Chapitre n°1

Logique et raisonnement

C1.1. Objectifs

1. Apprendre à calculer avec des propositions logiques ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$).
2. Définir et manipuler le quantificateur universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$.
3. Utiliser les propositions logiques quantifiées pour écrire et manipuler des énoncés mathématiques précis.
4. Dégager des modes de raisonnements (formalisés à l'aide de propositions logiques).
5. Apprendre à écrire des raisonnements structurés au travers d'exemples.

§ 1 Calcul propositionnel

C1.2. Définition (proposition logique et valeur de vérité d'une telle)

1. Une proposition logique est un énoncé qui est soit vrai soit faux.
2. La valeur de vérité d'une proposition logique P est V si P est vraie et F si P est fausse.

C1.3. Exemple (propositions logiques)

1. « Paris est la capitale de la France. » est une proposition logique de valeur de vérité V.
2. « 3 est un nombre pair. » est une proposition logique de valeur de vérité F.
3. « Si n est un entier relatif tel que n^2 est pair, alors n est pair. » est une proposition logique de valeur de vérité V.
4. « Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. » est une proposition logique de valeur de vérité F.

C1.4. Conjecture de Goldbach (1742)

La conjecture de Goldbach s'énonce comme suit.

Tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux premiers.

Cet énoncé est formulé de manière précise, mais nous ne savons ni démontrer qu'il est vrai, ni qu'il est faux. Nous ne pouvons donc pas lui assigner une valeur de vérité.

C1.5. Définition (Négation d'une proposition logique $\neg$)

La négation d'une propriété logique P, notée $\neg P$, qui se lit « non P », est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

P	$\neg P$
V	F
F	V

C1.6. Définition (Disjonction de deux propositions logiques $\vee$)
Soient P et Q deux propositions logiques. La disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$, qui se lit « P ou Q », est fausse si et seulement si P et Q sont fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

C1.7. Définition (Conjonction de deux propositions logiques $\wedge$)
Soient P et Q deux propositions logiques. La conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$, qui se lit « P et Q », est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

C1.8. Exemples Soient P_1, P_3 des propositions logiques vraies et P_2, P_4 une proposition logique fausse. Quelle est la valeur de vérité de la proposition logique suivante ?

$$Q = \neg\,(\,(\,P_1 \vee (\,\neg P_2\,)\,)\,\wedge\,(\,(\,\neg P_3\,)\,\vee\,P_4\,)\,)$$

C1.9. Définition (Formules propositionnelles équivalentes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux formules $f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ et $g(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ construites à partir :

- de propositions logiques $P_1, P_2, \ldots, P_n$;
- des opérations logiques $\neg$, $\vee$ et $\wedge$;

sont équivalentes, ce qu'on note $f(P_1, P_2, \ldots, P_n) \equiv g(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, si quelles que soient les valeurs de vérité de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, les formules propositionnelles $f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ et $g(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ ont les mêmes valeurs de vérité.

C1.10. Exemple (propositions propositionnelles équivalentes) Si P et Q sont des propositions logiques, alors :

$$\neg\,(P \vee Q) \equiv (\,(\neg P) \wedge (\neg Q)\,)\,.$$

En effet :

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Nous avons démontré une des lois de De Morgan.

C1.11. Exercice Soient P, Q, R des propositions logiques. Démontrer que :

$$P \vee (\,Q \wedge R\,) \equiv (\,P \vee Q\,) \wedge (\,P \vee R\,)\,.$$

Cette propriété est appelée « distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$ ».

C1.12. PRINCIPE DE SUBSTITUTION Soit $f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ une formule propositionnelle construite à partir :

- de propositions logiques $P_1, P_2, \dots, P_n$;
- des opérations logiques $\neg$, $\vee$ et $\wedge$;

Soient $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ des propositions logiques.
Si P_1 a même valeur de vérité que Q_1, P_2 a même valeur de vérité que Q_2, ..., P_n a même valeur de vérité que Q_n, alors $f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ a même valeur de vérité que $f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$.

Justification

La valeur de vérité de $f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ dépend uniquement des valeurs de vérités de $P_1, P_2, \dots, P_n$.

