Chapitre n°2

Trigonométrie

C2.1. Objectifs

1. Définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel par voie géométrique
2. Calculs de valeurs remarquables de cosinus et sinus
3. Construction d'un formulaire de trigonométrie
4. Études d'équations et d'inéquations trigonométriques
5. Étude des fonctions cosinus et sinus
6. Étude de la fonction tangente, quotient de la fonction sinus par la fonction cosinus
7. Calculs de valeurs remarquables de tangente
8. Enrichissement du formulaire de trigonométrie à l'aide de la fonction tangente

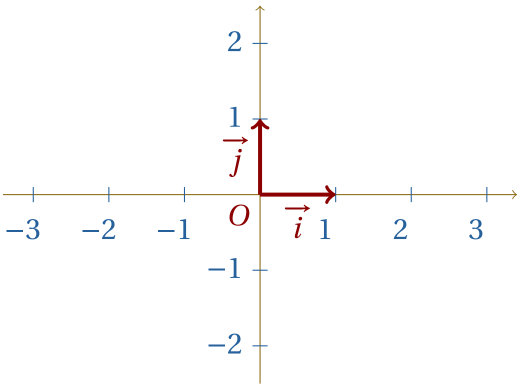
§ 1 Rappels de géométrie plane

C2.2. Repère orthonormé du plan

Un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan est la donnée :

- d'un point O du plan, appelé origine ;
- de deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ non nuls, orthogonaux et de même norme.

Dans la suite, on fixe un tel repère orthonormé du plan. On dispose ainsi d'une unité de mesure de longueurs : $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\|$.

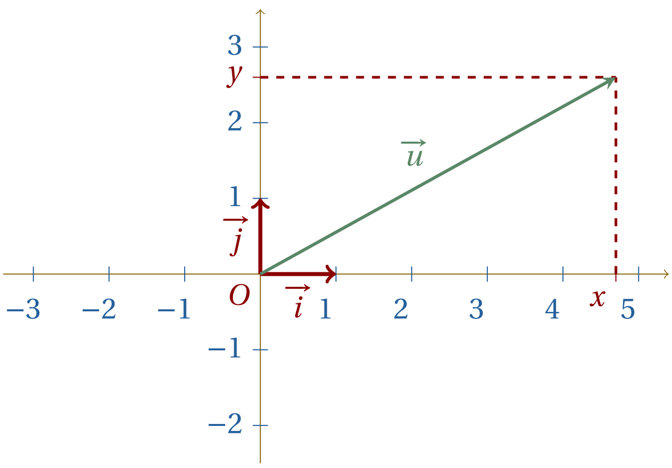


C2.3. Coordonnées d'un vecteur du plan dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels, qui forme les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}\ .}$$

Le nombre réel x est appelé abscisse de $\overrightarrow{u}$ et le nombre réel y est appelé ordonnée de $\overrightarrow{u}$.

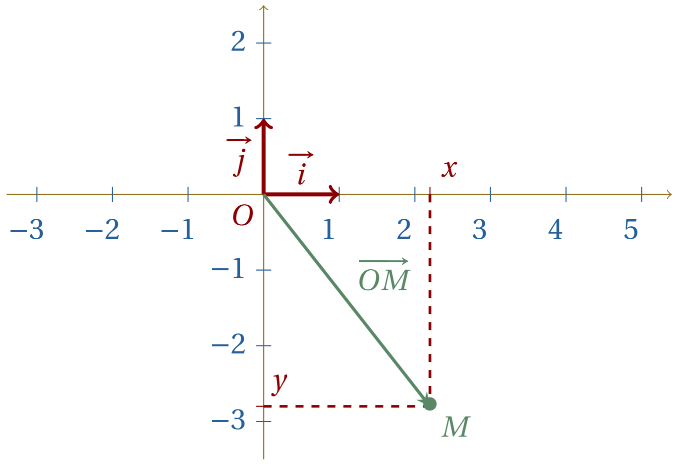


C2.4. Coordonnées d'un point du plan dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels, qui forme les coordonnées de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}\ .$$

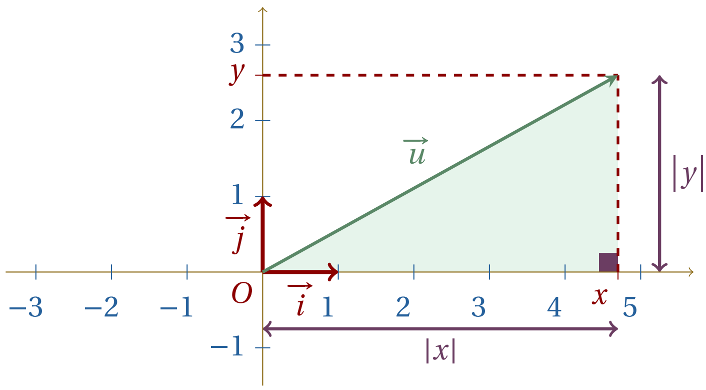
Le nombre réel x est appelé abscisse de M et le nombre réel y est appelé ordonnée de M.
Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



C2.5. Expression de la norme d'un vecteur via ses coordonnées dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, de coordonnées (x, y) dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. Alors :

$$\boxed{\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$



Démonstration

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle vert, il vient :

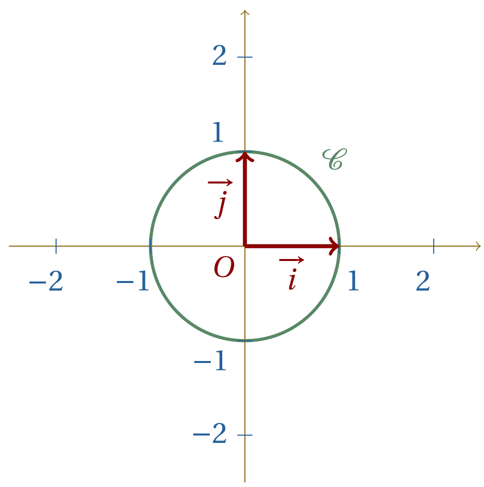
$$||\,u\,||^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

et on conclut en appliquant la fonction racine carrée à chacun des membres de l'identité précédente.

