90. Exercice Soit $t \in]-\pi, \pi[$. On pose $z := \dfrac{1 - e^{it}}{1 + e^{it}}$.

1. Justifier que le nombre z est bien défini.
2. Sans calculer la forme algébrique de z, justifier que z est imaginaire pur.
3. En utilisant la technique de l'angle moitié, calculer la forme algébrique de z.

C3.91. EXERCICE

1. Factoriser, pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, les expressions suivantes

$$\cos(p)+\cos(q) \qquad \cos(p)-\cos(q) \qquad \sin(p)+\sin(q) \qquad \sin(p)-\sin(q)\,.$$

2. Résoudre l'équation $\cos(15x)+\cos(7x)=\cos(4x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C3.92. EXERCICE Soit $(t,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$. Simplifier la somme $S_n(t) := \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$.

C3.93. PROPOSITION (FORMULE DE MOIVRE)

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (\cos(t)+i\sin(t))^n = \cos(nt)+i\sin(nt)}$$

C3.94. EXERCICE Soit $t \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3t)$ comme un polynôme en $\sin(t)$.

§ 10 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

C3.95. PROPOSITION-DÉFINITION (FORMES EXPONENTIELLES D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\boxed{\exists\, r \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists\theta \in \mathbb{R} \qquad z = re^{i\theta}.}$$

Cette dernière écriture est appelée <u>une forme exponentielle de z</u>.

C3.96. EXEMPLE (FORME TRIGONOMÉTRIQUE DE $-1+i$) Une forme trigonométrique de $-1+i$ est $\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

C3.97. DE LA NON-UNICITÉ D'UNE FORME TRIGONOMÉTRIQUE

1. Si z est un nombre complexe non nul, alors il possède plusieurs formes exponentielles. En effet si $z = re^{i\theta}$ est une forme exponentielle de z, avec donc $r \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors :

$$z = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta+4\pi)} z = re^{i(\theta-2\pi)}$$

sont également des formes exponentielles de z.

2. Si « le » nombre réel θ intervenant dans une forme exponentielle d'un nombre complexe non nul z n'est pas unique, le nombre r lui l'est, puisque $r = |z|$.

C3.98. PROPOSITION (CAS D'ÉGALITÉ DE DEUX FORMES TRIGONOMÉTRIQUES) Soient $(r_1,\theta_1) \in \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ et $(r_2,\theta_2) \in \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$.

$$\boxed{r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{ll} & r_1 = r_2 \\ \text{et} & \\ & \theta_1 = \theta_2 \qquad [2\pi]. \end{array}\right.}$$

C3.99. Méthode pour rechercher une forme trigonométrique explicite Soit $z \in \mathbb{C}^*$ donné sous forme algébrique. Voici comment une forme exponentielle de z explicite peut être déterminée, lorsque cela est possible.

- *Étape 1* On calcule le module de z.
- *Étape 2* Le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1, i.e. un élément de $\mathbb{U}$. D'après C3.82, on peut donc l'écrire sous la forme $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$. On a donc :
$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}\ .$$
En pratique, on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\[2ex] \sin(\theta) & = & \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$
en s'appuyant sur les valeurs remarquables de cosinus et sinus.
- *Étape 3* On obtient alors :
$$z = |z| \times \frac{z}{|z|} = \underbrace{|z|}_{\in \mathbb{R}_{>0}} e^{i\theta}$$
et par suite $|z|e^{i\theta}$ est une forme exponentielle de z.

C3.100. Exercice Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes 5, -3, $4i$, $-5i$, $1+i$, $i-\sqrt{3}$.

