12. Théorèmes de Lebesgue, intégrales à paramètre

Dans tout ce document, I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{CM}(I,\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, continues par morceaux sur I.

§ 1 Théorème de convergence dominée

C12.1. Théorème (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ telle que :

(H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{CM}(I,\mathbb{C})$

(H2) il existe une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f \in \mathscr{CM}(I,\mathbb{C})$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$

(H3) il existe une fonction dominante $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que :
- φ est continue par morceaux et intégrable sur I
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$

Alors :

(C1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I

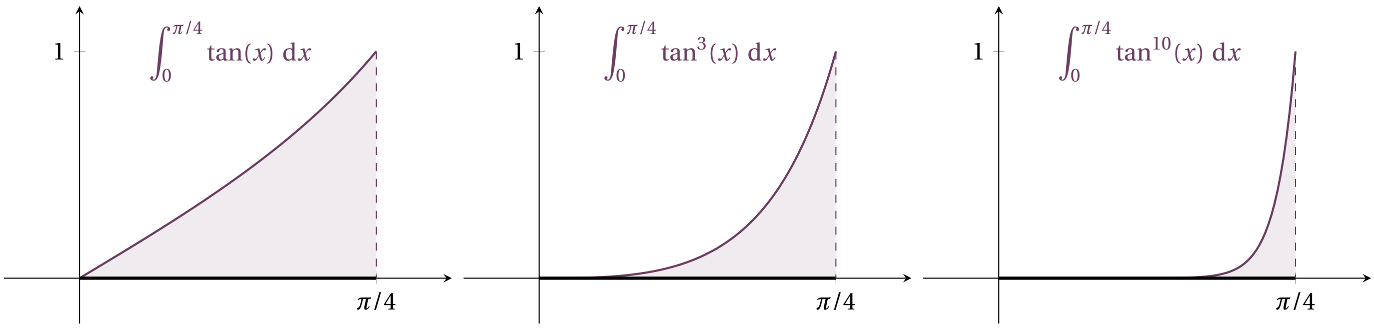
(C2) f est intégrable sur I

(C3) $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$.

Ce théorème est admis.

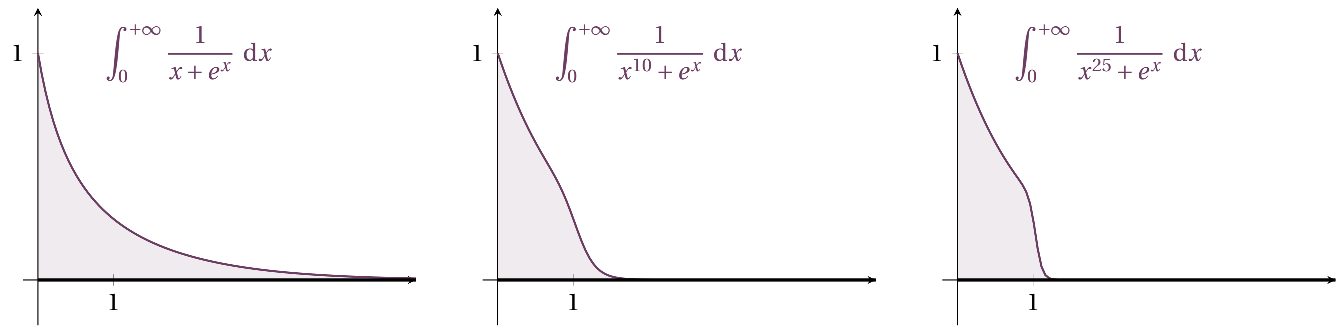
C12.2. Remarque Le théorème C12.1 donne une condition suffisante pour qu'une limite simple de suite de fonctions soit intégrable.

C12.3. Exercice Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.



Indication Appliquer le théorème de convergence dominée C12.1, en commençant par définir la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec soin et en précisant bien l'intervalle de définition/d'intégration. On pourra rechercher une fonction dominante constante ($[0,\pi/4]$ est un intervalle borné).

C12.4. Exercice Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+e^x}\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.

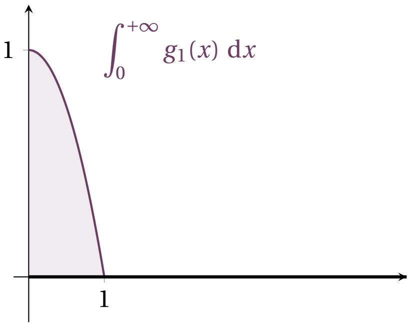


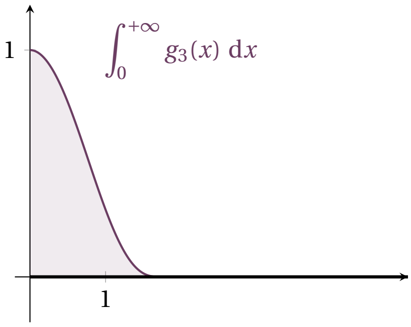
Indication Appliquer le théorème de convergence dominée C12.1, en commençant par définir la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec soin et en précisant bien l'intervalle de définition/d'intégration. Pour rechercher une fonction dominante, on pourra remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \geqslant 0$.