§ 2 Enroulement de la droite réelle autour du cercle unité

C2.6. Cercle unité et nombre π

1. On appelle cercle unité le cercle de centre l'origine O et de rayon 1. Ainsi $\mathscr{C}$ est-il l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ vérifient :
$$x^2 + y^2 = 1\,.$$
2. Le nombre π est le demi-périmètre du cercle $\mathscr{C}$, l'unité de mesure étant $\left|\left|\vec{i}\right|\right| = \left|\left|\vec{j}\right|\right|$. Il est indépendant du choix du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



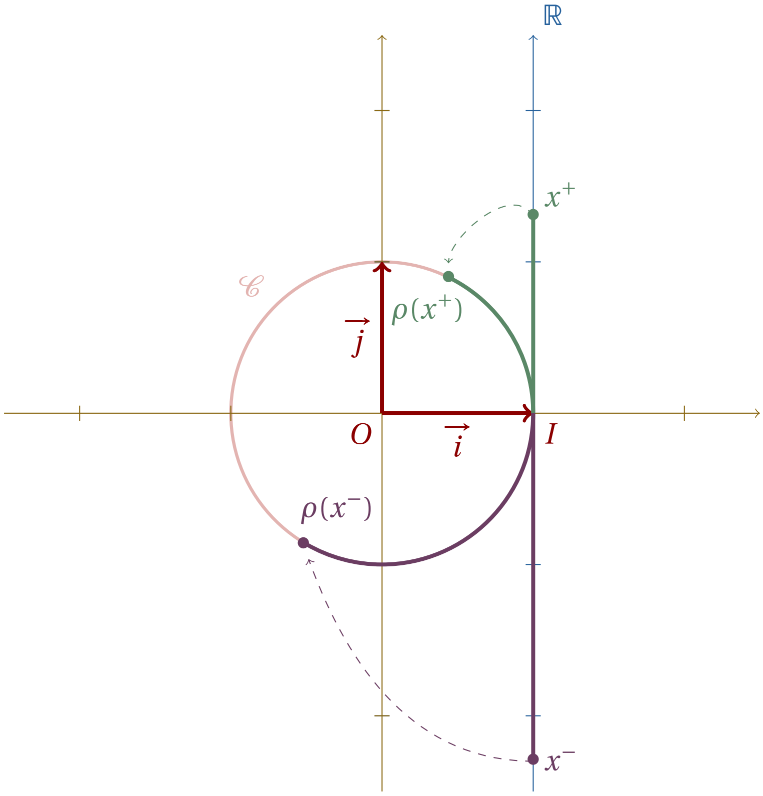
C2.7. Revêtement du cercle unité par la droite réelle

- On note I le point du plan tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.
- La tangente au cercle $\mathscr{C}$ en I, graduée par le vecteur $\vec{j}$, est assimilée à la droite $\mathbb{R}$ des réels.
- On enroule cette droite autour du cercle $\mathscr{C}$, comme on le ferait avec un fil autour d'une bobine, en respectant la convention suivante pour le sens de l'enroulement.
  — La demie droite correspondant aux réels positifs est enroulée dans le sens anti-horaire.
  — La demie droite correspondant aux réels négatifs est enroulée dans le sens horaire.

  Ce faisant, on associe à chaque nombre réel x, un point du cercle que l'on note $\rho(x)$.
- On définit ainsi une application :

$$\rho \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ x & \longmapsto & \rho(x) \end{array} \right.$$

appelée revêtement du cercle unité par la droite réelle.



C2.8. Exercice (images de certains réels par l'application ρ)

Représenter le point $\rho(x)$, pour chaque

$$x \in \left\{ -\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 3\pi \right\}.$$

C2.9. Propriété (Revêtement du cercle unité par la droite réelle)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\rho(x) = \rho(y) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = y + k2\pi).}$$

2. Pour tout point M du cercle $\mathscr{C}$, il existe un unique $x \in [-\pi, \pi[$ tel que $M = \rho(x)$.

Démonstration

$\boxed{1.}$ Soient x et y deux nombres réels. Par construction, les images $\rho(x)$ et $\rho(y)$ de x et y dans l'enroulement de la droite $\mathbb{R}$ autour du cercle $\mathscr{C}$ sont égales si et seulement si la distance $|x-y|$ entre x et y correspond à un certain nombre de tours de cercle. Comme le périmètre du cercle est 2π, $\rho(x)$ et $\rho(y)$ si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad |x-y| = k2\pi.$$

On conclut à l'aide d'une disjonction de cas, suivant le signe de $x-y$.

2. Existence Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$

- *Cas où M est situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses* On note $x \in]0,\pi[$ la longueur de l'arc $\widehat{IM}$. Alors $M = \rho(x)$.
- *Cas où M est situé strictement en dessous de l'axe des abscisses* On note $x \in]0,\pi[$ la longueur de l'arc $\widehat{IM}$. Alors $-x \in]-\pi,0[$ et $M = \rho(-x)$.
- *Cas où $M = I$* Alors $M = \rho(0)$.
- *Cas où $M = I'$ où I' est le symétrique de I par rapport à O* Alors $M = \rho(-\pi)$.

2. Unicité Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$. Soient $\theta_1 \in]-\pi,\pi]$ et $\theta_2 \in]-\pi,\pi]$ tels que $\rho(\theta_1) = M$ et $\rho(\theta_2) = M$. Nous en déduisons :

$$-2\pi < \theta_1 - \theta_2 < 2\pi \quad \text{et} \quad (\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 = \theta_2 + k2\pi)$$

à l'aide du résultat établi en 1. Ainsi :

$$-2\pi < k2\pi < 2\pi\,.$$

Comme k est entier, il vient $k = 0$ et donc $\theta_1 = \theta_2$.