C1.13. EXEMPLE Si $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ sont des propositions logiques telles que P_1 a même valeur de vérité que Q_1, P_2 a même valeur de vérité que Q_2, P_3 a même valeur de vérité que Q_3, alors :

$$P_1 \wedge \neg(P_2 \vee P_3) \text{ a même valeur de vérité que } Q_1 \wedge \neg(Q_2 \vee Q_3)\,.$$

C1.14. PROPRIÉTÉ (PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS $\neg$, $\vee$, $\wedge$) Soient P, Q, R des propositions logiques.

1. *Double négation*

$$\boxed{\neg(\neg P) \equiv P}$$

2. *Lois de De Morgan*

$$\boxed{\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q) \quad ; \quad \neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)}$$

3. *Associativité de $\vee$ et $\wedge$*

$$\boxed{(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \quad ; \quad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)}$$

4. *Commutativité de $\vee$ et $\wedge$*

$$\boxed{P \vee Q \equiv Q \vee P \quad ; \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P}$$

5. *Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$*

$$\boxed{P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \quad ; \quad (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)}$$

6. *Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$*

$$\boxed{P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad ; \quad (P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)}$$

Idée de démonstration

- Ces propriétés peuvent s'établir à l'aide de tables de vérité, comme en C1.10 et C1.11.
- Certaines propriétés peuvent se déduire d'autres. Cf. C1.15.

C1.15. EXERCICE Soit P et Q deux propositions logiques. Déduire la loi de De Morgan :

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

de celle établie en C1.10 et de la propriété de double négation.

C1.16. Remarque Les propriétés C1.14 des opérations logiques $\neg$, $\vee$ et $\wedge$ auront une incarnation en théorie des ensembles au travers des notions de complémentaire, de réunion et d'intersection.

C1.17. Exercice Soient P et Q des propositions logiques.

1. Démontrer $P \vee P \equiv P$ et $P \wedge P \equiv P$.
2. Développer et simplifier $P \vee (P \wedge Q)$.

§ 2 Implication et équivalence

C1.18. Définition (Implication $\Rightarrow$)

Soient P et Q deux propositions logiques. L'implication $P \Rightarrow Q$, qui se lit « P implique Q », est fausse si et seulement si Q est fausse bien que P soit vraie.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

C1.19. Exemple (valeurs de vérité d'implications)

1. L'implication (1 est pair) $\Rightarrow$ $(-2 \geqslant 0)$ est vraie.
2. L'implication (3 est impair) $\Rightarrow$ $(1 = 2)$ est fausse.

C1.20. Différence fondamentale entre $\Rightarrow$ et « donc » Soient P et Q deux propositions logiques. Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, la proposition P peut être fausse. Ainsi :

> la véracité de $P \Rightarrow Q$ ne signifie pas « P donc Q » qui, elle, suppose implicitement P vraie.

Le symbole $\Rightarrow$ ne sera jamais utilisé à la place de « donc » dans une rédaction.

C1.21. Une rédaction possible pour établir la véracité d'une implication Soient P et Q des propositions logiques. Comme l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie lorsque P est fausse, pour établir que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de considérer le cas où P est vraie.

Rédaction d'une démonstration de la véracité d'une implication

> Nous démontrons l'implication par un raisonnement direct.
>
> On suppose P vraie.
> On démontre que, sous cette hypothèse, Q est vraie.

C1.22. Exercice Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer :

$$(n \text{ est impair}) \Rightarrow (n^3 \text{ est impair}).$$

C1.23. PROPRIÉTÉ (EXPRESSION DE L'IMPLICATION À L'AIDE DE ¬ ET ∨) Soient P et Q deux propositions logiques.

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q)}$$

Démonstration

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

C1.24. PROPRIÉTÉ (EXPRESSION DE LA NÉGATION D'UNE IMPLICATION À L'AIDE DE ¬ ET ∧) Soient P et Q deux propositions logiques.

$$\boxed{\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\neg Q)}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \neg(P \Rightarrow Q) &\equiv \neg((\neg P) \vee Q) && \text{[C1.23]} \\ &\equiv (\neg(\neg P)) \wedge (\neg Q) && \text{[Loi de De Morgan]} \\ &\equiv P \wedge (\neg Q) && \text{[double négation]} \end{aligned}$$

C1.25. PROPRIÉTÉ (MODUS PONENS) Soient P et Q deux propositions logiques. La proposition logique :

$$\boxed{(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Longrightarrow Q}$$

est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q.

C1.26. EXERCICE Soient P, Q, R deux propositions logiques.