C3.101. La transformation de Fresnel via une forme trigonométrique
Considérons trois réels a, b, t tels que $(a,b) \neq (0,0)$. La transformation de Fresnel (introduite en C2.23) permet d'écrire la quantité $a\cos(x) + b\sin(t)$ sous la forme :

$$\boxed{a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi) \quad \text{où } A \in \mathbb{R}_{>0} \text{ et } \varphi \in \mathbb{R} \text{ sont des réels indépendants de } t.}$$

Cette transformation d'écriture peut-être obtenue à partir d'une forme trigonométrique :

$$(\star) \qquad a + ib = Ae^{i\varphi} \quad \text{où } A \in \mathbb{R}_{>0} \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}$$

du complexe $a + ib \neq 0$. En effet, par unicité de la forme algébrique de $a + ib$, il vient $a = A\cos(\varphi)$ et $b = A\sin(\varphi)$, d'où :

$$a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(\varphi)\cos(t) + A\sin(\varphi)\sin(t) = A\underbrace{\left(\cos(\varphi)\cos(t) + \sin(\varphi)\sin(t)\right)}_{\cos(t-\varphi)}.$$

C3.102. Exercice (équation trigonométrique) Résoudre l'équation $2\cos(t) + 3\sin(t) = 4$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

C3.103. Définition (argument d'un nombre complexe non nul) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout nombre réel θ tel que :
$$z = |r|e^{i\theta}$$
i.e. qui intervient dans l'écriture d'une forme exponentielle de z, est appelé un argument de z.

C3.104. Non unicité d'un argument d'un nombre complexe non nul Un nombre complexe non nul n'admet pas un seul argument, mais plusieurs (une infinité). Par exemple, $1+i$ admet pour arguments $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$.

C3.105. Proposition (du défaut d'unicité de l'argument d'un nombre complexe non nul)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ un argument de z.

1. Un nombre réel de z est un argument de z si et seulement si $\theta \equiv \theta_0\ [2\pi]$.
2. L'ensemble des arguments de z est $\{\theta_0 + 2k\pi \ :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

C3.106. Définition (symbole $\arg(z)$ où $z \in \mathbb{C}^*$) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Le symbole $\arg(z)$ désigne un argument de z.
2. D'après C3.105, le symbole $\arg(z)$ désigne un nombre réel qui n'est défini qu'à un multiple entier de 2π près. Ainsi, $\arg(z)$ ne désigne donc pas un unique nombre réel.

C3.107. Définition d'une mesure d'angle orienté
Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs non nuls du plan.

- La demi-droite d'origine O orientée par $\overrightarrow{w_1}$ couple le cercle $\mathscr{C}(O,1)$ en un unique point noté M_1.
- La demi-droite d'origine O orientée par $\overrightarrow{w_2}$ couple le cercle $\mathscr{C}(O,1)$ en un unique point noté M_2.

D'après C2.9, comme $(M_1, M_2) \in \mathscr{C}(O,1)^2$, il existe un couple $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

figure

$$M_1 = \rho(\theta_1) \qquad \text{et} \qquad M_2 = \rho(\theta_2)\,.$$

On dit alors que :

$$\boxed{t_2 - t_1 \text{ est une mesure de l'angle (orienté) } \left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right).}$$

Comme les réels t_1 et t_2 sont uniques à un multiple de 2π près (cf. C2.9), le réel $t_2 - t_1$ est lui-même unique à un multiple entier de 2π près. Ainsi note-t-on, en confondant l'angle orienté $\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right)$ et sa mesure :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right) = t_2 - t_1 \quad [2\pi]\,.}$$

C3.108. Deux propriétés des angles orientés Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}$ trois vecteurs non nuls du plan.