C2.10. Définition (relation de congruence modulo 2π) Soient x et y des réels. On dit que x et y sont <u>congrus modulo 2π</u>, et on note :

$$\boxed{x \equiv y \quad [2\pi]}$$

s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k2\pi$.

C2.11. Propriété (la relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence) La relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence, i.e. elle satisfait les trois propriétés suivantes.

1. *Réflexivité* Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{x \equiv x \quad [2\pi]\,.}$$
2. *Symétrie* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{(x \equiv y \quad [2\pi]) \iff (y \equiv x \quad [2\pi]).}$$
3. *Transitivité* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in \mathbb{R}$
$$\boxed{\left[(x \equiv y \quad [2\pi]) \text{ et } (y \equiv z \quad [2\pi])\right] \implies (x \equiv z \quad [2\pi]).}$$

C2.12. Généralisation de la relation de congruence modulo 2π Soit α un nombre réel fixé. Soient x et y des réels. On dit que x et y sont <u>congrus modulo α</u>, et on note :

$$\boxed{x \equiv y \quad [\alpha]}$$

s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$. La relation de congruence modulo α est, comme la relation de congruence modulo 2π, une relation d'équivalence (i.e. elle est réflexive, symétrique et transitive).

§ 3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

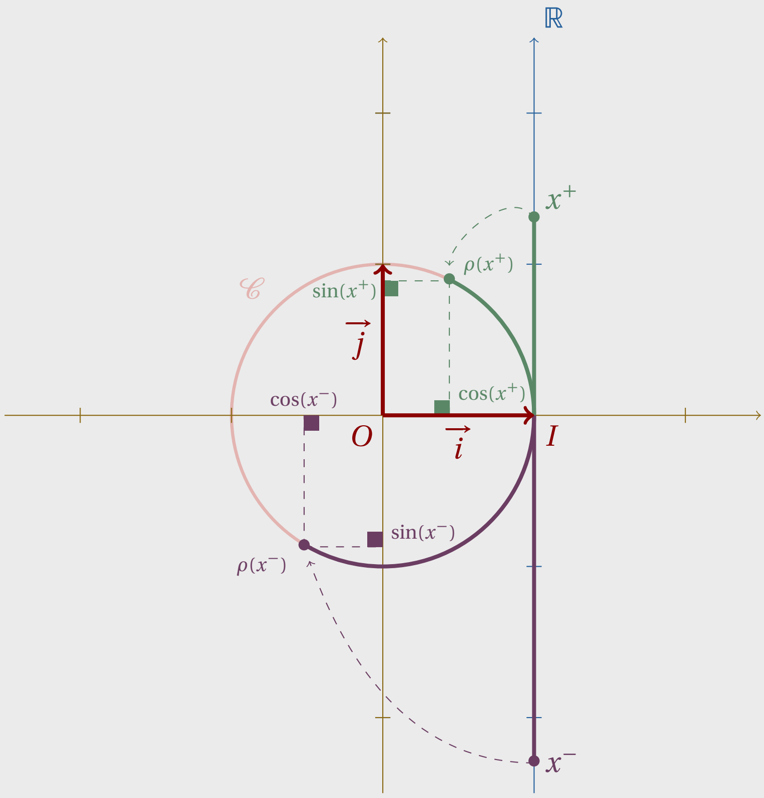
C2.13. Définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. On appelle <u>cosinus de x</u>, et on note $\cos(x)$, l'abscisse du point $\rho(x)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
2. On appelle <u>sinus de x</u>, et on note $\sin(x)$, l'ordonnée du point $\rho(x)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Ainsi les nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont-ils caractérisés par :

$$\boxed{\overrightarrow{O\rho(x)} = \cos(x)\,\overrightarrow{i} + \sin(x)\,\overrightarrow{j}\ .}$$



C2.14. Encadrement de cosinus et sinus Comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle $\mathscr{C}$ appartiennent à $[-1, 1]$:

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1\ .}$$

C2.15. Propriété (Relation de Pythagore) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\ .}$$

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après C2.5 :

$$(\star) \qquad \left\|\overrightarrow{O\rho(x)}\right\| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)}\,.$$

Comme $\rho(x)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$,

$$(\star\star) \qquad \left\|\overrightarrow{O\rho(x)}\right\| = 1\,.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

C2.16. Propriété (Effets de transformations affines sur cosinus et sinus) Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. *Effet de la transformation $x \longmapsto -x$ sur cosinus et sinus*

$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(-x) = -\sin(x)}$$

2. *Effet de la transformation $x \longmapsto \pi + x$ sur cosinus et sinus*

$$\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)}$$

3. *Effet de la transformation $x \longmapsto \pi - x$ sur cosinus et sinus*

$$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)}$$

4. *Effet de la transformation $x \longmapsto \frac{\pi}{2} - x$ sur cosinus et sinus*

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)}$$

5. *Effet de la transformation $x \longmapsto \frac{\pi}{2} + x$ sur cosinus et sinus*

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)}$$

Démonstration

1. Le point $\rho(-x)$ est le symétrique du point $\rho(x)$ par rapport à l'axe des abscisses.
2. Le point $\rho(\pi + x)$ est le symétrique du point $\rho(x)$ par rapport à l'origine O.
3. Le point $\rho(\pi - x)$ est le symétrique du point $\rho(x)$ par rapport à l'axe des ordonnées.
4. Le point $\rho\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est le symétrique du point $\rho(x)$ par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).
5. On applique les résultats 4 pour $-x$, puis les résultats 1.