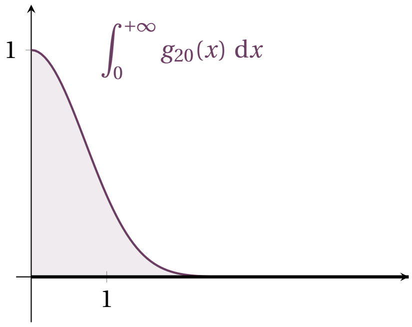
C12.5. Exercice (L'intégrale de la Gaussienne à l'aide du théorème de convergence dominée) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}[}(x)\,. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.







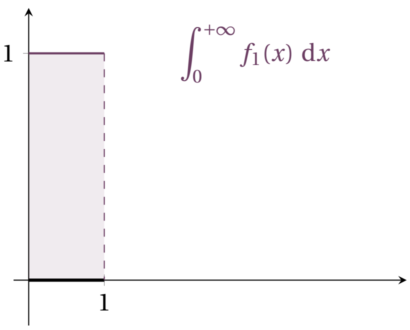
Indication

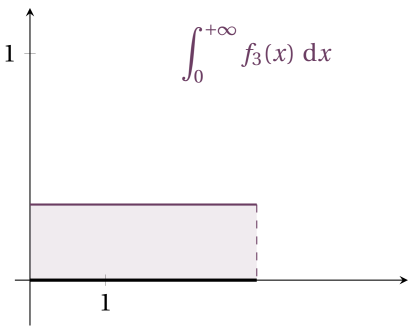
1. Fixer ensuite un réel x_pgq0. Justifier qu'il existe un rang N_x tel que, pour tout $n \geqslant N_x$, $x \in [0,\sqrt{n}[$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_x$, $g_n(x) = \ldots$
2. Appliquer le C12.1. Rechercher une fonction dominante en s'appuyant sur la concavité de ln sur $\mathbb{R}_{>0}$.
3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\ \mathrm{d}x$ en appliquant le changement de variable $\sin(t) = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ et reconnaître une intégrale de Wallis.

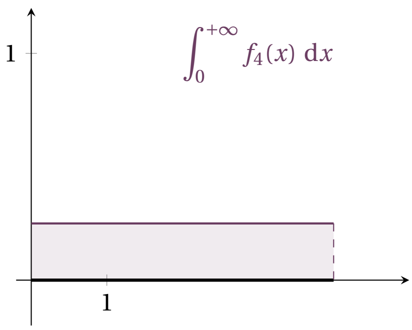
C12.6. Exercice (Importance de l'hypothèse de domination) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geqslant 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x). \end{array} \right.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$.
3. Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$ ne tend pas vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$, quand n tend vers $+\infty$.







Indication

1. Fixer ensuite un réel $x \geqslant 0$. Justifier qu'à partir d'un certain rang N_x tel que, pour tout $n \geqslant N_x$, $x \in [0,n]$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_x$, $f_n(x) = \ldots$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme pour tout $x \geqslant n$, $f_n(x) = 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{n} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \ldots$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n} f_n(x)\ \mathrm{d}x$ à l'aide de Q2.

C12.7. EXERCICE Soit $a > 0$.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$.
2. Démontrer : et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}$.

Indication

1. Si $t \in [0,1[$ alors $\displaystyle\frac{1}{1+t^a} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{ak}$. Appliquer le théorème de convergence dominée C12.1 à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{ak}. \end{array} \right.$$

Pour rechercher une fonction dominante, on pourra remarquer que, pour tout $t \in [0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|(-t^a)^{n+1}\right| \leqslant 1$.

2. Adopter une stratégie analogue à celle esquissée pour Q1.

C12.8. EXERCICE Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\,dt$.

Indication

Si $t \in [0,1[$ alors $\displaystyle\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(t)\,t^n$. Appliquer le théorème de convergence dominée C12.1 à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(t)\,t^{k}. \end{array} \right.$$

Pour rechercher une fonction dominante, on remarquera que, pour tout $t \in [0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|t^{n+1}\right| \leqslant 1$.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t$, au moyen d'une intégration par parties sur des **segments** bien choisis.

C12.9. COROLLAIRE (VERSION CONTINUE DU THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE) Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Pour tout $\lambda \in J$, posons :

$$f_\lambda \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x,\lambda). \end{array} \right.$$

Soit $\lambda_0 \in J$ fixé. Supposons :

(H1) pour tout $\lambda \in J$, $f_\lambda \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,\mathbb{C})$

(H2) il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, telle que pour tout $x \in I$,

$$f_\lambda(x) = f(x,\lambda) \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} g(x)$$

(H3) il existe une fonction dominante $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que :

- φ est continue par morceaux et intégrable sur I
- pour tout $\lambda \in J$, tout $x \in I$, $|f_\lambda(x)| \leqslant \varphi(x)$.

Alors :

(C1) pour tout $\lambda \in J$, f_λ est intégrable sur I ;

(C2) g est intégrable sur I ;

(C3) $\displaystyle\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} \int_I g$.

Démonstration

Ce corollaire est conséquence du théorème de convergence dominée C12.1 et du critère séquentiel pour les limites.

§ 2 Théorème d'intégration d'une série terme-à-terme de Lebesgue

C12.10. Théorème (Intégration d'une série terme-à-terme de Lebesgue) Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$. Supposons :

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I

(H2) la série de fonction $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathscr{CM}(I, \mathbb{C})$

(H3) la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors :

(C1) f est intégrable sur I

(C2) $\displaystyle\int_I f := \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$

Ce théorème est admis.