1. *Échange de l'ordre des vecteurs* $\boxed{\left(\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_1}\right) = -\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right) \quad [2\pi]}$
2. *Relation de Chasles* $\boxed{\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_3}\right) = \left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right) + \left(\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\right) \quad [2\pi]}$

C3.109. Interprétation géométrique de la notion d'argument

1. Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors : $\boxed{\arg(z) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM(z)}\right) \quad [2\pi]\,.}$

2. Si M est un point du plan distinct de l'origine, alors $\boxed{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z_M) \quad [2\pi]\,.}$

3. Si $\vec{w}$ est un vecteur non nul du plan, alors : $\boxed{\left(\vec{u}, \vec{w}\right) = \arg\left(z_{\vec{w}}\right) \quad [2\pi]\,.}$

4. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes distincts, alors $\boxed{\arg(z_2 - z_1) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{M(z_1)M(z_2)}\right) \quad [2\pi]\,.}$

5. Si M_1 et M_2 sont deux points distincts du plan, alors $\boxed{\left(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = \arg\left(z_{M_2} - z_{M_1}\right) \quad [2\pi]\,.}$

C3.110. Propriétés (des arguments) Soient $(z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

1. *Argument de l'opposé* $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]\,.}$

2. *Argument du conjugué* $\boxed{\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]\,.}$

3. *Argument d'un produit* $\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]\,..}$

4. *Argument de l'inverse* $\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]\,.}$

5. *Argument d'un quotient* $\boxed{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]\,.}$

C3.111. Un des intérêts des formes trigonométriques Les formes exponentielles sont particulièrement adaptées aux problèmes de nature multiplicative, i.e. qui mettent en jeu des multiplications.

C3.112. Exercice (calcul d'une puissance à l'aide d'une forme exponentielle)

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit $z = re^{i\theta}$ est une forme exponentielle de z, avec donc $r \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Que vaut z^n pour tout $n \in \mathbb{N}$?

2. Calculer la forme algébrique de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^{1996}$.

§ 11 Racines carrées d'un nombre complexe non nul

C3.113. Définition (racine carrée d'un nombre complexe) Soit $Z \in \mathbb{C}$. Une racine carrée complexe de Z est un nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

C3.114. Exercice (racines carrées de -1) Déterminer les racines carrées de -1.

C3.115. Racine carrée de 0 Le nombre 0 est l'unique racine carrée de 0.

C3.116. Proposition (des racines carrées d'un nombre complexe non nul) Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Alors Z possède deux racines carrées, opposées l'une de l'autre.

Comme un nombre complexe non nul Z possède deux racines carrées

le symbole $\sqrt{Z}$ n'a aucun sens précis.

Toutefois, bien sûr, si $Z \in \mathbb{R}_+$ on pourra continuer de noter $\sqrt{Z}$ l'unique racine réelle positive de Z.

C3.117. Méthode pratique pour le calcul de racines carrées

- *À partir d'une forme exponentielle (explicite)* Supposons que l'on connaisse une forme exponentielle (explicite) d'un nombre complexe non nul Z :
$$Z = re^{i\theta} \qquad \text{avec } r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$
Il ressort de la preuve du théorème précédent que les deux racines carrées de Z sont :
$$\boxed{\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}\,.}$$
L'étude est dans ce cas particulièrement brève.
- *À partir de la forme algébrique* Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et soit $A + iB$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sa forme algébrique. On résout l'équation
$$(\star) \qquad z^2 = A + iB$$
d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ par analyse-synthèse.
— *Analyse* On cherche des conditions nécessaires sur un nombre complexe z pour que $z^2 = A + iB$. On écrit z sous forme algébrique : $z = a + ib$, avec a et b réels. L'équation $(\star)$ livre :
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a^2 & - & b^2 & = & A \\ & & 2ab & = & B\,. \end{array}\right.$$
En prenant le module de chacun des membres de $(\star)$, on obtient l'équation supplémentaire :
$$a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2}$$
qui simplifie quelque peu la résolution. On aboutit finalement au système
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a^2 & + & b^2 & = & \sqrt{A^2+B^2} \\ a^2 & - & b^2 & = & A \\ & & 2ab & = & B\,. \end{array}\right.$$
En combinant les deux premières équations, on détermine aisément a^2 et b^2, donc a et b à un signe près. La troisième équation fournit une information sur le signe conjoint de a et b. À la fin de l'analyse, ne restent que deux nombres complexes candidats (opposés l'un de l'autre).