C2.17. Propriétés (Valeurs remarquables de cosinus et sinus)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

§ 4 Équations et inéquations trigonométriques élémentaires

C2.18. Propriété (Cas d'égalité de deux cosinus) Soient x et a deux réels.

$$\cos(x) = \cos(a) \iff \left\{ \begin{array}{ll} \exists k \in \mathbb{Z} & x = a + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z} & x = -a + 2k\pi \end{array} \right.$$

Démonstration

L'égalité $\cos(x) = \cos(a)$ signifie que les points $\rho(x)$ et $\rho(a)$ du cercle $\mathscr{C}$ ont la même abscisse. Or il n'y a que deux points du cercle $\mathscr{C}$ qui ont pour abscisse $\cos(a)$: les points $\rho(a)$ et $\rho(-a)$. Par suite :

$$\cos(x) = \cos(a) \iff \big(\rho(x) = \rho(a) \quad \text{ou} \quad \rho(x) = \rho(-a)\big).$$

Enfin d'après la propriété C2.9 :

$$\big(\rho(x) = \rho(a) \quad \text{ou} \quad \rho(x) = \rho(-a)\big) \iff \left\{ \begin{array}{ll} \exists k \in \mathbb{Z} & x = a + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z} & x = -a + 2k\pi \end{array} \right. .$$

C2.19. Propriété (Cas d'égalité de deux sinus) Soient x et a deux réels.

$$\sin(x) = \sin(a) \iff \left\{ \begin{array}{ll} \exists k \in \mathbb{Z} & x = a + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z} & x = \pi - a + 2k\pi \end{array} \right.$$

Démonstration

L'égalité $\sin(x) = \sin(a)$ signifie que les points $\rho(x)$ et $\rho(a)$ du cercle $\mathscr{C}$ ont la même ordonnée. Or il n'y a que deux points du cercle $\mathscr{C}$ qui ont pour ordonnée $\sin(a)$: les points $\rho(a)$ et $\rho(\pi - a)$. Par suite :

$$\sin(x) = \sin(a) \iff \big(\rho(x) = \rho(a) \quad \text{ou} \quad \rho(x) = \rho(\pi - a)\big).$$

Enfin d'après la propriété C2.9 :

$$\big(\rho(x) = \rho(a) \quad \text{ou} \quad \rho(x) = \rho(\pi - a)\big) \iff \left\{ \begin{array}{ll} \exists k \in \mathbb{Z} & x = a + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{Z} & x = \pi - a + 2k\pi \end{array} \right. .$$

C2.20. Exercice (Équations trigonométriques élémentaires)

1. Résoudre l'équation $\cos(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\cos^2(x) = 1$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$.
3. Résoudre l'équation $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, puis l'équation $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'inconnue $x \in [0, \pi]$.
4. Résoudre l'équation $\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
5. Résoudre l'équation $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C2.21. Exercice (inéquations trigonométriques)

1. Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$, en s'appuyant sur le cercle unité.
2. Résoudre l'inéquation $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$, en s'appuyant sur le cercle unité.

§ 5 Formulaire de trigonométrie pour cosinus et sinus

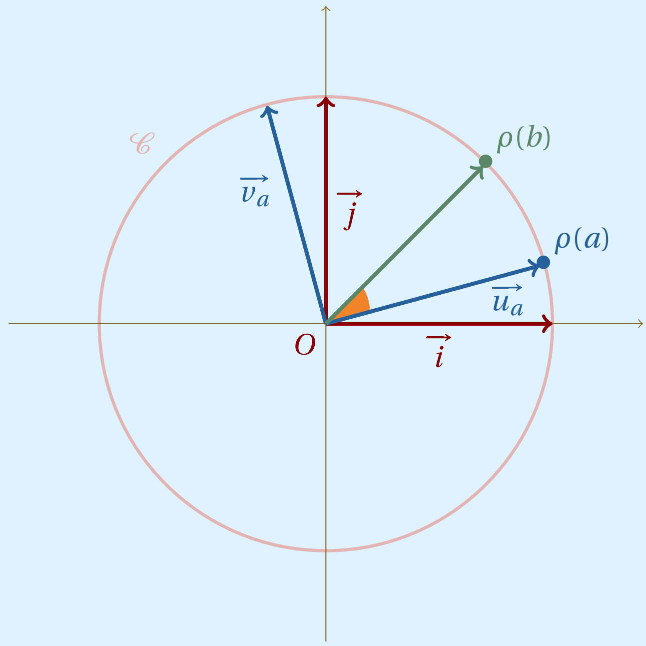
C2.22. Propriétés (Formules d'addition pour cosinus et sinus) Soient a et b des réels.

(1) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ (2) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

(3) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ (4) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Démonstration

$\boxed{(1),(2)}$ Posons $\overrightarrow{u_a} = \overrightarrow{O\rho(a)}$ et introduisons le vecteur $\overrightarrow{v_a}$ tel que le repère $\left(O, \overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{v_a}\right)$ est orthonormé et direct, i.e. $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{O\rho\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.



Comme l'angle orange $\left(\widehat{\overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{O\rho(b)}}\right)$ a pour mesure $b-a$ modulo 2π, les coordonnées de $\rho(b)$ dans la base $\left(\overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{v_a}\right)$ sont $(\cos(b-a), \sin(b-a))$, d'où :

$$(\star) \qquad \overrightarrow{O\rho(b)} = \cos(b-a)\,\overrightarrow{u_a} + \sin(b-a)\,\overrightarrow{v_a}\,.$$

Comme $\overrightarrow{u_a} = \cos(a)\,\overrightarrow{i} + \sin(a)\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v_a} = -\sin(a)\,\overrightarrow{i} + \cos(a)\,\overrightarrow{j}$, nous déduisons de $(\star)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O\rho(b)} &= (\cos(b-a)\cos(a) - \sin(b-a)\sin(a))\,\overrightarrow{i} \\ &+ (\cos(b-a)\sin(a) + \sin(b-a)\cos(a))\,\overrightarrow{j}\,. \end{aligned}$$

Or :

$$\overrightarrow{O\rho(b)} = \cos(b)\ \overrightarrow{i}\ + \sin(b)\ \overrightarrow{j}$$

par définition de $\cos(b)$ et $\sin(b)$. Par unicité des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{O\rho(b)}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(b) = \cos(b-a)\cos(a) - \sin(b-a)\sin(a) \\ \text{et} \\ \sin(b) = \cos(b-a)\sin(a) + \sin(b-a)\cos(a)\,. \end{array}\right.$$

Ces résultats ont été établis pour des réels a et b quelconques. En les spécialisant à $a \leftarrow a$ et $b \leftarrow a+b$, nous obtenons les identités (1) et (2).