C12.11. Remarque Le théorème C12.10 donne une condition suffisante pour qu'une somme de série de fonctions convergeant simplement soit intégrable.

C12.12. Exercice Soit $x \in]-1, 1[$. Démontrer l'identité :

$$\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{u^2} - x} \, \mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

Indication

Si $u \geqslant 0$ alors $\left|xe^{-u^2}\right| < 1$ et $\dfrac{1}{xe^{-u^2}} = \dfrac{e^{-u^2}}{1 - xe^{-u^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)u^2}$. Appliquer le théorème d'intégration terme-à-terme de Lebesgue C12.10 à la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geqslant 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & x^n e^{-(n+1)u^2} \end{array} \right. .$$

Si $n \in \mathbb{N}$, on pourra calculer $\int_0^{+\infty} \left|f_n(u)\right| \, \mathrm{d}u$ au moyen d'une intégration par parties sur des **segments** bien choisis et utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$ (C12.5).

C12.13. Exercice Démontrer l'identité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

Indication

Si $t > 0$ alors $\left|e^{-t}\right| < 1$ et $\dfrac{t}{e^t - 1} = \dfrac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-t(n+1)}$. Appliquer le théorème d'intégration terme-à-terme de Lebesgue C12.10 à la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & te^{-t(n+1)} \end{array} \right. .$$

Si $n \in \mathbb{N}$, on pourra calculer $\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \, \mathrm{d}t$ au moyen d'une intégration par parties sur des **segments** bien choisis.

C12.14. Exercice Démontrer l'identité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^2} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

en justifiant en cours d'étude que les deux termes sont bien définis.

Indication

Si $t \in]0,1[$ alors $\left|-t^2\right| < 1$ et $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2} = \dfrac{\ln(t)}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \ln(t)\, t^{2n}$. Appliquer le théorème d'intégration terme-à-terme de Lebesgue C12.10 à la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (-1)^n \ln(t)\, t^{2n} \,. \end{array} \right.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, on pourra calculer $\displaystyle\int_0^1 \left|f_n(t)\right| \,\mathrm{d}t$ au moyen d'une intégration par parties sur des **segments** bien choisis.

§ 3 Intégrales à paramètre : problématique et exemples

§ 3.1 Problématique

On considère deux intervalles A et I de $\mathbb{R}$ et une application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \,. \end{array} \right.$$

Nous supposons que pour tout x fixé dans A, la fonction :

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est continue par morceaux et intégrable sur I, de sorte que pour tout x fixé dans A, $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est un nombre complexe bien défini. Nous nous proposons d'étudier ces différents nombres complexes (pour chaque x fixé dans A, nous en avons un à disposition) « ensemble », i.e. nous nous intéressons à la fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \,. \end{array} \right.$$

Précisément, nous étudions la régularité de cette fonction g sur A : continuité, dérivabilité et dérivée éventuelle, caractère $\mathscr{C}^k$ et dérivée k-ième éventuelle ($k \in \mathbb{N}^*$).

§ 3.2 Exemples de telles fonctions définies par une intégrale à paramètre

C12.15. Exemple (Fonction Γ d'Euler) La fonction Γ d'Euler, qui est définie par :

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \,. \end{array} \right.$$

Nous démontrerons que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et qu'elle interpole la factorielle : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

C12.16. Exemple (Transformée de Laplace) Si $f \in \mathscr{CM}(\mathbb{R}_{\geqslant 0},\mathbb{C})$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, alors on définit sa transformée de Laplace $\mathscr{L}(f)$ par :

$$\mathscr{L}(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geqslant 0} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \,. \end{array} \right.$$

C12.17. Exemple (Transformée de Fourier) Si $f \in \mathscr{CM}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, alors on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ par :

$$\widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \,. \end{array} \right.$$

§ 4 Théorème de continuité pour une intégrale à paramètre

C12.18. Théorème (Continuité pour d'intégrale à paramètre) Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\colon A\times I \longrightarrow \mathbb{C}$.
Supposons :
(H1) pour tout $x \in A$, l'application :

$$f(x,\cdot)\ \left|\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$$

est continue par morceaux sur I
(H2) pour tout $t \in I$, l'application :

$$f(\cdot,t)\ \left|\ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$$

est continue sur A
(H3) il existe une fonction dominante $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que :
- φ est continue par morceaux et intégrable sur I
- $\forall (x,t)\in A\times I,\quad |f(x,t)|\leqslant \varphi(t)$.

Alors :
(C1) pour tout $x \in A$, la fonction

$$f(x,\cdot)\ \left|\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$$

est intégrable sur I
(C2) la fonction

$$g\ \left|\ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est continue sur A.

C12.19. Version du Théorème C12.18, avec une hypothèse de domination locale Les résultats du Théorème C12.18 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H3), par la version locale en x suivante :

(H3 locale) pour tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que
- $\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I
- $\forall (x,t)\in [\alpha,\beta]\times I,\quad |f(x,t)|\leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t)$.

qui s'avère être utile dans la pratique. Démontrons que les hypothèses (H1), (H2) et (H3 locale) livrent les mêmes conclusions (C1), (C2), i.e. que sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3 locale), pour tout $x_0 \in I$:
- la fonction $f(x_0,\cdot)$ est intégrale sur I ;
- g est continue en x_0.