— *Synthèse* On vérifie si ces deux nombres complexes candidats sont des racines carrées complexes de Z, en calculant leurs carrés.

C3.118. Exercice (calculs de racines carrées de nombres complexes) Calculer les racines carrées complexes des nombres complexes suivants.

$z_1 := i \qquad z_2 := -2 \qquad z_3 := -\sqrt{3} + 3i \qquad z_4 := 3 - 4i \qquad z_5 := 4 + 5i$

§ 12 Équations du second degré

C3.119. Définition (forme canonique d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes) Soit $aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré à coefficients complexes (donc $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$). La forme canonique de $aX^2 + bX + c$ est :

$$\boxed{aX^2 + bX + c = a\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right].}$$

C3.120. Exercice (calculs de formes canoniques) Calculer les formes canoniques des deux polynômes du second degré suivants.

$P_1 := 2X^2 + 3X + 4 \qquad P_2 := (1+i)X^2 + (2-3i)X + 4 - 5i$

C3.121. Définition (discriminant d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes) Soit $aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré à coefficients complexes (donc $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$). Le discriminant de $aX^2 + bX + c$ est le nombre complexe noté Δ défini par :

$$\boxed{\Delta := b^2 - 4ac}$$

C3.122. Proposition (racines d'un polynôme du second degré à coefficients complexes) Soit $aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré à coefficients complexes (donc $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$). Soit Δ le discriminant de $aX^2 + bX + c$. On considère l'équation (E) définie par :

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) possède une unique solution : $-\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation (E) possède deux solutions $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ désigne une racine carrée complexe de Δ.

C3.123. Exercice (résolution d'équation de degré 2) Résoudre chacune des équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$(E_1) \quad z^2 + 2z - 4 = 0 \qquad (E_2) \quad z^2 + 2z + 4 = 0 \qquad (E_3) \quad 2z^2 + \sqrt{3}z + \dfrac{i}{2}$

C3.124. Proposition (somme et produit des racines d'une équation du 2nd degré) Soit aX^2+bX+c un polynôme du second degré à coefficients complexes (donc $a\in\mathbb{C}^*$, $b\in\mathbb{C}$ et $c\in\mathbb{C}$). On considère l'équation

$$(E) \qquad az^2+bz+c=0$$

d'inconnue $z\in\mathbb{C}$. Soient z_1 et z_2 les nombres complexes définis par :

- z_1 et z_2 sont les deux racines de (E), si $\Delta=b^2-4ac\neq 0$;
- $z_1=z_2$ est l'unique racine de (E), si $\Delta=b^2-4ac=0$.

On introduit $s:=z_1+z_2$ et $p:=z_1z_2$. Alors :

$$\boxed{s=-\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad p=\frac{c}{a}.}$$

C3.125. Exercice (recherche de racines « évidentes ») Rechercher des racines « évidentes » pour chacune équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

$$(E_1) \quad z^2-3z+2=0 \qquad\qquad (E_2) \quad z^2-2z-15=0 \qquad\qquad (E_3) \quad z^2-7z+12=0$$

C3.126. Proposition (détermination de deux nombres connaissant leurs somme et produit) Soit $(s,p)\in\mathbb{C}^2$. On considère le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccc} z_1 & + & z_2 & = & s \\ & & z_1z_2 & = & p \end{array}\right.$$

d'inconnue $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ et son ensemble solution noté $Sol_{(S)}$.

1. Si $(z_1,z_2)\in Sol_{(S)}$ alors $(z_2,z_1)\in Sol_{(S)}$.
2. Résoudre le système (S) revient à résoudre l'équation :

$$(E) \quad z^2-sz+p=0$$

d'inconnue $z\in\mathbb{C}$. Précisément :

- si $\Delta:=s^2-4p=0$ alors $Sol_{(S)}=\{(r_0,r_0)\}$ où r_0 est l'unique solution de (E) ;
- si $\Delta:=s^2-4p\neq 0$ alors $Sol_{(S)}=\{(r_1,r_2),(r_2,r_1)\}$ où r_1 et r_2 sont les deux solutions de l'équation de (E).