1. Démontrer :
$$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv ((P \vee Q) \Rightarrow R)\,.$$
Cette propriété constitue le fondement du raisonnement par disjonction de cas.
2. Démontrer :
$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \equiv (P \Rightarrow (Q \wedge R))\,.$$

C1.27. CONDITION NÉCESSAIRE ET CONDITION SUFFISANTE Soit P et Q deux propositions logiques. La véracité de l'implication $P \Rightarrow Q$ s'exprime de deux manières.

- Q est une <u>condition nécessaire</u> à P ;
- P est une <u>condition suffisante</u> à Q.

C1.28. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{Z}$. Compléter la phrase suivante en ajoutant « nécessaire » ou « suffisante » ou « nécessaire et suffisante ».

« n est divisible par 10 » est une condition .... à « n est pair ».

Justifier votre réponse.

C1.29. EXERCICE Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[-1,1]$. Compléter la phrase suivante en ajoutant « nécessaire » ou « suffisante » ou « nécessaire et suffisante ».

« $f'(0) = 0$ » est une condition .... à « f admet un extremum en 0 ».

Justifier votre réponse.

C1.30. EXERCICE Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-1,1]$. Compléter la phrase suivante en ajoutant « nécessaire » ou « suffisante » ou « nécessaire et suffisante ».

« $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ » est une condition .... à « pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) \geqslant 0$ ».

Justifier votre réponse.

C1.31. DÉFINITION (RÉCIPROQUE ET CONTRAPOSÉE D'UNE IMPLICATION) Soient P et Q deux propositions logiques.

1. La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est :
$$\boxed{Q \Rightarrow P\ .}$$
2. La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est :
$$\boxed{(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)\ .}$$

C1.32. EXERCICE Soient P et Q deux propositions logiques. Justifier :

$$(P \Rightarrow Q) \not\equiv (Q \Rightarrow P)\,.$$

On veillera à ne jamais confondre une implication et sa réciproque.

C1.33. PROPRIÉTÉ (UNE IMPLICATION ET SA CONTRAPOSÉE ONT MÊME VALEUR DE VÉRITÉ) Soient P et Q deux propositions logiques. Alors :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))\,.$$

Cette propriété constitue le fondement du raisonnement par contraposition.

C1.34. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8 \quad \Rightarrow \quad n \text{ est pair.}$$

C1.35. EXERCICE Soient P, Q et R des propositions logiques. Justifier :

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \not\equiv (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$$

Nous en déduisons que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ est ambigu puisque le choix de parenthésage influe sur la valeur de vérité. Ainsi, n'écrirons-nous jamais plusieurs symboles $\Rightarrow$ sur une même ligne.

C1.36. Définition (Équivalence $\Leftrightarrow$)
Soient P et Q deux propositions logiques. L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, qui se lit « P équivaut à Q », est vraie si et seulement si P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

C1.37. Propriété (Expression de l'équivalence à l'aide de deux implications) Soient P et Q deux propositions logiques.

$$\boxed{(P \Leftrightarrow Q) \;\equiv\; ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))}$$

Cette propriété constitue le fondement d'une démonstration d'équivalence par double implication.

C1.38. Condition nécessaire et suffisante Soient P et Q deux propositions logiques. Dire que l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie signifie que P est une condition nécessaire et suffisante à Q. En effet, la véracité de $P \Leftrightarrow Q$ signifie que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

C1.39. Rédaction d'un raisonnement par double implication Soient P et Q deux propositions logiques. Pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$, on peut procéder en deux temps, comme suit.

Rédaction d'une démonstration de la véracité d'une équivalence

Nous raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose P vraie.
On démontre que, sous cette hypothèse, Q est vraie.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose Q vraie.
On démontre que, sous cette hypothèse, P est vraie.

On prendre garde à bien démontrer deux implications.

C1.40. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$n \text{ est pair} \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \text{ est pair.}$$

C1.41. Exercice (Commutativité de l'équivalence) Soient P et Q deux propositions logiques. Justifier :

$$(P \Leftrightarrow Q) \;\equiv\; (P \Leftrightarrow Q)\,.$$

§ 3 Quantificateurs

C1.42. Définition (prédicat) Soit x une variable représentant un élément d'un ensemble E.

- Un prédicat $P(x)$ est un énoncé dans lequel figure la variable x et qui, pour chaque valeur que peut prendre x, est soit vrai soit faux.
- $P(x)$ peut être vrai pour certaines valeurs de x et faux pour d'autres.