Nous établissons, ici, ce résultat uniquement dans le cas particulier où x_0 est intérieur à A, i.e. dans le cas où x_0 n'est pas une extrémité de A. Si x_0 est un point de A, qui n'est pas une extrémité de A, alors il existe $\alpha,\beta\in A$ tels que $\alpha < x < \beta$. Le segment $[\alpha,\beta]$ est inclus dans A et constitue un voisinage de x_0. D'après (H1), (H2) et (H3 locale), les hypothèses du théorème C12.18 sont vérifiées pour la fonction :

$$f_{\alpha,\beta}\ \left|\ \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta]\times I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$$

qui est la restriction de f à $[\alpha,\beta]\times I$. On en déduit que :
- pour tout $x\in[\alpha,\beta]$, en particulier pour x_0, la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I
- la fonction :

$$\left|\ \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

qui est la restriction de g à $[\alpha,\beta]$ est continue sur $[\alpha,\beta]$, en particulier en x_0.

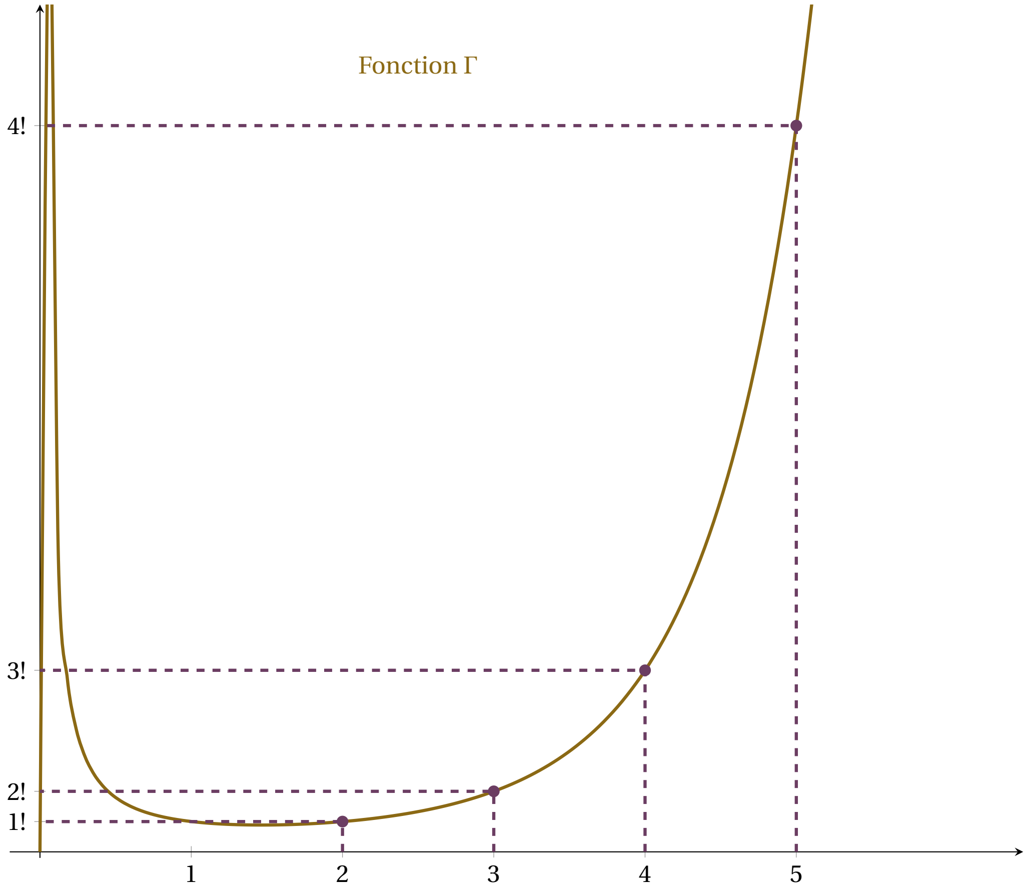
L'argument repose sur le fait que la continuité d'une fonction est une notion locale.

C12.20. Exercice (Fonction Gamma d'Euler)

1. Démontrer que la fonction Γ d'Euler définie par

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$

   est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.



Indication

1. Appliquer le théorème C12.18 , avec hypothèse de domination locale, à la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}\,. \end{array} \right.$$

   Pour rechercher une fonction dominante locale, on pourra commencer par justifier que, pour tout $0 < \alpha < \beta$ et pour tout $(x,t) \in [\alpha,\beta]\times]0,+\infty[$

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant \left\{ \begin{array}{ll} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leqslant 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t > 1\,. \end{array} \right.$$

2. Commencer par trouver une relation de récurrence entre $\Gamma(n)$ et $\Gamma(n+1)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, au moyen d'une intégration par parties sur des **segments** bien choisis.

C12.21. Exercice Démontrer que la fonction g définie par

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3} \, \mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Indication

Appliquer le théorème C12.18 à la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^3+t^3} \end{array} \right. .$$

Pour rechercher une fonction dominante, on pourra remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x^3 \geqslant 0$.