C3.127. Exercice (détermination de deux nombres connaissant leurs somme et produit) Déterminer tous les couples de nombres complexes dont la somme des composantes vaut 4 et le produit $\frac{3}{4}$.

C3.128. Exercice (détermination de deux nombres connaissant leurs somme et produit) Déterminer tous les couples de nombres complexes dont la somme des composantes vaut $-3-2i$ et le produit $1+3i$.

§ 13 ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

C3.129. PROPOSITION (FACTORISATION D'UNE EXPRESSION POLYNOMIALE AYANT UNE RACINE) Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) := z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 .$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Alors :

$$\exists\, (b_{n-2}, \ldots, b_2, b_1, b_0) \in \mathbb{C}^{n-1} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \qquad P(z) = (z - \alpha)\left(z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + b_{n-3} z^{n-3} + \ldots + b_2 z^2 + b_1 z + a_0\right) .$$

C3.130. EXERCICE (FACTORISATION D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 3 POSSÉDANT UNE RACINE) Soit $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{C}^3$. On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 .$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Déterminer $(b_1, b_0) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad P(z) = (z - \alpha)\,(z^2 + b_1 z + b_0) .$$

C3.131. EXERCICE (RÉSOLUTION GUIDÉE D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DE DEGRÉ 3) Résoudre l'équation :

$$z^3 + 3z^2 + iz + 3i = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, en remarquant que -3 en est solution.

C3.132. EXERCICE (RÉSOLUTION GUIDÉE D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DE DEGRÉ 5) Résoudre l'équation :

$$z^5 - 2z^4 - (1+2i) z^3 + (2+4i) z^2 - (1-i) z + (2-2i) = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, en remarquant que 2 en est solution.

C3.133. EXERCICE (MAJORATION DU NOMBRE DE RACINES D'UN POLYNÔME À COEFFICIENTS COMPLEXES) Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) := z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 .$$

Alors l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ possède au plus n solutions deux-à-deux distinctes.

C3.134. THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{C}^n$. Alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \ldots (z - \alpha_{n-1})(z - \alpha_n) .$$

§ 14 Racines n-ièmes de l'unité où $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

C3.135. Notation Dans toute cette partie, n désigne naturel supérieur ou égal à 2.

C3.136. Définition (racines n-ièmes de l'unité et ensemble $\mathbb{U}_n$)

1. On appelle racine n-ième de l'unité, tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.
2. L'ensemble des racines n-ième de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$. On a donc :

$$\boxed{\mathbb{U}_n := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^n = 1\right\}.}$$

C3.137. Exemple

1. Le nombre 1 est une racine n-ième de l'unité.
2. Le nombre -1 est une racine 2-ième (ou carrée) de l'unité.
3. Le nombre $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine 3-ième de l'unité.
4. Le nombre i est une racine 4-ième, mais aussi 8-ième, de l'unité.
5. Le nombre $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ est une racine n-ième de l'unité, qui est distincte de 1.

C3.138. Exemple

1 L'ensemble des racines 2-ièmes (ou carrées) de l'unité est $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$, ensemble à 2 éléments qui s'écrit aussi :

$$\mathbb{U}_2 = \{\omega_2^0, \omega_2^1\} = \left\{\omega_2^k \,:\, k \in [\![0,1]\!]\right\}$$

où $\omega_2 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$.

Figure $\mathbb{U}_2$

2 L'ensemble des racines 3-ièmes de l'unité est $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, ensemble à 3 éléments qui s'écrit aussi :

$$\mathbb{U}_3 = \{\omega_3^0, \omega_3^1, \omega_3^2\} = \left\{\omega_3^k \,:\, k \in [\![0,2]\!]\right\}$$

où $\omega_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$.