$\boxed{(3),(4)}$ Ces identités se déduisent de (1) et (2), en spécialisant à $a \leftarrow a$ et $b \leftarrow -b$ et en appliquant les identités 1. de C2.16.

C2.23. Transformation de Fresnel Soient a, b, x des réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$. La transformation de Fresnel permet d'écrire la quantité $a\cos(x) + b\sin(x)$ sous la forme :

$$\boxed{a\cos(x) + b\sin(x) = r\ \cos(x-\theta) \text{ où } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in]-\pi,\pi]}$$

comme nous l'expliquons ci-dessous.

- Comme $a^2+b^2>0$:

$$(\star) \qquad a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right).$$

- Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

le point M du plan de coordonnées $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ appartient au cercle unité $\mathscr{C}$. D'après l'assertion 2 de C2.9, il existe un (unique) $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $M = \rho(\theta)$, d'où :

$$(\star\star) \qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\theta) \text{ et } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\theta)\,.$$

- De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\ (\cos(\theta)\cos(x) + \sin(\theta)\sin(x)) \underset{\text{C2.22}}{=} \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{=r>0}\cos(x-\theta).$$

C2.24. Exercice (équations trigonométriques de la forme $a\cos(x) + b\sin(x) = c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$)

1. Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\cos(x) - \sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation $3\cos(x) + 4\sin(x) = 6$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C2.25. Corollaire (formule de duplication de cosinus et sinus) Soit $a \in \mathbb{R}$.

(1) $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ (2) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstration

$\boxed{(1)}$ On applique l'identité (1) de C2.22 en spécialisant à $a \leftarrow a$ et $b \leftarrow a$ pour obtenir :

$$(\star) \qquad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)\ .$$

D'après la relation de Pythagore C2.15,

$$(\star\star) \qquad \sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)\ .$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons (1).

$\boxed{(2)}$ On applique l'identité (2) de C2.22 en spécialisant à $a \leftarrow a$ et $b \leftarrow a$ pour obtenir (2).

C2.26. Exercice (Valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$)

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)$
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
3. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C2.27. Exercice (Équation trigonométrique) Résoudre l'équation $\sin^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C2.28. Exercice (Primitives de $\cos^2$ et $\sin^2$)

1. Calculer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \cos^2(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de la fonction $g : x \longmapsto \sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$.

C2.29. Corollaire (transformation produit-somme pour cosinus et sinus) Soient a et b des réels.

(1) $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ (2) $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$

(3) $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$

Démonstration

$\boxed{(1),(2)}$ D'après les formules d'addition C2.22 :

$$\begin{array}{llcl} L_1 & \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ L_2 & \cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{array}$$

En effectuant l'opération $L_1 + L_2$, nous déduisons :

$$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

puis l'identité (1).
En effectuant l'opération $L_2 - L_1$, nous déduisons :

$$\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

puis l'identité (2).

$\boxed{(3)}$ D'après les formules d'addition C2.22 :

$$\begin{array}{llcl} L_3 & \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \\ L_4 & \sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \end{array}$$

En effectuant l'opération $L_3 + L_4$, nous déduisons :

$$\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

puis l'identité (3).

C2.30. Exercice (équation trigonométrique) Résoudre l'équation $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

C2.31. Exercice (Primitives de $\cos^3$) Calculer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

§ 6 Fonctions cosinus et sinus

C2.32. Définition (fonctions cosinus et sinus) Les fonctions cosinus et sinus, notées respectivement cos et sin sont définies par :

$$\cos \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \sin \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x)\,. \end{array} \right.$$

C2.33. Proposition (Premières propriétés des fonctions cosinus et sinus)

1. La fonction cos est paire, i.e. :
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$
et 2π-périodique, i.e. :
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad \cos(x+2k\pi) = \cos(x)\,.$$
2. La fonction sin est impaire, i.e. :
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
et 2π-périodique, i.e. :
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad \sin(x+2k\pi) = \sin(x)\,.$$

C2.34. Restriction du domaine d'étude des fonctions cos et sin Comme la fonction cos (resp. sin) est 2π-périodique, nous pouvons restreindre son étude de $\mathbb{R}$ à $[-\pi,\pi]$. Puisque la fonction cos (resp. sin) est de plus paire (resp. impaire), son étude peut encore être restreinte de $[-\pi,\pi]$ à $[0,\pi]$.'

C2.35. LEMME (DEUX INÉGALITÉS GÉOMÉTRIQUES FONDAMENTALES POUR COSINUS ET SINUS)

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 1-\cos(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

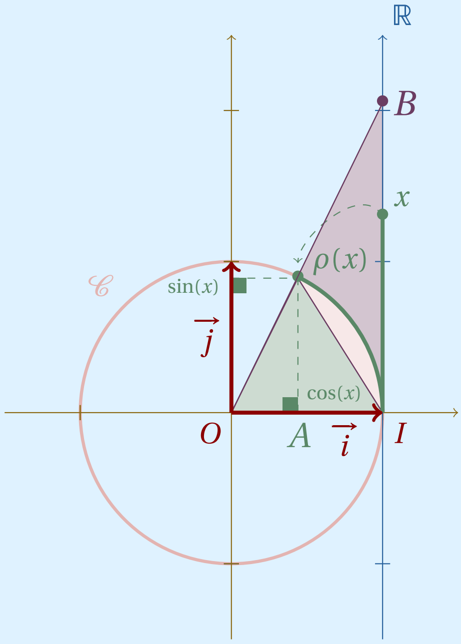
Démonstration

$\boxed{1}$ Soit x un réel tel que $0 < x < \pi/2$. Notons :

- $\mathscr{A}_1$ l'aire du triangle $O\rho(x)I$;
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du secteur angulaire $OI\rho(x)$;
- $\mathscr{A}_3$ l'aire du triangle OIB.