C12.22. Exercice Démontrer que la fonction g définie par

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\, \mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Indication

Appliquer le théorème C12.18 à la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-tx^2}}{1+t^3} \end{array} \right. .$$

Pour rechercher une fonction dominante, on pourra remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $e^{-tx^2} \leqslant 1$.

C12.23. Exercice Démontrer que la fonction g définie par

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\cos(\theta))\, \mathrm{d}\theta \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Indication

Appliquer le théorème C12.18 à la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\theta) & \longmapsto & \cos(x\cos(\theta)) \end{array} \right. .$$

On pourra rechercher une fonction dominante constante ($[0,\pi]$ est un intervalle borné).

C12.24. Exercice Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction bornée. Soit g la fonction définie par Posons

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Indication

Appliquer le théorème C12.18 à la fonction

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-|t|} f(x-t) \end{array} \right. .$$

Pour rechercher une fonction dominante, on introduira un nombre réel M tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|f(u)| \leqslant M$ (la fonction f est supposée bornée sur $\mathbb{R}$).

§ 5 Théorème de dérivabilité pour une intégrale à paramètre

C12.25. Théorème (dérivabilité pour une intégrale à paramètre) Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\colon A\times I \longrightarrow \mathbb{C}$. Supposons :

(H1) pour tout $t\in I$, l'application

$$f(\cdot,t) \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$$

est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, dont nous notons la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)$

(H2) pour tout $x\in A$, les applications

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}\right.$$

sont continues par morceaux sur I

(H3) pour tout $x\in A$, l'application

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$$

est intégrable sur I

(H4) il existe une fonction dominante $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que :
- φ est continue par morceaux et intégrable sur I
- $\forall (x,t)\in A\times I,\quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$

Alors :

(C1) pour tout $x\in A$, la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}\right.$$

est intégrable sur I

(C2) la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et de plus

$$\forall x\in A,\quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

C12.26. Version du théorème C12.25 avec une hypothèse de domination locale Les résultats du théorème C12.25 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H4), par la version locale en x suivante :

(H4 locale) pour tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que :
- $\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- $\forall (x,t)\in [\alpha,\beta]\times I,\quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t).$

qui s'avère être utile dans la pratique. Démontrons que les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4 locale) livrent les mêmes conclusions (C1), (C2), i.e. que sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4 locale) , pour tout $x_0\in A$:
- la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,\cdot)$ est intégrale sur I ;
- g est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0 ;
- $g'(x_0) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t$.

Nous établissons, ici, ce résultat uniquement dans le cas particulier où x_0 est intérieur à A, i.e. dans le cas où x_0 n'est pas une extrémité de A. Si x_0 est un point de A, qui n'est pas une extrémité de A, alors il existe $\alpha,\beta\in A$ tels que $\alpha < x < \beta$. Le segment $[\alpha,\beta]$ est inclus dans A et constitue un voisinage de x_0. D'après (H1), (H2), (H3) et (H4 locale), les hypothèses du théorème C12.25 sont vérifiées pour la fonction :

$$f_{\alpha,\beta} \left| \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta]\times I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$$

qui est la restriction de f à $[\alpha,\beta]\times I$. On en déduit que :

- pour tout $x\in[\alpha,\beta]$, en particulier pour x_0, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur I ;
- la fonction :
$$\left|\begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$
qui est la restriction de g à $[\alpha,\beta]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, qui est un voisinage de x_0 ;
- pour tout $x\in[\alpha,\beta]$, en particulier pour x_0 :
$$g'(x)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

L'argument repose sur le fait que la dérivabilité et la dérivée d'une fonction sont des notions locales.

C12.27. EXERCICE (DÉRIVABILITÉ ET DÉRIVÉE DE LA FONCTION GAMMA) Démontrer que la fonction Γ définie par

$$\Gamma\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

qui est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$ (cf. Exercice C12.20), est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_{>0},\quad \Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}\ln(t)\,e^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Indication

Appliquer le théorème C12.25 , avec hypothèse de domination locale, à la fonction

$$f\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & t^{x-1}e^{-t}=e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}\,. \end{array}\right.$$

Pour rechercher une fonction dominante locale pour la dérivée partielle par rapport à la variable x, on pourra commencer par justifier que, pour tout $0<\alpha<\beta$ et pour tout $(x,t)\in[\alpha,\beta]\times]0,+\infty[$

$$t^{x-1}e^{-t}\leqslant\left\{\begin{array}{ll} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t\leqslant 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t>1\,. \end{array}\right.$$

C12.28. EXERCICE Démontrer que la fonction g définie par

$$g\left|\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

qui est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$ (cf. Exercice C12.21), est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée sous forme d'une intégrale.

Indication

Appliquer le théorème C12.25 , avec hypothèse de domination locale, à la fonction

$$f\left|\begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^3+t^3}\,. \end{array}\right.$$

Pour rechercher une fonction dominante locale pour la dérivée partielle par rapport à la variable x, on pourra remarquer que, pour tout $0\leqslant\alpha<\beta$ et pour tout $(x,t)\in[\alpha,\beta]\times[0,+\infty[$, $x^2\leqslant\beta^2$ et $x^3\geqslant 0$.

C12.29. EXERCICE Démontrer que la fonction g définie par

$$g\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ (cf. Exercice C12.22), est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous forme d'une intégrale.