C1.43. Exemple (prédicats)

1. Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $P(n) =$ « n est pair » est un prédicat.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $P(n) =$ « $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$ » est un prédicat.
3. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $P(x) =$ « $x^2 \geqslant 0$ » est un prédicat.
4. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $P(f) =$ « f est croissante » est un prédicat.

C1.44. Définition (Quantificateurs $\forall$ et $\exists$) Soit $P(x)$ un prédicat en la variable x représentant un élément d'un ensemble E.

1. Si le prédicat $P(x)$ est vrai pour toute valeur prise par x, nous dirons que la proposition :
$$\boxed{\forall\, x \in E \quad P(x)}$$
est vraie. Le quantificateur universel $\forall$ se lit « pour tout ».
2. Si le prédicat $P(x)$ est vrai pour (au moins) une valeur prise par x, nous dirons que la proposition :
$$\boxed{\exists\, x \in E \quad P(x)}$$
est vraie. Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « il existe ».

C1.45. Exercice (élévation d'une égalité au carré) La proposition quantifiée :

$$\forall\, x \in [-2, +\infty[\quad \sqrt{x+2} = x \iff x+2 = x^2$$

est-elle vraie ?

C1.46. Propositions quantifiées générales Les énoncés mathématiques auront souvent la forme suivante :

$$q_1\, x_1 \in E_1 \quad q_2\, x_2 \in E_2 \quad \dots \quad q_n\, x_n \in E_n \quad P(x_1, \dots, x_n)$$

où :

- $q_1 \in \{\forall, \exists\}, q_2 \in \{\forall, \exists\}, \dots, q_n \in \{\forall, \exists\}$ sont des quantificateurs ;
- $P(x_1, \dots, x_n)$ est un prédicat dépendant des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ pour lesquels les ensembles d'appartenance sont spécifiés : l'ensemble E_1 pour x_1, l'ensemble E_2 pour x_2, ..., l'ensemble E_n pour x_n.

C1.47. Exercice Comparer les deux propositions quantifiées suivantes.

$$P = \left(\exists\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y\right) \qquad\qquad Q = \left(\forall\, y \in \mathbb{R} \quad \exists\, x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y\right)$$

C1.48. Ordre des quantificateurs Dans les énoncés mathématiques, plusieurs quantificateurs seront souvent présents. Cf. C1.51.

On veillera à <u>ne jamais</u> modifier l'ordre des quantificateurs au risque de modifier la valeur de vérité de la proposition quantifiée. Cf. C1.47.

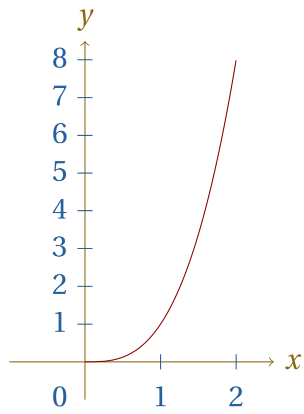
C1.49. Exemple (La fonction cube croissante sur $\mathbb{R}_+$)

Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$

dont une portion du graphe est représentée ci-contre.

1. Écrire la proposition « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ » sous forme d'une proposition quantifiée.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, sans recours au calcul différentiel.



C1.50. Propriété (Négation d'une proposition quantifiée) Soit $P(x)$ un prédicat en la variable x représentant un élément d'un ensemble E.

1. Intuitivement, dire que $P(x)$ n'est pas vraie pour tout $x \in E$ revient à affirmer qu'il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $P(x)$ est faux. D'où :

$$\neg(\forall x \in E \quad P(x)) \quad = \quad \exists x \in E \quad \neg P(x)$$

2. De manière analogue, dire qu'il n'existe aucun $x \in E$ tel que $P(x)$ est vrai revient à affirmer que $P(x)$ est faux pour tout $x \in E$. D'où :

$$\neg(\exists x \in E \quad P(x)) \quad = \quad \forall x \in E \quad \neg P(x)$$