Nous observons $\mathscr{A}_1 \leqslant \mathscr{A}_2 \leqslant \mathscr{A}_3$ sur la figure ci-contre et calculons ces trois aires :

- $\mathscr{A}_1 = \sin(x)/2$;
- $\mathscr{A}_2 = x/2$ car la mesure principale de l'angle $\widehat{IO\rho(x)}$ est x ;
- $\mathscr{A}_3 = \sin(x)/(2\cos(x))$ (appliquer le théorème de Thalès aux triangles $OA\rho(x)$ et OIB).

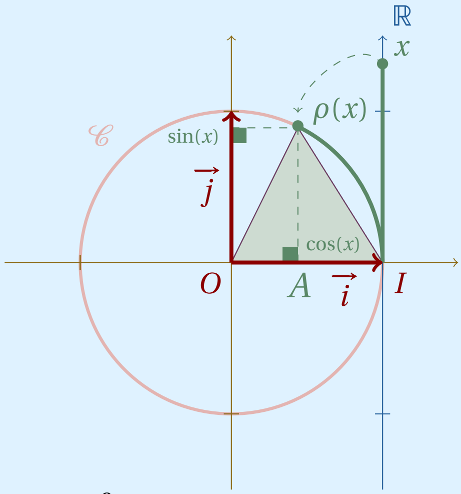


L'inégalité $\mathscr{A}_1 \leqslant \mathscr{A}_2 \leqslant \mathscr{A}_3$ se réécrit :

$$\frac{\sin(x)}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

puis $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$.

$\boxed{2}$ Soit x un réel tel que $0 < x < \pi/2$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle (vert) $\rho(x)AI$, il vient :



$$\underbrace{AI^2}_{(1-\cos(x))^2} + \underbrace{A\rho(x)^2}_{\sin^2(x)} = I\rho(x)^2 \leqslant \underbrace{\left(\text{longueur } \widehat{I\rho(x)}\right)^2}_{x^2}$$

qui livre $1-\cos(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

$\boxed{3}$ Les inégalités $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$ et $1-\cos(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$ on été obtenues pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En utilisant les propriétés de parité des fonctions cos, sin, $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$, on les étant à tout réel appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

C2.36. PROPRIÉTÉS (LIMITES FONDAMENTALES POUR LES FONCTIONS cos ET sin)

$$\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{1-\cos(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

C2.37. EXERCICE Justifier que les limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(4x)}{3x^2}$ existent et les calculer.

C2.38. Théorème (dérivabilité et dérivée des fonctions cos et sin)

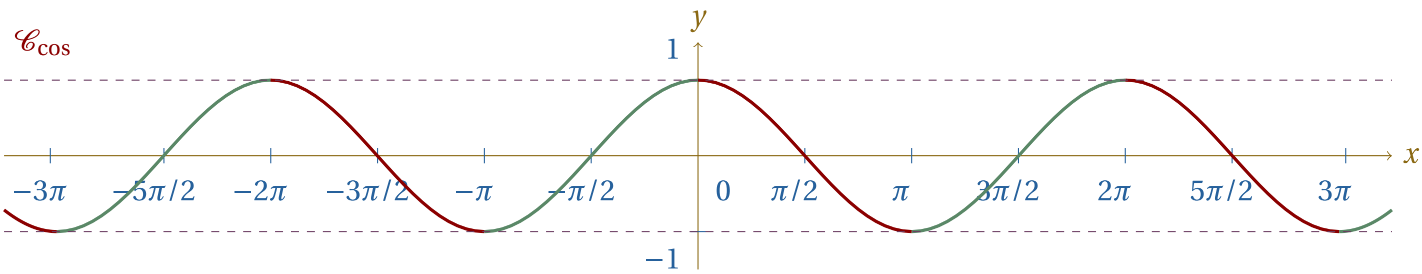
1. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos'(x) = -\sin(x)\,.$$
2. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin'(x) = \cos(x)\,.$$

C2.39. Corollaire (continuité des fonctions cos et sin) Les fonction cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

C2.40. Étude de la fonction cos De C2.38, nous déduisons le tableau de variations suivant :

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

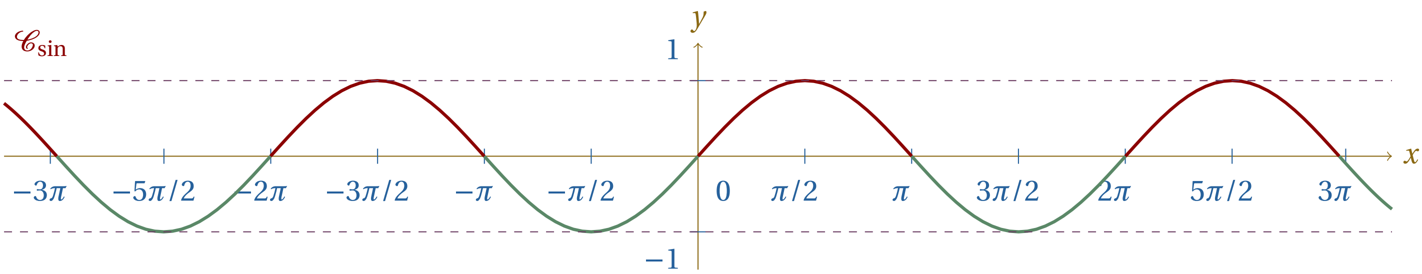
puis l'allure de la courbe représentative de la fonction cos donnée ci-dessous.



C2.41. Étude de la fonction sin De C2.38, nous déduisons le tableau de variations suivant :

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

puis l'allure de la courbe représentative de la fonction sin donnée ci-dessous.



C2.42. EXERCICE Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x)\cos^3(x) \end{array} \right. .$$

1. Étudier la périodicité puis la parité de f et proposer un intervalle d'étude I réduit.
2. Étudier les variations de la fonction f sur I.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative (complète) de f.