Figure $\mathbb{U}_3$

3 L'ensemble des racines 4-ièmes de l'unité est : $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$, ensemble à 4 éléments qui s'écrit aussi :

$$\mathbb{U}_4 = \{\omega_4^0, \omega_4^1, \omega_4^2, \omega_4^3\} = \left\{\omega_4^k \,:\, k \in [\![0,3]\!]\right\}$$

où $\omega_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Figure $\mathbb{U}_4$

C3.139. Propriétés (de l'ensemble $\mathbb{U}_n$)

1. *$\mathbb{U}_n$ est une partie de $\mathbb{U}$:* $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
2. *$\mathbb{U}_n$ contient le neutre pour la multiplication :* $1 \in \mathbb{U}_n$
3. *$\mathbb{U}_n$ est stable par multiplication :* $\forall\, (z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n^2 \qquad z_1 z_2 \in \mathbb{U}_n$
4. *$\mathbb{U}_n$ est stable par passage à l'inverse :* $\forall\, z \in \mathbb{U}_n \qquad z$ est inversible et $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}_n$

C3.140. Théorème (description en extension de l'ensemble $\mathbb{U}_n$)

1. Si l'on pose $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, alors :

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega_n^k \; : \; k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \; : \; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

2. Les nombres $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}$ sont deux à deux distincts, i.e.

$$\forall\, (k_1, k_2) \in [\![0, n-1]\!]^2 \qquad k_1 \neq k_2 \quad \Longrightarrow \quad \omega_n^{k_1} \neq \omega_n^{k_2}.$$

Par conséquent, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ possède n éléments.

3. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons M_k le point d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Image de $\mathbb{U}_n$ dans le plan

Le polygone $M_0 M_1 \dots M_n$ est un polygone régulier à n sommets, tous placés sur le cercle unité.

C3.141. Exercice ($\mathbb{U}_6$) Décrire $\mathbb{U}_6$ en extension et le représenter graphiquement.

C3.142. Exercice (inclusion d'ensembles de racines de l'unité Soient $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Déterminer une CNS portant sur n et m pour que l'ensemble $\mathbb{U}_m$ soit inclus dans $\mathbb{U}_n$.

C3.143. Exercice (somme et produit des racines n-ièmes de l'unité) Calculer $\displaystyle\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta$ et $\displaystyle\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta$.

C3.144. Exercice (périmètre du polygone ayant pour sommets les images des éléments de $\mathbb{U}_n$) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit M_k le point d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Calculer le périmètre du polygone $M_0 M_1 \dots M_n$ à n côtés.

C3.145. Exercice Résoudre l'équation $z^5 = 32$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

§ 15 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul où $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

C3.146. Notation Dans toute cette partie, n désigne naturel supérieur ou égal à 2.

C3.147. Rappel sur la racine n-ième d'un réel positif ou nul

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\boxed{\text{il existe un unique } r \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } x^n = r.}$$

   Ce nombre r est appelé racine n-ième de x et est noté $\sqrt[n]{x}$.

2. La racine n-ième est multiplicative :

$$\boxed{\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2} = \sqrt[n]{x_1}\ \sqrt[n]{x_2}\,.}$$

C3.148. Définition (racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul) Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle racine n-ième de Z, tout nombre complexe (non nul) z tel que $z^n = Z$.

C3.149. Théorème (description des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul) Un nombre complexe non nul Z possède n racines n-ièmes deux-à-deux distinctes qui sont :

$$\sqrt[n]{|Z|}\ \exp\left(i\,\frac{\arg(Z) + k2\pi}{n}\right) \qquad \text{où } k \in [\![0, n-1]\!]\,.$$

Comme un nombre complexe non nul Z possède n racines n-ièmes

le symbole $\sqrt[n]{Z}$ n'a aucun sens précis.