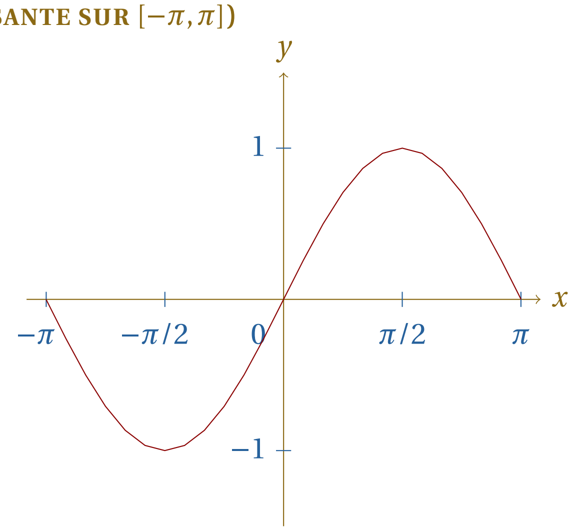
C1.51. Exemple (La fonction sinus n'est pas croissante sur $[-\pi, \pi]$)

Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

dont le graphe est représenté ci-contre.

1. Écrire la proposition « la fonction f n'est pas croissante sur $[-\pi, \pi]$ » sous forme d'une proposition quantifiée.
2. Démontrer que la fonction f est n'est pas croissante sur $[-\pi, \pi]$.



C1.52. Exemple (écriture formelle de la divergence d'une suite)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si :
$$\exists \ell \in \mathbb{R} \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\,.$$
Écrire la proposition « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (i.e. ne converge pas) » sous forme d'une proposition quantifiée.
2. Démontrer que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

§ 4 Raisonnement par disjonction de cas

C1.53. Principe et rédaction d'un raisonnement par disjonction de cas

- Soient P, Q et R des propositions logiques. Nous avons établi au 2. de C1.26 :
$$\boxed{\left((P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)\right) \equiv \left((P \vee Q) \Longrightarrow R\right).}$$
- Ainsi démontrer que l'implication $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ est vraie revient à démontrer que <u>les deux implications</u> $P \Longrightarrow R$ et $Q \Longrightarrow R$ sont vraies.
- On peut donc rédiger une démonstration de la véracité de $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ comme suit. Cf. C1.21.

Rédaction d'un raisonnement par disjonction de cas

Nous raisonnons par disjonction de cas, en scindant l'étude en deux parties.

- *1er cas* On suppose que P est vraie et on démontre que, sous cette hypothèse, R est vraie.
- *2ème cas* On suppose que Q est vraie et on démontre que, sous cette hypothèse, R est vraie.

C1.54. Exercice

Démontrer :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x-1| \leqslant x^2 - x + 1\,.$$

C1.55. Généralisation du raisonnement par disjonction de cas

- Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $n \geqslant 2$. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et R des propositions logiques. Le résultat 2. de C1.26 admet la généralisation suivante.
$$\boxed{\left((P_1 \Longrightarrow R) \wedge (P_2 \Longrightarrow R) \wedge \ldots \wedge (P_n \Longrightarrow R)\right) \equiv \left((P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \Longrightarrow R\right)}$$
- Ainsi démontrer que l'implication $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ est vraie revient à démontrer que <u>les n implications</u> $P_1 \Longrightarrow R$, $P_2 \Longrightarrow R$, …, $P_n \Longrightarrow R$ sont vraies.
- On peut donc rédiger une démonstration de la véracité de $(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \Longrightarrow R$ comme suit.

Rédaction d'un raisonnement par disjonction de cas généralisé

Nous raisonnons par disjonction de cas, en scindant l'étude en n parties.

- *1er cas* On suppose que P_1 est vraie et on démontre que, sous cette hypothèse, R est vraie.
- *2ème cas* On suppose que P_2 est vraie et on démontre que, sous cette hypothèse, R est vraie.

$$\vdots$$

- *$n$ème cas* On suppose que P_n est vraie et on démontre que, sous cette hypothèse, R est vraie.

C1.56. Exercice Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{Z}\,.$$

§ 5 Raisonnement par contraposition

C1.57. Principe et rédaction d'un raisonnement par contraposition

- Soient P et Q des propositions logiques. Nous avons établi en C1.33 :

$$\boxed{(P \implies Q) \equiv ((\neg Q) \implies (\neg P))}$$

- Ainsi démontrer que l'implication $P \implies Q$ est vraie revient à démontrer que l'implication $(\neg Q) \implies (\neg P)$ est vraie.
- On peut donc rédiger une démonstration de la véracité de $P \implies Q$ comme suit.

Rédaction d'un raisonnement par contraposition

> Nous démontrons l'implication en raisonnant par contraposition.
>
> On suppose $\neg Q$ vraie.
> On démontre que, sous cette hypothèse, $\neg P$ est vraie.