C2.43. PROPOSITION (ENCADREMENT DE LA VALEUR ABSOLUE D'UN SINUS)

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(x)| \leqslant |x| \ .$$

Esquisse de démonstration

- Pour des raisons de parité, il suffit de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
- Si x est un réel tel que $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, alors :

$$|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant x = |x| \ .$$

- Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité à établir se reformule comme suit :

$$(\star) \qquad \sin(x) \leqslant x \ .$$

  on peut s'appuyer sur C2.35 ou bien étudier la fonction « différence » définie par :

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) - x \end{array} \right.$$

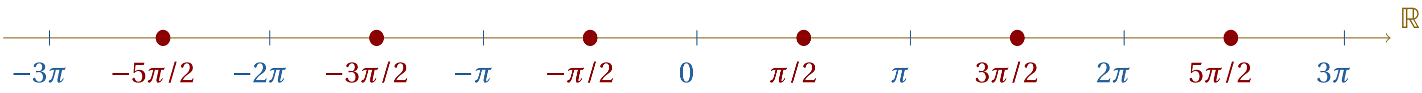
  pour démontrer $(\star)$.

§ 7 Fonction tangente

C2.44. L'ensemble $\mathscr{D}$ des réels ayant un cosinus non nul Dans la question 1 de l'exercice C2.20, nous avons résolu l'équation $\cos(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et établi :

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos(x) = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

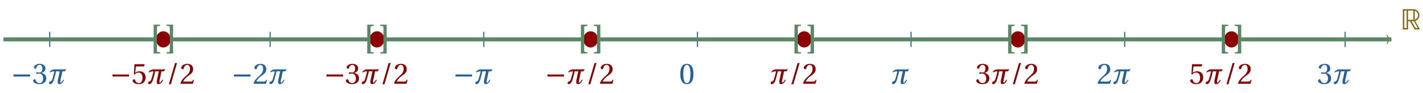
que nous illustrons ci-dessous, en représentant quelques uns de ces éléments en rouge.



L'ensemble $\mathscr{D}$ des nombres réels dont le cosinus est <u>non nul</u> est donc :

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos(x) = 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$$

que l'on peut représenter en vert comme ci-dessous.



Ainsi obtenons-nous la description de l'ensemble $\mathscr{D}$ suivante.

$$\mathscr{D} = \ldots \cup \left]-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right[\cup \ldots = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + \ell\pi, \frac{\pi}{2} + (\ell+1)\pi\right[.$$

Il ressort de cette étude que :

$$\boxed{\mathscr{D} := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos(x) \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + \ell\pi, \frac{\pi}{2} + (\ell+1)\pi\right[.}$$

C2.45. Définition (fonction tangente) La fonction tangente, notée tan, est définie par :

$$\tan \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + \ell\pi, \frac{\pi}{2} + (\ell+1)\pi\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} . \end{array} \right.$$

C2.46. Proposition (effets de deux transformations affines sur tangente)

1. *Effet de la transformation affine $x \longmapsto \pi + x$ sur tangente*

$$\boxed{\forall\, x \in \mathscr{D} \qquad \pi + x \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad \tan(\pi + x) = \tan(x)}$$

2. *Effet de la transformation affine $x \longmapsto \pi - x$ sur tangente*

$$\boxed{\forall\, x \in \mathscr{D} \qquad \pi - x \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x)}$$

C2.47. Proposition (Premières propriétés de la fonction tangente) La fonction tan est impaire, i.e. :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D} \qquad -x \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad \tan(-x) = -\tan(x)}$$

et π-périodique, i.e. :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \qquad x + k\pi \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad \tan(x + k\pi) = \tan(x)\,.}$$

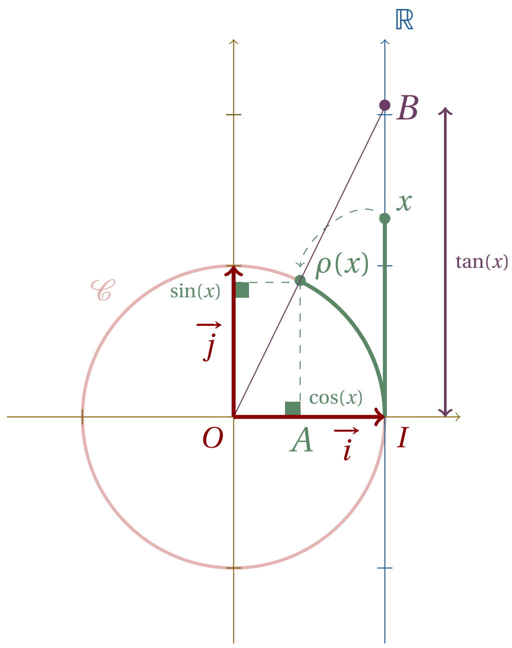
C2.48. Exercice Calculer $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\tan\left(\frac{35\pi}{3}\right)$.

C2.49. Restriction du domaine d'étude de la fonction tan Comme la fonction tan est π-périodique, nous pouvons restreindre son étude de $\mathscr{D}$ à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque la fonction tan est de plus impaire, son étude peut encore être restreinte de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

C2.50. Interprétation géométrique de $\tan(x)$ où $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

Soit x un réel tel que $0 \leqslant x < \pi/2$. Notons B le point d'intersection de :

- la droite $(O\rho(x))$;
- la droite réelle qui s'enroule autour du cercle, i.e. la droite passant par le point I et dirigée par le vecteur $\vec{j}$.



En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles rectangles $OA\rho(x)$ et OIB, il vient :

$$\frac{OA}{AI} = \frac{A\rho(x)}{IB}$$

égalité qui se réécrit :

$$\frac{\cos(x)}{1} = \frac{\sin(x)}{IB}\,.$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{\tan(x) = IB\,.}$$

C2.51. Théorème (Dérivabilité et dérivée de la fonction tan) La fonction tangente est dérivable sur $\mathscr{D} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + \ell\pi, \frac{\pi}{2} + (\ell+1)\pi\right[$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D} \qquad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,.$$

C2.52. Exercice (Dérivée seconde de la fonction tan) Justifier que la fonction tan est deux fois dérivable sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer, pour tout $x \in I$, $\tan''(x)$.

C2.53. COROLLAIRE (CONTINUITÉ DE LA FONCTION tan) La fonction tangente est continue sur $\mathscr{D}$.

C2.54. EXERCICE Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(x)}\, \mathrm{d}x$.

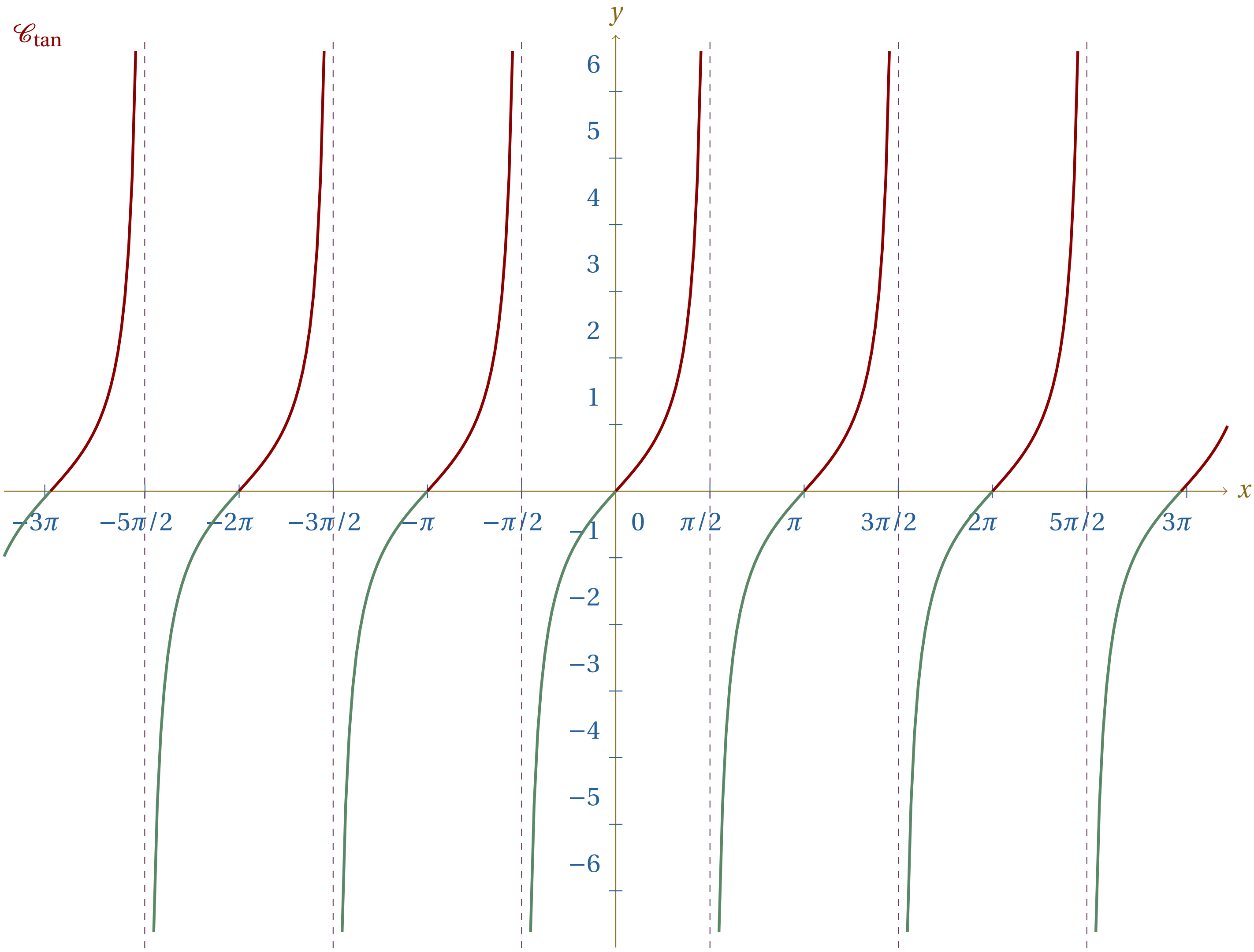
C2.55. EXERCICE

1. Étudier la limite éventuelle de la fonction tan en $\dfrac{\pi}{2}^-$.
2. Qu'en déduire quant à la limite éventuelle de la fonction tan en $-\dfrac{\pi}{2}^+$.
3. Interpréter géométriquement les résultats des questions 1 et 2.

C2.56. ÉTUDE DE LA FONCTION tan De C2.51, nous déduisons le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	1	$+$	‖
$\tan$	0	$\nearrow$	$+\infty$

puis l'allure de la courbe représentative de la fonction tan donnée ci-dessous.



C2.57. Propriété (Valeurs remarquables de tangente)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

C2.58. Propriété (Formules d'addition pour tangente) On rappelle que

$$\mathscr{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + \ell\pi, \frac{\pi}{2} + (\ell+1)\pi\right[$$

désigne le domaine de définition de la fonction tan.

1. Pour tout $a \in \mathscr{D}$, pour tout $b \in \mathscr{D}$ tels que $a + b \in \mathscr{D}$:
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}\ .$$
2. Pour tout $a \in \mathscr{D}$, pour tout $b \in \mathscr{D}$ tels que $a - b \in \mathscr{D}$:
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}\ .$$

C2.59. Exercice Soit x un réel tel que $x \not\equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$. Simplifier $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

C2.60. Exercice

1. Soit x un réel tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
2. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

C2.61. Propriétés (tangente de l'angle moitié) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
2. $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$
3. Si de plus $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

C2.62. Exercice (points du cercle unité à coordonnées rationnelles) On note I' le point du plan de coordonnées $(-1, 0)$, situé « à l'extrême ouest » du cercle unité $\mathscr{C}$. Soit M un point de $\mathscr{C} \setminus \{I'\}$ dont l'abscisse r_1 et l'ordonnée r_2 sont rationnelles. Démontrer qu'il existe un unique $t \in \mathbb{Q}$ tel que $r_1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $r_2 = \dfrac{2t}{1+t^2}$.