Toutefois, bien sûr, si $Z \in \mathbb{R}_+$ on pourra continuer de noter $\sqrt[n]{Z}$ l'unique racine réelle positive de Z.

C3.150. Exercice (calcul de racines troisièmes) Déterminer les racines troisièmes de -8.

C3.151. Exercice (calcul de racines quatrième) Déterminer les racines quatrièmes de $-i$.

C3.152. Exercice (équation algébrique) Résoudre l'équation $z^{2n} + (2+i)z^n - (3-3i) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

§ 16 Exponentielle d'un nombre complexe

C3.153. Définition (exponentielle d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle de z, notée $\exp(z)$ ou e^z, par :

$$\boxed{\exp(z) := e^{\mathrm{Re}(z)}\, e^{i\,\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)}\,(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z)).}$$

C3.154. Exemple $\exp(1 + i\pi) = -e$ et $\exp\left(\ln(\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4}\right) = 1 - i$.

C3.155. Exercice Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que $\exp(z) \neq 0$ et calculer le module et un argument de $\exp(z)$.

C3.156. Proposition (exponentielle d'une somme)

$$\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\ \exp(z_2)}$$

C3.157. Exercice Soit $z = \ln\left(\sqrt[3]{2}\right) + i\dfrac{\pi}{6}$. Calculer $\exp(z)^{12}$.

C3.158. Proposition (cas d'égalité de deux exponentielles)

$$\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad \exp(z_2) = \exp(z_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (\,\exists\, k \in \mathbb{Z} \quad z_1 = z_2 + k 2\pi i\,)}$$

C3.159. Exercice (calcul des antécédents de -1 par l'exponentielle complexe) Résoudre l'équation $\exp(z) = -1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

C3.160. Proposition (des antécédents d'un complexe par l'exponentielle complexe)
Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère l'équation :

$$\boxed{(E_a) \qquad \exp(z) = a}$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et son ensemble solution $Sol_{(E_a)} := \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ \exp(z) = a\right\}$.

- *Cas où $a = 0$* $\boxed{Sol_{(E_0)} = \emptyset\,.}$
- *Cas où $a = 0$* Si $a \neq 0$ alors $\boxed{Sol_{(E_a)} = \left\{\ln(|a|) + i\left(\arg(a) + k2\pi\right) \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

C3.161. Exercice (calcul des antécédents de $7 - 7i$ par l'exponentielle complexe) Résoudre l'équation $\exp(z) = 7 - 7i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

§ 17 Interprétation géométrique des nombres complexes

C3.162. Rappels sur l'interprétation géométrique de module et de l'argument Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes distincts. Notons M_1 (resp. M_2) le point du plan d'affixe z_1 (resp. M_2). Nous avons établi en C3.53 et en C3.109 que :

$$\boxed{M_1 M_2 = |z_2 - z_1| \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_1 M_2}\right) = \arg(z_2 - z_1) \quad [2\pi]\,.}$$

C3.163. Proposition (module et argument de $(c-a)/(c-b)$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$ sont distincts)
Soient a, b, c des nombres complexes deux-à-deux distincts, d'images respectives A, B, C dans le plan. Alors

$$\boxed{\frac{AC}{BC} = \left|\frac{c-a}{c-b}\right| \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \quad [2\pi]\,.}$$

C3.164. Corollaire (critères d'alignement et d'orthogonalité) Soient A, B, C des points du plan deux-à-deux distincts, d'affixes respectives a, b, c.

1. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$.
2. Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\dfrac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$.

C3.165. Exercice Soient :

- A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives a et b.

Caractériser géométriquement l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie :

$$z\,(\overline{a}-\overline{b}) - \overline{z}\,(a-b) = a\,\overline{b} - \overline{a}\,b\,.$$

C3.166. Exercice Soient :

- A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives a et b ;
- k un réel strictement positif.

Caractériser géométriquement l'ensemble des points $M \in \mathscr{P} \setminus \{B\}$ dont l'affixe z vérifie :

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k\,.$$

C3.167. Exercice Soient :

- A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives a et b ;
- $\theta \in \mathbb{R}$.

Caractériser géométriquement l'ensemble des points $M \in \mathscr{P} \setminus \{A, B\}$ dont l'affixe z vérifie :

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \theta \quad [\pi]\,.$$

C3.168. Translation du plan $\mathscr{P}$ Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan d'affixe b.

La translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ est l'application :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & M' \in \mathscr{P} \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}\,. \end{array}\right.$$

Représentation de la translation $t_{\overrightarrow{w}}$

Son expression complexe est l'application notée $t_{\overrightarrow{w}}$:

$$t_{\overrightarrow{w}} \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+b\,. \end{array}\right.$$

C3.169. Homothétie du plan $\mathscr{P}$ Soient Ω un point du plan d'affixe ω et $k \in \mathbb{R}_{>0}$.

L'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & M' \in \mathscr{P} \text{ tel que } \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}\,. \end{array} \right.$$

Représentation de l'homothétie $h_{\Omega,\theta}$

Son expression complexe est l'application notée $h_{\Omega,\theta}$:

$$h_{\Omega,\theta} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + k\,(z-\omega)\,. \end{array} \right.$$

C3.170. Rotation du plan $\mathscr{P}$ Soient Ω un point du plan d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & M' \in \mathscr{P} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{array} \right. . \end{array} \right.$$

Représentation de la rotation $\rho_{\Omega,\theta}$

Son expression complexe est l'application notée $\rho_{\Omega,\theta}$:

$$\rho_{\Omega,\theta} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + e^{i\theta}\,(z-\omega)\,. \end{array} \right.$$

C3.171. Proposition-Définition (similitude directe) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. L'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array} \right.$$

est appelée <u>similitude directe</u>.

- *Cas où $a = 1$* Si $a = 1$ alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe b, i.e. $f = t_{\overrightarrow{w}}$.
- *Cas où $a \neq 1$* Si $a \neq 1$ alors f possède un unique point fixe $\omega := \dfrac{b}{1-a}$ dont l'image dans le plan est notée Ω. L'application f est la composée commutative de :
  — la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$;
  — l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$;
  i.e. :
  $$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = h_{\Omega,|a|} \circ \rho_{\Omega,\arg(a)}(z) = \rho_{\Omega,\arg(a)} \circ h_{\Omega,|a|}(z)\,.$$
  On dit que f est la <u>similitude de centre Ω, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$</u>.

C3.172. Exercice (éléments caractéristiques d'une similitude) On considère la similitude directe f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (2-2i)z+i\,. \end{array} \right.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de f.
2. Représenter graphiquement les images des points $M(1)$ et $M(i)$ par f.

C3.173. EXERCICE (INVERSE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. On considère la similitude directe f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b\,. \end{array} \right.$$

1. Déterminer une similitude directe g telle que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad f \circ g(z) = g \circ f(z)\,.$$

2. Préciser les liens entre les éléments caractéritiques des similitudes directes f et g.

C3.174. EXERCICE (EFFET D'UNE SIMILITUDE SUR LES LONGUEURS ET LES ANGLES ORIENTÉS) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. On considère la similitude directe f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b\,. \end{array} \right.$$

1. Soient M_1 et M_2 des points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2. Quel lien existe-t-il entre les distances M_1M_2 et $f(M_1)f(M_2)$?
2. Soient M_1, M_2, M_3 des points du plan deux-à-deux distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3. Démontrer que les angles $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = \left(\overrightarrow{f(M_1)f(M_2)}, \overrightarrow{f(M_1)(M_3)}\right) \quad [2\pi]\,.$