C1.58. Exercice Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer :

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad |a| \leqslant \varepsilon\right) \implies a = 0\,.$$

§ 6 Raisonnement par l'absurde

C1.59. Principe et rédaction d'un raisonnement par l'absurde

- Soit P une proposition logique. Supposons qu'il existe une proposition logique Q telle que :
  — l'implication $\neg P \implies Q$ est vraie;
  — Q est fausse.
  Alors, d'après la table de vérité de l'implication C1.18, $\neg P$ fausse, i.e. P est vraie.
- Ainsi, pour démontrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et en déduire une proposition fausse (on parle de contradiction).

Rédaction d'un raisonnement par l'absurde

> Nous raisonnons par l'absurde.
>
> On suppose $\neg P$ vraie.
> On écrit une chaîne de déductions qui aboutit à une proposition fausse.

C1.60. Exercice Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

§ 7 Raisonnement par analyse-synthèse

C1.61. Principe et rédaction d'un raisonnement par analyse-synthèse

- Il s'agit d'un mode de raisonnement fort utile pour démontrer qu'un objet vérifiant certaines propriétés existe.
- On procède en deux temps, qui doivent se distinguer nettement dans la structure de la rédaction : la phase d'analyse et la phase de synthèse.
- *Phase d'analyse (ou recherche d'une condition nécessaire)* On suppose que l'objet existe et on essaie d'en déduire des propriétés qui nous aide à en obtenir une description (e.g. une « formule »).
- **N.B.** La phase d'analyse s'achève par une proposition d'objet qui est un candidat pour vérifier les conditions requises.
- *Phase de synthèse (ou recherche d'une condition suffisante)* On considère le candidat que l'on a identifié en fin d'analyse et on vérifie qu'il vérifie toutes les propriétés demandées.
- **N.B.** Si en fin d'analyse, un unique candidat a été obtenu, nous pouvons conclure, à la fin de la synthèse que l'objet recherché existe et est unique.

Rédaction d'un raisonnement par analyse-synthèse

Nous raisonnons par analyse-synthèse.

• *Analyse* Supposons qu'il existe un objet vérifiant toutes les propriétés demandées. Alors

$$\vdots$$

Nous proposons :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

comme candidat pour vérifier les conditions requises.

• *Synthèse* Nous vérifions si le candidat obtenu en fin d'analyse vérifie toutes les conditions de l'énoncé.

C1.62. Exercice Soit une fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une unique fonction $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et une unique fonction $i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = p(x) + i(x)\,.$$

§ 8 Raisonnements par récurrence

C1.63. Principe et rédaction d'un raisonnement par récurrence simple

- Soit $P(n)$ un prédicat en la variable n représentant un élément de $\mathbb{N}$.
- Un des axiomes de l'ensemble $\mathbb{N}$, appelé axiome de récurrence, s'énonce comme suit. L'implication

$$\boxed{\left[P(0) \wedge \left(\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Longrightarrow P(n+1)\right)\right] \implies \left(\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n)\right)}$$

  est vraie.
- Ainsi, pour démontrer que $(\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n))$, est vraie il suffit de démontrer que les deux propositions $P(0)$ et $(\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ sont vraies.

- La propriété $P(0)$ est appelée *initialisation*.
- La propriété $(\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est nommée *hérédité* ou *caractère héréditaire du prédicat*.
- On peut imager la récurrence par une chaîne de dominos numérotés numérotés $0, 1, 2, \ldots, n\ldots$ qui tombent. Si l'on fait tomber le premier domino numéroté 0 (initialisation) et si l'on sait que dès lors qu'un domino chute son successeur chute également (hérédité) alors tous les dominos vont tomber (axiome de récurrence).

Rédaction d'un raisonnement par récurrence simple

> • *Définition du prédicat* Nous définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
>
> Nous démontrer que $P(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en raisonnant par récurrence.
>
> • *Initialisation au rang 0* Nous démontrons que la proposition $P(0)$ est vraie.
>
> • *Hérédité* Soit n un entier naturel fixé tel que $P(n)$ est vraie. Nous démontrons, sous cette hypothèse, que $P(n+1)$ est vraie.

- Le rang initial peut être un autre entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ que 0. Dans ce cas, l'initialisation doit être établie au rang n_0 et le caractère héréditaire doit être démontré à partir du rang n_0.