Indication

Appliquer le théorème C12.25 , avec hypothèse de domination locale, à la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-tx^2}}{1+t^3} \end{array} \right. .$$

Pour rechercher une fonction dominante locale pour la dérivée partielle par rapport à la variable x, on pourra remarquer que, pour tout $\alpha>0$ et pour tout $(x,t)\in[-\alpha,\alpha]\times[0,+\infty[$, $e^{-tx^2}\leqslant 1$ et $|x|\leqslant\alpha$.

§ 6 Théorème sur les dérivées d'ordre supérieur pour une intégrale à paramètre

C12.30. Théorème (Dérivées d'ordre supérieur pour une intégrale à paramètre) Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\colon A\times I\longrightarrow\mathbb{C}$. Supposons :

(H1) pour tout $t\in I$, l'application

$$f(\cdot,t) \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

est une application de classe $\mathscr{C}^k$ sur A, dont nous notons la dérivée ℓ-ième $\dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(\cdot,t)$ pour tout $\ell\in[\![1,k]\!]$

(H2) pour tout $x\in A$, les applications :

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

et pour tout $\ell\in[\![1,k]\!]$,

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t) \end{array} \right.$$

sont continues par morceaux sur I

(H3) pour tout $x\in A$, les applications

$$f(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

et pour tout $\ell\in[\![1,k-1]\!]$,

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t) \end{array} \right.$$

sont intégrables sur I

(H4) il existe une fonction dominante $\varphi\colon I\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que
- φ est continue par morceaux et intégrable sur I
- $\forall (x,t)\in A\times I,\quad \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t).$

Alors :

(C1) pour tout $x\in A$, la fonction

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \end{array} \right.$$

est intégrable sur I

(C2) la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A et de plus

$$\forall \ell\in[\![1,k]\!],\quad \forall x\in A,\quad g^{(\ell)}(x)=\int_I \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

C12.31. Version du Théorème C12.30, avec une hypothèse de domination locale À nouveau, comme pour les Théorèmes C12.18 et C12.25, les résultats du Théorème C12.30 restent valables, en remplaçant l'hypothèse de domination globale en x (H4), par la version locale en x suivante

(H4 locale) pour tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans A, il existe une fonction dominante $\varphi_{\alpha,\beta}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ telle que :
- $\varphi_{\alpha,\beta}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta]\times I, \quad \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t).$

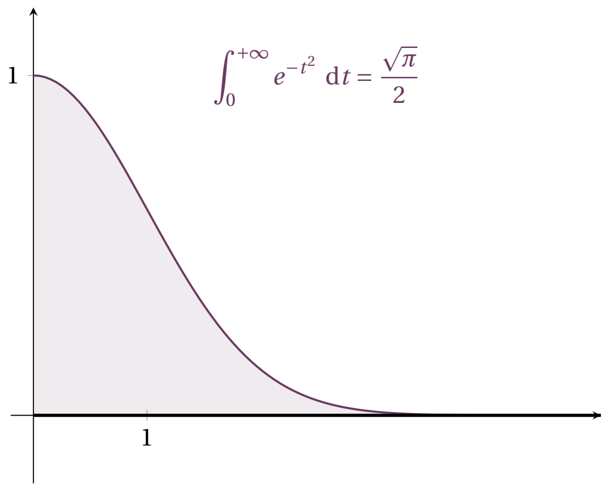
qui s'avère être utile dans la pratique.

C12.32. Exercice (L'intégrale de la Gaussienne à l'aide d'une équation différentielle)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On note I sa valeur.
2. Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,. \end{array}\right.$$

   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   (b) Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire la valeur de I.



Indication

2. (a) Appliquer le théorème C12.25 , avec hypothèse de domination locale, à la fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,. \end{array}\right.$$

Pour rechercher une fonction dominante locale pour la dérivée partielle par rapport à la variable x, on pourra par exemple justifier que, pour tout $\alpha>0$, il existe $M_\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,t)\in[-\alpha,\alpha]\times[0,1]$, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M_\alpha$ (l'intervalle $[0,1]$ est borné).

(b) Appliquer le théorème d'encadrement, après en avoir déterminé un.

(c) À l'aide de l'expression intégrale de la dérivée de f obtenue en Q2.(a) et d'un changement de variable, faire apparaître une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = -2\,G'(x)\,G(x)$. Intégrer, puis faire tendre x vers $+\infty$.

C12.33. Exercice (Étude approfondie de la fonction Gamma)

1. Démontrer que la fonction Γ définie par

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}_{>0},\quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n(t)\,e^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Que dire de la convexité de Γ ?
3. Déduire la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ du résultat principal de l'Exercice C12.32.
4. Démontrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
5. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{11}{2}\right)$.

Indication

1. Fixer $k \in \mathbb{N}^*$ et appliquer le théorème C12.30, avec hypothèse de domination locale, à la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}. \end{array} \right.$$

Pour rechercher une fonction dominante locale pour la dérivée partielle d'ordre k par rapport à la variable x, on pourra commencer par justifier que, pour tout $0<\alpha<\beta$ et pour tout $(x,t) \in [\alpha,\beta]\times]0,+\infty[$

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant \left\{ \begin{array}{ll} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leqslant 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t > 1. \end{array} \right.$$

3. Changement de variable $u = \sqrt{t}$.
4. Intégration par parties sur des **segments** bien choisis.
5. Conséquence de Q3 et Q4.

§ 7 Une sélection d'exercices

C12.34. Exercice

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction : $f_n : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}\,\mathrm{d}t$. Étudier la limite éventuelle de la suite de terme général u_n.

C12.35. Exercice

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2} \end{array} \right.$$

et $u_n := \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple, puis uniforme, de (f_n) sur $[0,1]$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

C12.36. Exercice

1. Énoncer le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution.

C12.37. Exercice

Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C12.38. Exercice

Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général $u_n := n\displaystyle\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

C12.39. Exercice

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $W_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$ et en déduire un équivalent de W_n.
4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C12.40. Exercice (CCINP)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons f et f' intégrables sur $[0\,;+\infty[$.

1. Soit $x>0$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\ \cos(t)\ \sin^n(t)\ f(xt)\ \mathrm{d}t$.
2. Préciser le mode de convergence.

C12.41. EXERCICE (CCINP) Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\ \mathrm{d}x$.

C12.42. EXERCICE (CCINP) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1[$. On pose $J_n := \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x$.
2. Démontrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

C12.43. EXERCICE (CCINP) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. Démontrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

C12.44. EXERCICE (CCINP) Soient a,b deux réels tels que $0<a<1<b$. Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(1) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{1+x^n} \end{array} \right. .$$

1. Déterminer la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_a^1 x^{n-1} f_n(x)\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n} f(1)$.

C12.45. EXERCICE (CCINP) Vérifier que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\ \mathrm{d}t$ est bien définie, qu'elle converge et déterminer sa limite.

C12.46. EXERCICE (CCINP) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4} \end{array} \right. .$$

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un segment $[a\,;b]$. Démontrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} g(0)$.

C12.47. EXERCICE (CCINP) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n := (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^3)^n}\ \mathrm{d}x$.

C12.48. EXERCICE (TPE) Établir la convergence et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x$.

C12.49. EXERCICE (CCINP) Démontrer l'existence et étudier la convergence de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\ \mathrm{d}t$.

C12.50. Exercice (CCINP) Démontrer :

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\ .$$

C12.51. Exercice (CCINP) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^n\ \ln(1-x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\ \mathrm{d}x = -\frac{H_{n+1}}{n+1}$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ \ln(x)\ \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\ (\ln(n) - H_{n+1})$.
3. On rappelle que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ désigne la constante d'Euler. Démontrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x)\ \mathrm{d}x = -\gamma$.

Nous venons d'établir : $\Gamma'(1) = -\gamma$.

C12.52. Exercice (CCINP) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n := \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un développement asymptotique de a_n, avec une précision de l'ordre de $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

C12.53. Exercice (Télécom Sud-Paris)

1. Pour tout $(n,k) \in_N^* \times \mathbb{N}$, calculer $J_{n,k} := \int_0^{+\infty} x^k e^{-nx}\ \mathrm{d}x$.
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{-nx}}{\sqrt{1+x^4}}\ \mathrm{d}x$.

C12.54. Exercice (CCINP)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction $x \longmapsto xe^{-nx}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer : $I_n := \int_0^{+\infty} xe^{-nx}\ \mathrm{d}x$.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1-e^{-\sqrt{x}}}\ \mathrm{d}x$ après avoir justifié l'existence de cette intégrale.

C12.55. Exercice (CCINP) Soient $p, k \in \mathbb{N}^*$. Posons :

$$f_{p,k} \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^p(\ln(x))^k \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$. On pose : $M_{p,k} := \int_0^1 f_{p,k}(x)\ \mathrm{d}x$.
2. Exprimer $M_{p,k}$ en fonction de $M_{p,k-1}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\int_0^1 (x\ln(x))^n\ \mathrm{d}x$ en fonction de n.
4. On pose $I := \int_0^1 x^x\ \mathrm{d}x$. Démontrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

C12.56. Exercice (CCINP) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $U_n := \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\ \mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\ \mathrm{d}x$. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} U_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} V_n$.

C12.57. Exercice (CCINP) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{sh}(x)}{e^{nx}-1} & \text{si } x > 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Pour quelle valeur de α la fonction f_n est-elle continue ?
   Dans la suite de l'exercice, α désignera le réel pour lequel f_n est continue.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est bornée.
3. Démontrer que la fonction f_n est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, pour tout $n \geqslant 2$.
4. Pour tout $n \geqslant 2$, exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$ comme la somme d'une série.

C12.58. Exercice (CCINP)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $I_n := \int_0^1 \frac{x^2}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$. Calculer I_n et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Supposons que la fonction
$$\left|\begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x^2} \end{array}\right.$$
est intégrale sur $]0,1]$. Démontrer que la fonction
$$\left|\begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array}\right.$$
est intégrable sur $]0,1]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $J_n := \int_0^1 \frac{f(x)}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer un équivalent asymptotique de J_n de précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

C12.59. Exercice (CCINP) Posons :
$$f\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{n}x} \end{array}\right.$$
Démontrer que f est définie, continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, puis calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C12.60. Exercice (CCINP)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^x}\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^n + t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

C12.61. Exercice (TPE) Démontrer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

C12.62. Exercice (Centrale) Déterminer la limite de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

C12.63. Exercice (CCINP) Étudier le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ puis déterminer une expression simple de f.

C12.64. Exercice (ENSAM) Posons :
$$f\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{>0}$.
2. Vérifier que f est solution sur $\mathbb{R}^{>0}$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

C12.65. Exercice (CCINP) Posons
$$f\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(xt)}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

1. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Donner une méthode pour calculer $f(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Uniformément continue ?

C12.66. Exercice (CCINP) Posons

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\cos(\theta))\ \mathrm{d}\theta \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer $xf''(x) + f'(x) + xf(x)$.

C12.67. Exercice (CCINP) Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+t^x}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est bien définie et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 1$. Calculer $f(k)$ pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$.
2. Étudier les limites éventuelles de f en $\pm\infty$. Déterminer un équivalent de $f(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ et concave sur $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$.

C12.68. Exercice (CCINP) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction bornée. Posons

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer g'' en fonction de g et de f.

C12.69. Exercice (CCINP) Posons $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x\ \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que f est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.
2. Calculer $f(1)$. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en -1^+.
3. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t$. En déduire $f'(0)$.

C12.70. Exercice (CCINP) Étudier les variations de la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t+x}\ \mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$

C12.71. Exercice (CCINP) Notons f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Calculer $f(0)$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{1}{t}$.
2. Étudier les variations de f et déterminer sa limite en $+\infty$.

C12.72. Exercice (CCINP) Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1} \frac{t-1}{\ln(t)} t^x\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$. Calculer f'.
2. En déduire une expression de $f(x)$.

C12.73. Exercice (TPE) Notons f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{>0}$. Expliciter f'.
2. En déduire une expression simple de f.

C12.74. EXERCICE (TPE) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$I_n \colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+t^2)^n}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}_n$ de I_n ? Calculer $I_1(x)$, pour $x \in \mathscr{D}_n$.
2. Démontrer que I_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer I_n'.
3. Trouver une relation simple entre I_n' et I_{n+1}. En déduire une expression de $I_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathscr{D}_n$.

C12.75. EXERCICE (NAVALE)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f \colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.
2. Que dire de la régularité de f ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

C12.76. EXERCICE (TPE)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f \colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la dérivabilité de f et déterminer une expression de f'.
3. Déterminer une expression simple de f.

C12.77. EXERCICE (TPE) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On souhaite démontrer que P admet au-moins une racine. Raisonnons par l'absurde et supposons que P ne possède aucune racine complexe. Posons :

$$I \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ r & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{P\left(re^{i\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta \end{array} \right.$$

1. Démontrer que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Démontrer que I est constante.
3. Étudier la limite éventuelle de I en $+\infty$. Conclure.

Nous venons de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauß.

C12.78. EXERCICE (CENTRALE) Notons E l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $t \longmapsto e^{-t} f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose, sous réserve d'existence :

$$\mathscr{L}(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Soit $f \in E$. Démontrer qu'il existe $a_f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que pour tout $p > a_f$, $t \longmapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $a < a_f$, $t \longmapsto f(t)e^{-at}$ ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer a_f et $\mathscr{L}(f)$ dans les trois cas suivants :
   (a) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \sqrt{t}$.
   (b) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto t^n e^{\alpha t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (c) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
   Dans les questions (ii) et (iii), comparer $\mathscr{L}(f)(p)$ et $p\mathscr{L}(f)(p) - f(0)$.
3. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-at}$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $\mathscr{L}\left(f'\right)$ est définie sur $]a,+\infty[$.
   (b) Démontrer que pour tout $p > a$, $f(t)e^{-pt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
   (c) Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est définie sur $]a,+\infty[$. Lier $\mathscr{L}(f)$ et $\mathscr{L}(f')$.

C12.79. EXERCICE (X) Déterminer $\displaystyle\sup_{x>0} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t\,.$

C12.80. EXERCICE (X) Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^3 x\varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

C12.81. EXERCICE (X) Posons $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}}\,\mathrm{d}t$. Déterminer l'ensemble de définition de f, étudier sa continuité, sa dérivabilité, sa limite éventuelle en $+\infty$, et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

C12.82. EXERCICE (X) Soit $a \in]0,1[$. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a\cos(x))}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

C12.83. EXERCICE (X) Soient $a > 1$ et $b > 1$. Calculer $\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos(x)}{a-\cos(x)}\right)\mathrm{d}x$.

C12.84. EXERCICE (X) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x tels que l'intégrale $\mathscr{L}(f)(x) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. soit convergente est non vide.

1. Quelle est la forme de $\mathscr{D}$?
2. Si $\mathscr{L}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in [a\,;+\infty[$, où a est un certain réel, Démontrer que $\mathscr{L}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.

C12.85. EXERCICE (X)

1. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $I(a) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-a^2/4t}\,\mathrm{d}t$ est définie.
2. Calculer $I(a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

C12.86. EXERCICE (X) Soit $b \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer un équivalent de $\int_0^b \sin(t)e^{ix\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

C12.87. EXERCICE (ENS) Déterminer un équivalent de $\int_0^{\pi/2} \sin\left(t^n\right)\mathrm{d}t$.

C12.88. EXERCICE (X) Soit $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ positive et de classe $\mathscr{C}^2$, admettant un unique maximum en $c \in]a,b[$. On suppose en outre $f''(c) \neq 0$. Soit une fonction $\varphi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue à valeurs strictement positives telle que $\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Trouver un équivalent de $\int_a^b f^n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.