Rédaction d'un raisonnement par récurrence simple (forme générale)

> • *Définition du prédicat* Nous définissons, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
>
> Nous démontrer que $P(n)$ est vraie, pour tout entier $n \geqslant n_0$, en raisonnant par récurrence.
>
> • *Initialisation au rang n_0* Nous démontrons que la proposition $P(n_0)$ est vraie.
>
> • *Hérédité* Soit $n \geqslant n_0$ un entier naturel fixé tel que $P(n)$ est vraie. Nous démontrons, sous cette hypothèse, que $P(n+1)$ est vraie.

C1.64. Exercice Démontrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

C1.65. Exercice Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$P(n) \; : \; «\, 9 \text{ divise } 10^n + 1 \,».$$

1. Démontrer que l'hérédité, i.e. :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left(9 \text{ divise } 10^n + 1 \implies 9 \text{ divise } 10^{n+1} + 1\right).$$

2. La propriété $P(n)$ est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

C1.66. PROPRIÉTÉ Soit $P(n)$ un prédicat en la variable n représentant un élément de $\mathbb{N}$. Les trois propositions logiques suivantes sont équivalentes.

1. $[P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Longrightarrow P(n+1))] \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$

2. $[P(0) \wedge P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \quad (P(n) \wedge P(n+1)) \Longrightarrow P(n+2))] \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$

3. $[P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \quad (P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)) \Longrightarrow P(n+1))] \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$

En vertu de l'axiome de récurrence, les trois propositions logiques ci-dessus sont toutes vraies.

C1.67. PRINCIPE ET RÉDACTION D'UN RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE DOUBLE

- Soit $P(n)$ un prédicat en la variable n représentant un élément de $\mathbb{N}$.
- D'après C1.66, l'implication

$$[P(0) \wedge P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \quad (P(n) \wedge P(n+1)) \Longrightarrow P(n+2))] \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$$

  est vraie.
- Ainsi, pour démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n))$, est vraie il suffit de démontrer que les trois propositions $P(0)$, $P(1)$ et $(\forall n \in \mathbb{N} \quad (P(n) \wedge P(n+1)) \Longrightarrow P(n+2))$ sont vraies.

Rédaction d'un raisonnement par récurrence simple

• *Définition du prédicat* Nous définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Nous démontrer que $P(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en raisonnant par récurrence double.

• *Initialisation aux rangs 0 et 1* Nous démontrons que les propositions $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

• *Hérédité* Soit n un entier naturel fixé tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Nous démontrons, sous cette hypothèse, que $P(n+2)$ est vraie.

- Comme en C1.63, le rang initial peut être un autre entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ que 0. Dans ce cas, l'initialisation doit être établie aux rangs n_0 et n_0+1, et le caractère héréditaire doit être démontré à partir du rang n_0.

C1.68. EXEMPLE Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 5$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2^{n+1} + 1\,.$$

C1.69. PRINCIPE ET RÉDACTION D'UN RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE FORTE

- Soit $P(n)$ un prédicat en la variable n représentant un élément de $\mathbb{N}$.
- D'après C1.66, l'implication

$$[\,P(0) \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)) \Longrightarrow P(n+1))\,] \Longrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n))$$

  est vraie.
- Ainsi, pour démontrer que $(\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n))$, est vraie il suffit de démontrer que les deux propositions $P(0)$ et $(\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)) \Longrightarrow P(n+1))$ sont vraies.

Rédaction d'un raisonnement par récurrence forte

• *Définition du prédicat* Nous définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Nous démontrer que $P(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en raisonnant par récurrence forte.

• *Initialisation au rang* 0 Nous démontrons que la proposition $P(0)$ est vraie.

• *Hérédité* Soit n un entier naturel fixé tel que les propositions $P(0), P(1), \ldots, P(n-1), P(n)$ sont vraies. Nous démontrons, sous cette hypothèse, que $P(n+1)$ est vraie.

- Comme en C1.63 et en C1.67, le rang initial peut être un autre entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ que 0. Dans ce cas, l'initialisation doit être établie aux rangs n_0 et n_0+1, et le caractère héréditaire doit être démontré à partir du rang n_0.

C1.70. EXERCICE Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists\, p \in \mathbb{N} \qquad \exists\, k \in \mathbb{N} \qquad n = 2^p\,(2k+1)$$

i.e. que tout entier naturel non nul est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair.