M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Chapitre 9
Suites et séries de fonctions

David BLOTTIÈRE

Table des matières

C9. 1. *Notations.* — Dans ce chapitre :

- I désigne un intervalle (non vide) de $\mathbf{R}$;
- $\mathcal{F}(I, \mathbf{C})$ est l'ensemble des fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbf{C}$.

1 Convergence simple d'une suite de fonctions

C9. 2. Définition (Convergence simple d'une suite de fonctions). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur I, et on note $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CS} f$, si :*

$$\forall x \in I, \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(x).$$

C9. 3. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. .$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur $[0,1]$, où f est la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

C9. 4. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-(x-n)^2} \end{array} \right. .$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, que l'on précisera, sur $\mathbf{R}$.

C9. 5. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

- $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = n$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, $f_n(1) = 0$;
- f_n est affine sur chacun des segments $\left[0, \dfrac{1}{2n}\right]$, $\left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]$, $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$.

1. Représenter graphiquement les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4.
2. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

3. Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(t) \quad \mathrm{d}t$.

2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

C9. 6. Définition (Convergence uniforme d'une suite de fonctions). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$.*
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur I, et on note $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall x \in I \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

C9. 7. Définition (Norme infinie d'une fonction bornée). — *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$ une fonction bornée. Sa norme infinie, notée $||f||_\infty$, est définie par :*

$$||f||_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)|.$$

C9. 8. *Rappels (Propriétés fondamentales de la norme infinie).* — Soit $\mathcal{B}(I,\mathbf{C})$ le sous-C-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbf{C})$, formé par les fonctions bornées. L'application

$$||\cdot||_\infty \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(I,\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & ||f||_\infty \end{array}\right.$$

est une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbf{C})$, i.e. :

1. $||\cdot||$ vérifie la propriété de séparation, i.e. :
$$\forall f \in \mathcal{B}(I,\mathbf{C}) \qquad ||f||_\infty = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0_{\mathcal{F}(I,\mathbf{C})}.$$
2. $||\cdot||$ vérifie la propriété d'homogénéité, i.e. :
$$\forall f \in \mathcal{B}(I,\mathbf{C}) \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C} \qquad ||\lambda f||_\infty = |\lambda| \times ||f||_\infty$$
3. $||\cdot||$ vérifie l'inégalité triangulaire, i.e. :
$$\forall f, g \in \mathcal{B}(I,\mathbf{C}) \qquad ||f+g||_\infty \leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

C9. 9. *Remarque (Distance entre deux fonctions bornées, pour la norme infinie).* — Soient $f, g \in \mathcal{B}(I,\mathbf{C})$. La distance entre les deux fonctions f et g, pour la norme inifinie, est le nombre réel positif ou nul $||f-g||_\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} ||f-g||_\infty \leqslant \varepsilon &\iff \sup_{x\in I} |f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon \\ &\iff \forall x \in I, \quad |f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon \\ &\iff \forall x \in I, \quad g(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) + \varepsilon \\ &\iff g - \varepsilon \leqslant f \leqslant g + \varepsilon. \end{aligned}$$

C9. 10. Proposition (Convergence uniforme et norme infinie). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$. Supposons pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur I. Alors :*

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f \quad \Longleftrightarrow \quad ||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

C9. 11. *Remarque.* **—** L'hypothèse de la proposition **C9.10** est satisfaite lorsque toutes les fonctions f_n ($n \in \mathbf{N}$) et la fonction f sont bornées, par exemple lorsque I est un segment et que toutes les fonctions f_n ($n \in \mathbf{N}$) et la fonction f sont continues.

C9. 12. *Exercice.* **—** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\cos(x). \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction $0_{\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})}$.

C9. 13. *Exercice.* **—** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \left[0, \dfrac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n\ . \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction $0_{\mathcal{F}([0,1/2],\mathbf{R})}$.

C9. 14. *Exercice.* **—** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x}\ . \end{array} \right.$$

C9. 15. *Remarque (Comparaison entre convergence simple et convergence uniforme, du point de vue formel).* — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbf{C}$. Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$.

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} f \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CU}} f \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{\varepsilon} \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N_{\varepsilon}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

La différence entre les deux définitions réside dans le fait que dans le premier cas le rang N dépend ***a priori*** de x et de ε, alors que dans l'autre il ne dépend que de ε. Cette différence est fondamentale.

C9. 16. Théorème (La convergence uniforme implique la convergence simple). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$.*
Alors :

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CS} f.$$

C9. 17. *Remarque.* — La réciproque du Théorème **C9.16** est fausse. Cf. Exercice **C9.20**.

C9. 18. Proposition (Critère de non convergence uniforme). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$.*
S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f.

C9. 19. *Remarque.* — Dans précédente proposition, une implication a été énoncée. En fait, il y a équivalence (preuve assez subtile, laissée en exercice).

C9. 20. *Exercice.* — Dans l'exercice **C9.4**, nous avons établi une convergence simple d'une suite de fonctions. Démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme pour cette suite de fonctions.

3 Convergence simple (resp. uniforme, normale) d'une série de fonctions

C9. 21. Définition (Convergence simple (resp. uniforme) d'une série de fonctions). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \quad \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{array} \right. .$$

Soit $S \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$.

1. *On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers S sur I, si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers S sur I. Dans ce cas, la fonction S sera également notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, et donc :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = S \quad \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \end{array} \right. .$$

2. *On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers S sur I, si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers S sur I.*

Voici maintenant un nouveau mode de convergence, propre aux séries de fonctions bornées, et particulièrement commode.

C9. 22. Définition (Convergence normale d'une série de fonctions). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions bornées définies sur I, à valeurs dans $\mathbf{C}$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est dite normalement convergente sur I, si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} ||f_n||_\infty$ est convergente.*

C9. 23. *Remarque (Une méthode pour prouver une convergence normale).* — Dans le contexte de la précédente définition, pour établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, il suffit de trouver une série numérique convergente $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ telle que $||f_n||_\infty \leqslant \alpha_n$ à partir d'un certain rang. Cette assertion découle du théorème de domination pour les séries (numériques) à termes positifs.

C9. 24. PROPOSITION (LA CONVERGENCE NORMALE IMPLIQUE LA CONVERGENCE SIMPLE). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions bornées définies sur I, à valeurs dans $\mathbf{C}$. Alors :*

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \textit{ normalement convergente} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\geqslant 0} |f_n| \textit{ converge simplement.}$$

En particulier :

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \textit{ normalement convergente} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\geqslant 0} f_n \textit{ converge simplement.}$$

C9. 25. *Remarque.* — Les réciproques des deux implications de la proposition **C9.24** sont fausses. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout $n\in\mathbf{N}$, f_n est la fonction (positive ou nulle) définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0\,;1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. .$$

D'après les résultats sur les séries géométriques, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \left| \begin{array}{ccc} [0\,;1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{array} \right. .$$

Soit $n\in\mathbf{N}$. La fonction f_n étant croissante sur $[0\,;1[$, nous en déduisons $||f_n||_\infty = 1$. La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n||_\infty$ est donc grossièrement divergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement.

C9. 26. THÉORÈME (LA CONVERGENCE NORMALE IMPLIQUE LA CONVERGENCE UNIFORME). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions bornées définies sur I, à valeurs dans $\mathbf{C}$. Alors :*

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \textit{ normalement convergente} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\geqslant 0} f_n \textit{ uniformément convergente.}$$

C9. 27. *Remarque.* — La réciproque du théorème **C9.26** est fausse. Cf. Exercice **C9.29**.

C9. 28. *Exercice.* — Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ dans chacun des cas suivants.

1. $f_n : I \longrightarrow \mathbf{C}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{e^{inx}}{n^2}$, où $I=\mathbf{R}$.
2. $f_n : I \longrightarrow \mathbf{C}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{1}{n^{x+yi}}$, où $I=[\alpha,+\infty[$, avec $y\in\mathbf{R}$ et $\alpha\in\mathbf{R}_{>1}$ fixés.
3. $f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{1}{n^2+\sin(nx)}$.

4. $f_n \colon [\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$, avec $\alpha \in \mathbf{R}_{>0}$.

C9. 29. *Exercice.* — Démontrer que la série de fonctions de terme général :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n x^n}{n} \end{array} \right.$$

converge uniformément, mais n'est pas normalement convergente.

4 Convergence uniforme (resp. convergence normale) sur tout segment

C9. 30. Définition (Convergence uniforme sur tout segment). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I si pour tout couple $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$, la suite de fonctions restreintes $\left((f_n)_{|\,[a,b]}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f_{|\,[a,b]}$ sur $[a,b]$, i.e. si :*

$$(f_n)_{|\,[a,b]} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f_{|\,[a,b]}.$$

Si tel est le cas, on note $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} f$.

C9. 31. *Remarque.* — On conserve les notations de la précédente définition. Comme tout point de I appartient à un segment non réduit à un point, le Théorème **C9.16** livre :

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CS}} f.$$

C9. 32. *Remarque.* — La notion de convergence uniforme sur tout segment d'un intervalle s'étend naturellement aux séries de fonctions.

C9. 33. *Remarque.* — La convergence uniforme implique la convergence uniforme sur tout segment, mais la réciproque est fausse (cf. exercice **C9.34**).

C9. 34. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0\,;1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. .$$

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $[0\,;1[$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0\,;1[$.

C9. 35. *Exercice.* — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ par

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

et la relation de récurrence :

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{f_0}{f_n}\right)$$

valable pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x > 0$, $f_n(x) \geqslant \sqrt{x}$.
2. Soit $x > 0$. Posons :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad g_n(x) = \frac{f_n(x) - \sqrt{x}}{f_n(x) + \sqrt{x}}.$$
Exprimer $g_{n+1}(x)$ en fonction de $g_n(x)$.
3. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$ vers la fonction f définie par :
$$f \left| \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

C9. 36. Définition (Convergence normale sur tout segment d'une série de fonction). — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions bornées définies sur I, à valeurs dans $\mathbf{C}$.*
On dit que la série de fonction $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de I, si pour tout couple $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$, la série de fonctions de terme général $(f_n)_{|[a,b]}$ est normalement convergente.

C9. 37. *Remarque.* — On conserve les notations de la précédente définition. Comme tout point de I appartient à un segment non réduit à un point, la Proposition **C9.24** et le Théorème **C9.26** livrent :

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge normalement sur tout segment de } I \implies \sum_{n\geqslant 0} |f_n| \text{ converge simplement ;}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge normalement sur tout segment de } I \implies \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge simplement ;}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge normalement sur tout segment de } I \implies \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment de } I\,.$$

C9. 38. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha > 0$.
2. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

C9. 39. *Exercice.* — Étudier la convergence normale de la séries de fonctions de terme général f_n sur tout segment de l'intervalle I dans chacun des cas suivants.

1. $f_n\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$; $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x+n) - \mathrm{Arctan(n)}$
2. $f_n\colon\ ]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$; $x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$
3. $f_n\colon\ ]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R}$; $x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

5 Des limites d'une limite uniforme d'une suite de fonctions

C9. 40. Théorème (Théorème de la double limite en un point de l'intervalle). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$ et un point $a \in I$. Supposons :*

(H1) $f_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CU} f$;

(H2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue en a.

Alors :

(C1) f est continue en a ;

(C2) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim\limits_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right)$.

C9. 41. Corollaire (Limite uniforme d'une suite de fonctions continues). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$. Supposons :*

(H1) $f_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CUK} f$;

(H2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I.

Alors :

(C) f est continue sur I.

Démonstration. La fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I. Soit $a \in I$.

- Si a est un point intérieur à I, il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $\alpha < a < \beta$. Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur le segment $[\alpha\,;\beta]$, le Théorème **C9.40** nous livre la continuité de f en $a \in [\alpha\,;\beta]$.
- Si d'aventure a se trouve être une extrémité de l'intervalle I, les arguments du cas où a est intérieur à I s'appliquent *mutatis mutandis.*

Q.E.D.

C9. 42. *Exercice.* — Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$, $x \in I$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers x. Supposons $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CU}} f$ et f_n continue sur I, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer : $f_n(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(x)$.

C9. 43. *Remarque.* — Ce qui précède s'applique également aux séries de fonctions. En particulier si une série de fonctions continues converge uniformément (par exemple si la série de fonctions converge normalement), alors la fonction somme est continue.

C9. 44. Théorème (Théorème de la double limite en un point au bord de l'intervalle). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$ et a l'une des extrémités de I ($a = \pm\infty$ est donc possible). Supposons :*

- *(H1)* $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$;
- *(H2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n admet une limite finie, notée ℓ_n, en a.*

Alors :

- *(C1) la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;*
- *(C2) la fonction f admet une limite finie en a qui vaut $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ell_n$;*
- *(C3)* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim\limits_{x\longrightarrow a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right)$.

Ce théorème est admis.

C9. 45. *Exercice.* — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2} \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.

C9. 46. *Exercice.* —

1. Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \end{array} \right.$$

   est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.
2. Étudier la limite éventuelle de f en $+\infty$.

C9. 47. *Exercice.* — On rappelle que la fonction ζ est définie par :

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right. .$$

Étudier la limite éventuelle de ζ en $+\infty$.

6 Intégration de suites (resp. de séries) de fonctions

C9. 48. Théorème (Intégration d'une limite de suite de fonctions continues sous CU). — *Soient a et b des réels tels que $a < b$, une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{C})$.*

Supposons :

(H1) $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$;

(H2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a,b]$.

Alors :

(C1) l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *est bien définie;*

(C2) $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Démonstration.

(C1) La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues (cf. **C9.41**). L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est donc bien définie.

(C2) Les fonctions f_n et la fonction f sont continues sur $[a,b]$. Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n - f$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc bornée (cf. théorème des bornes atteintes). Ainsi l'hypothèse (H1) se réécrit :

$$||\, f_n - f\,||_\infty \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\ .$$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right| &= \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\ \mathrm{d}t \right| && \text{[linéarité de l'intégrale]} \\
&\leqslant \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leqslant ||\, f_n - f\,||_\infty}\ \mathrm{d}t && \text{[majoration de la } |\cdot| \text{ d'une intégrale]} \\
&\leqslant \int_a^b ||\, f_n - f\,||_\infty\ \mathrm{d}t && \text{[croissance de l'intégrale]} \\
&= (b-a)\ ||\, f_n - f\,||_\infty
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant (b-a)\ ||\, f_n - f\, ||_\infty\ .$$

De $||\, f_n - f\, ||_\infty \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$ et du théorème d'encadrement, on déduit

$$\left| \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$

i.e. : $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Q.E.D.

C9. 49. *Remarque.* —

1. La conclusion 2 du Théorème **C9.48** peut se réécrire $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n$.
2. L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle dans le Théorème **C9.48**. La seule convergence simple ne suffit pas, cf. exercice **C9.5**.

C9. 50. *Exercice.* — Étudier la limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \sin(x)\ \ \mathrm{d}x$, quand n tend vers $+\infty$.

C9. 51. **Corollaire (Primitivation d'une limite de suite de fonctions continues sous CUK).** — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$ et un point $a \in I$.*
Supposons :

(H1) $f_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\text{CUK}} f$;

(H2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons F_n l'unique primitive de f_n (continue sur I) qui s'annule en a :

$$F_n \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n(t)\ \ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

et F l'unique primitive de f (continue sur I, cf. corollaire 1) qui s'annule en a :

$$F \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \ \mathrm{d}t\ . \end{array} \right.$$

Alors :

(C) $F_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\text{CUK}} F$.

C9. 52. Corollaire (Primitivation terme à terme d'une série de fonctions continue sous CUK). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, une fonction $s \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$ et un point $a \in I$. Supposons :*

(H1) $\sum_{n\geqslant 0} f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} s$;

(H2) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est continue sur I.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons F_n l'unique primitive de f_n (continue sur I) qui s'annule en a :

$$F_n \left| \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n(t) \ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

et S l'unique primitive de s (continue sur I, cf. remarque 11.43) qui s'annule en a :

$$S \left| \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x s(t) \ \mathrm{d}t \ . \end{array} \right.$$

Alors :

(C1) $\sum_{n\geqslant 0} F_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} S$;

(C2) $\forall\, x \in I, \qquad \displaystyle\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) \ \mathrm{d}t.$

C9. 53. *Exercice.* — Soit $r \in [0\,;1[$. Justifier l'existence et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n n\cos(nt)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$.

7 Dérivation de suites (resp. de séries) de fonctions

C9. 54. Théorème (Dérivation de la limite d'une suite de fonctions sous CS et CUK). — *Soient une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$. Supposons :*

(H1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

(H2) $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{C.S} f$;

(H3) $f_n' \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} g$.

Alors :

(C1) f est de classe $\mathcal{C}^1$;

(C2) $f' = g$;

(C3) $f_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CUK} f$.

C9. 55. COROLLAIRE (CARACTÈRE $\mathcal{C}^k$ DE LA LIMITE D'UNE SUITE DE FONCTIONS SOUS CS ET CUK). — *Soient k un entier naturel non nul, une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et des fonctions $g_0, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$.*

Supposons :

(H1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

(H2) $\forall\, \ell \in [\![0, k-1]\!], \quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{C.S}} g_\ell$;

(H3) $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_k$.

Alors :

(C1) $f := g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

(C2) $\forall\, \ell \in [\![0, k]\!], \quad f^{(\ell)} = g_\ell$;

(C3) $\forall\, \ell \in [\![0, k-1]\!], \quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} f^{(\ell)}$.

Démonstration. On procède par récurrence sur l'entier naturel non nul k.

- Initialisation à $k = 1$: La propriété à établir est précisément celle du Théorème **C9.54** ($f \leftarrow g_0$, $g \leftarrow g_1$).
- Supposons le résultat établi pour un entier k fixé et considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, et des fonctions $g_0, g_1, \ldots, g_k, g_{k+1} \in \mathcal{F}(I,\mathbf{C})$ vérifiant :

  (H1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I ;

  (H2) $\forall\, \ell \in [\![0, k]\!], \quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{C.S}} g_\ell$;

  (H3) $f_n^{(k+1)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_{k+1}$.

  Observons :

  (H1') pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

  (H2') $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{C.S}} g_k$;

  (H3') $f_n^{(k+1)} = \left(f_n^{(k)}\right)' \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_{k+1}$.

  En appliquant le Théorème **C9.54** $\Big(\ (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \leftarrow \left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbf{N}}\ ,\ f \leftarrow g_k\ ,\ g \leftarrow g_{k+1}\ \Big)$, il vient :

  (C1') g_k est de classe $\mathcal{C}^1$;

  (C2') $g_k' = g_{k+1}$;

  (C3') $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_k$.

  Alors (H1), (H2), (H3) et (C3') nous donnent :

  (H1") pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

  (H2") $\forall\, \ell \in [\![0, k-1]\!], \quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{C.S}} g_\ell$;

  (H3") $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} g_k$.

  En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient :

  (C1") $f := g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$;

  (C2") $\forall\, \ell \in [\![0, k]\!], \quad f^{(\ell)} = g_\ell$;

  (C3") $\forall\, \ell \in [\![0, k-1]\!], \quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\text{CUK}} f^{(\ell)}$.

  De (C1"), (C2") et (C1'), on déduit :

  (C1) $f := g_0$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

  De (C2") et (C2'), on déduit :

(C2) $\forall \ell \in [\![0, k+1]\!], \quad f^{(\ell)} = g_\ell$.
De (C3"), (C3') et (C2"), on déduit :
(C3) $\forall \ell \in [\![0, k]\!], \quad f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\text{CUK}} f^{(\ell)}$.
La propriété est donc établie au rang $k+1$.

Q.E.D.

C9. 56. Corollaire (Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la limite d'une suite de fonctions sous CUK). — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$. Supposons :*

(H1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ;

(H2) pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite de fonction $\left(f_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g_k \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$.

Alors :

(C1) la fonction $f := g_0$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I ;

(C2) pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)} = g_k$.

Démonstration. Les hypothèses (H1), (H2) permettent d'appliquer le Corollaire **C9.55** à la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et aux fonctions $g_0, g_1, \ldots, g_k$, quelque soit $k \in \mathbf{N}^*$ (cf. Remarque **C9.37**). Q.E.D.

C9. 57. Corollaire (Caractère $\mathcal{C}^k$ d'une somme de série de fonctions sous CS et CUK). — *Soient k un entier naturel non nul, une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ et des fonctions $s_0, s_1, \ldots, s_k \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$.*

Supposons :

(H1) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

(H2) $\forall \ell \in [\![0, k-1]\!], \quad \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{C.S} s_\ell$;

(H3) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(k)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CUK} s_k$.

Alors :

(C1) $s := s_0$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I ;

(C2) $\forall \ell \in [\![0, k]\!], \quad s^{(\ell)} = s_\ell$;

(C3) $\forall \ell \in [\![0, k-1]\!], \quad \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(\ell)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CUK} s^{(\ell)}$.

On peut donc dériver terme à terme :

$$\forall \ell \in [\![0, k]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(\ell)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(\ell)}.$$

Démonstration. On applique le Corollaire **C9.55**, en spécialisant comme suit :

$$(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \leftarrow \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n \in \mathbf{N}} \ , \ g_0 \leftarrow s_0 \ , \ g_1 \leftarrow s_1 \ , \ \ldots \ , \ g_k \leftarrow s_k$$

en remarquant que la dérivée d'une somme finie de fonctions dérivables est la somme des fonctions dérivées. Q.E.D.

C9. 58. *Exercice (Un premier exemple de série entière).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0\,;1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, a]$, pour tout réel $a \in [0\,;1[$.
2. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $[0\,;1[$.
3. Soit $x \in [0\,;1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.
4. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, x^n$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.
5. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$, en justifiant la convergence de la série en cours d'étude.

C9. 59. *Exercice.* — Soit $r \in [0\,;1[$. Démontrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\arctan\left(\frac{r\sin(t)}{1 - r\cos(t)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin(nt)}{n}.$$

8 Approximation par des fonctions en escaliers

On fixe deux réels a et b tels que $a < b$, pour toute cette partie. On rappelle quelques résultats de MPSI et on les interprète à l'aide des notions de convergence introduites dans ce chapitre.

- Une subdivision du segment $[a, b]$ est un uplet $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de points de $[a, b]$ tel que :
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

- Une fonction $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbf{R})$ est dite en escalier s'il existe une subdivison $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a, b]$ telle que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la fonction $f_{|\,]x_k, x_{k+1}[}$ est constante.

- L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ des fonctions en escaliers définies sur $[a, b]$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathcal{F}([a, b], \mathbf{R})$.

C9. 60. Théorème (Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escaliers). — *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$.*

C9. 61. *Remarque.* — Le Théorème **C9.60** se reformule comme suit. La partie $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ de $\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{R})$, pour la convergence uniforme.

C9. 62. *Exercice.* — Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$. Démontrer : $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt) \quad \mathrm{d}t \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

9 Théorème de Weierstrass

C9. 63. Théorème (Théorème de Weierstrass). — *Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en polynomiales définies sur $[a,b]$ telle que $P_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CU} f$.*

C9. 64. *Remarque.* — Le théorème précédent se reformule comme suit. L'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $[a,b]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, pour la convergence uniforme.

C9. 65. *Exercice (Théorème des moments).* — Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\int_a^b x^n f(x) \quad \mathrm{d}x = 0 \,.$$

Démontrer que $f = 0$.

C9. 66. *Exercice.* — Soit $p \in \mathbf{N}$. Que dire d'une fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à p ?

C9. 67. *Exercice.* — Que dire d'une fonction $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales ?

10 Une sélection d'exercices

C9. 68. *Exercice.* — Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions de terme général $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ dans chacun des cas suivants.

$$f_n\colon x \longmapsto x^n(1-x) \qquad f_n\colon x \longmapsto n^\alpha x(1-x)^n \text{ , où } \alpha > 0$$

$$f_n\colon x \longmapsto \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in \left]0\,;1\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f_n\colon x \longmapsto n^2 e^{-nx}$$

C9. 69. *Exercice.* — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n\colon x \longmapsto \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. (a) Démontrer que pour tout $a > 0$, cette suite de fonctions converge uniformément sur les intervalles $]-\infty, -a]$ et $[a, +\infty[$.
   (b) Converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
   Indication : on pourra considérer la suite de terme général $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

C9. 70. *Exercice.* — On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n\colon x \longmapsto (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $[0\ ;\ 1]$.
2. Justifier l'existence de :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\ \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\ \mathrm{d}x$$

   et la calculer.

C9. 71. *Exercice.* —

1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0.
   Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$f_n\colon x \longmapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}.$$

   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur un intervalle $[a,+\infty[$ (avec $a>0$) puis sur $]0,+\infty[$.

C9. 72. *Exercice (CCINP).* — Soient a et b des nombres réels tels que $a<b$.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, soit $x_0\in[a,b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f et que pour tout $n\in\mathbf{N}$, la fonction f_n est continue en x_0.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. Pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $x\in[0,1]$, posons :
   $$g_n(x)=x^n.$$
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

C9. 73. *Exercice.* —

1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Notons E l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbf{C}$. Pour tout $f\in E$, posons :
   $$||f||_\infty:=\sup_{x\in I}|f(x)|.$$
   Démontrer que $||\cdot||_\infty$ est une norme sur E.
2. Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{C}$ convergeant uniformément sur I vers une fonction g. On suppose que pour tout $n\in\mathbf{N}$, g_n est bornée. Démontrer que g est bornée.

C9. 74. *Exercice (CCINP).* —

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Démontrer qu'alors la suite de terme général
   $$\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x$$
   converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.
2. Justifiez que ce résultat peut être utilisé pour les séries de fonctions puis démontrer que :
   $$\int_0^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\ dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

C9. 75. *Exercice.* — Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$.

1. Démontrer qu'une série de fonctions normalement convergente sur I est uniformément convergente sur I.
2. Soit $R > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$f_n \colon x \longmapsto \frac{n^2}{n!} x^n.$$

La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ est-elle uniformément convergente sur l'intervalle $[-R, R]$?

C9. 76. *Exercice.* — On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R} \; ; \; x \longmapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right].$$

1. Démontrer que S est définie et dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

C9. 77. *Exercice.* — On considère la série de fonctions $\sum f_n$, où pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \colon x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

1. Étudier la convergence simple de cette série.
2. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels x pour lesquels cette série converge.
   (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $\mathcal{D}$.
   (b) La fonction

$$S \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \end{array} \right.$$

   est-elle continue sur $\mathcal{D}$?

C9. 78. *Exercice.* — Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une fonction continue $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que la suite de fonctions $\left((f_n)_{|\,[a,b[}\right)$ converge uniformément vers $f_{|\,[a,b[}$.

1. Démontrer que $f_n(b) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} f(b)$.
2. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f.

C9. 79. *Exercice.* — Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément, sur $[a, b]$, vers une fonction f.
Démontrer que :

$$\sup_{x\in[a,b]} f_n(x) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

après avoir justifié l'existence des nombres en jeu.

C9. 80. *Exercice.* — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$, à valeurs réelles. On suppose que :

1. la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $[a, b]$;
2. la fonction f, limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, est continue sur $[a, b]$;
3. pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est croissante sur $[a, b]$.

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.
Remarque : Il s'agit d'un théorème dû à Dini.

C9. 81. *Exercice (CCINP).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right) \end{array} \right. .$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $\mathbf{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur tout segment $[-a, a]$, avec $a > 0$.
3. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}$.

C9. 82. *Exercice (CCINP).* —

1. Soit $x > 0$. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$ converge.
2. Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)} \end{array} \right.$$

est continue.

3. Démontrer que la fonction $x \longmapsto x^2 f(x)$ se prolonge par continuité en 0.

C9. 83. *Exercice (CCINP).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$f_n\colon x \longmapsto \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple, la convergence uniforme, de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Étudier la limite éventuelle de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

C9. 84. *Exercice (CCINP).* — Démontrer que la fonction

$$S\colon x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

est définie et continue sur $\mathbf{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

C9. 85. *Exercice (CCINP).* — Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$, avec $a < b$. Notons $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur $[a,b]$ telle que $f_0 \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [a,b]$:

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la série de fonctions de terme général f_n converge.
2. Déterminer la somme de cette série.

C9. 86. *Exercice (CCINP).* — Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f\colon x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^x}$$

puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur ce domaine.

C9. 87. *Exercice (Navale).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$u_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+n^2x} \end{array} \right. .$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

C9. 88. *Exercice (CCINP).* — Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, posons :

$$u_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n\,(1-x)}{\ln(n)} \end{array} \right. .$$

Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

C9. 89. *Exercice (CCINP).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+e^{nx}} \end{array} \right. .$$

1. Étudier la convergence de la série de terme général f_n.
2. Démontrer que l'application $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

C9. 90. *Exercice (Navale).* — Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \end{array} \right.$$

et

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}} \end{array} \right. .$$

1. Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.
2. Étudier la limite éventuelle de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

C9. 91. *Exercice (CCINP).* — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n+n^2x} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_{>0}$.
2. Soit $a > 0$. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. En déduire que

la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbf{R}_{>0}$.

3. Déterminer la limite, ainsi qu'un équivalent simple, de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers 0.

C9. 92. *Exercice (CCINP).* — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{nx+1} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$, notons :

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}.$$

2. La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur un segment de $]0,+\infty[$?
3. À l'aide d'une majoration du reste, démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.
4. Écrire f comme somme d'une série convergeant normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

C9. 93. *Exercice (CCINP).* — Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est bien définie. La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement ?
2. Démontrer à l'aide du reste, que la série $\sum f_n$ converge uniformément.
3. Déteminer la limite de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ en $+\infty$.

C9. 94. *Exercice (CCINP).* — Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{n-1}x}{n+x^2} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que f est bien définie. La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement ?
2. Démontrer, à l'aide du reste, que la série $\sum f_n$ converge uniformément.
3. Démontrer que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue.

C9. 95. *Exercice (CCINP).* — Posons :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Étudier la limite éventuelle de $f(x)$ quand x tend vers 1.

C9. 96. *Exercice (CCINP).* —

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} .$$

2. Étudier la continuité de f et déterminer $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$, en justifiant son existence en cours d'étude.

C9. 97. *Exercice.* — Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$, pour tout $x > 0$.

C9. 98. *Exercice.* — Posons, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)} \end{array} \right. .$$

Démontrer que $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ est bien définie sur $[0,+\infty[$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas dérivable à droite en 0.

C9. 99. *Exercice.* — Posons :

$$\zeta\colon x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de ζ.
2. Démontrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \zeta(x)$, en justifiant son existence en cours d'étude.
4. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \zeta(x)$, en justifiant son existence en cours d'étude.

C9. 100. *Exercice (CCINP).* — Soit $a \in\,]-1\,;1[$. Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(a^n\, x\right) \end{array} \right. .$$

Démontrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

C9. 101. *Exercice (TPE).* —

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction :

$$f\colon x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.

   Indication : On pourra utiliser une comparaison série-intégrale. On rappelle que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C9. 102. *Exercice.* — Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n\, f(x) \end{array} \right. .$$

Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément si et seulement si $f(1) = 0$.

C9. 103. *Exercice.* — Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))$ est décroissante.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que :

$$f(x_n) = \sup_{x \in [a,b]} f_n(x).$$

2. Démontrer que la suite $(f_n(x_n))$ converge. Notons ℓ sa limite.
3. Justifier que la suite (x_n) possède une valeur d'adhérence x. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant f_n(x).$$

4. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers 0.
5. Établir le résultat suivant, dû à Dini. Soit (g_n) une suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue g. Si pour tout $x \in [a, b]$, la suite $(g_n(x))$ est monotone, alors (g_n) converge uniformément vers g.

C9. 104. *Exercice.* — Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I à valeurs réelles, convergeant uniformément sur I vers une fonctions f. Soit $g \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Démontrer que la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur I.
2. Est-ce le cas si g est seulement supposée continue ?

C9. 105. *Exercice.* — Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_a^b f(x)\, x^n \,\mathrm{d}x = 0.$$

Démontrer que f est nulle.

C9. 106. *Exercice (Mines).* —

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f \colon x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\, \ln(n)}{1 + x\, n^2}.$$

2. Déterminer la limite éventuelle, puis un équivalent, de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0^+.

C9. 107. *Exercice (Mines).* — Soit $R(X)$ une fraction rationnelle à coefficients complexes de degré strictement négatif, ne possédant aucun pôle dans $\mathbf{Z}$.

1. Étudier la définition de $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R(n) e^{inx}$.

2. Étudier sa continuité.

C9. 108. *Exercice (Mines).* — Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^- & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que f est bien définie.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$, $f(x) = e \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$.

C9. 109. *Exercice (Mines).* — Posons :

$$f\colon x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.
2. Déterminer un équivalent de f en 1^-.

C9. 110. *Exercice (Mines).* — Posons

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} := \lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x+n)^2} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Est-elle périodique ?
2. Étudier la continuité de f.
3. Posons :

$$g\colon x \longmapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

   (a) Déterminer le domaine de définition de g.
   (b) Démontrer que la fonction $h = f - g$ admet un prolongement continu $\mathbf{R}$.
   (c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x)$. En déduire que $f = g$.

C9. 111. *Exercice (Mines).* — Posons f_0 la fonction nulle sur $\mathbf{R}_+$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_{n+1} \colon \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \; ; \; x \longmapsto \sqrt{x + f_n(x)}.$$

1. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Déterminer la limite $\ell(x)$ de $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $\mathbf{R}_+$.
3. Soit $x \in \mathbf{R}_+$, soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que :

$$|f_{n+1}(x) - \ell(x)| \leqslant \frac{|f_n(x) - \ell(x)|}{2\, f_{n+1}(x)}.$$

Que peut-on en déduire sur (f_n) ?

C9. 112. *Exercice (Mines).* — Posons :

$$f \colon x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}.$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis étudier la continuité de f sur son ensemble de définition et les limites éventuelles de f aux bornes de son ensemble de définition.

C9. 113. *Exercice (Mines).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right) \end{array} \right. .$$

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

C9. 114. *Exercice (Centrale).* —

1. Rappeler le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass. Dans toute la suite de l'exercice, on considère un réel $a \in \,]0,1[$ et une fonction $f \colon [0,a] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue telle que $f(0) = 0$.
2. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [0,a], \qquad |P(x^n) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

3. Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} b_k X^{kn} \in \mathbf{R}[X]$. Posons $R(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} E(b_k) X^{kn}$. Démontrer que :

$$\forall x \in [0,a], \qquad |Q(x) - R(x)| \leqslant \frac{a^n}{1-a^n}.$$

4. Établir l'existence d'une suite de polynômes à coefficients entiers convergeant uniformément sur $[0, a]$ vers f.
5. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, a], \mathbf{R})$. À quelle condition existe-t-il une suite de polynômes à coefficients entiers convergeant uniformément vers g sur $[0, a]$?
6. Soit $\varepsilon > 0$, soient $x_1, \ldots, x_n \in [0, a]$ et soit $h \in \mathcal{C}^0([0, a], \mathbf{R})$. Établir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0, a]$, $|P(x) - h(x)| \leqslant \varepsilon$ et pour tout $i \in [1, n]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

C9. 115. *Exercice (Centrale).* — Posons :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \inf_{n \in \mathbf{Z}} |x - n| = d(x, \mathbf{Z}) \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que φ est continue sur $\mathbf{R}$. Tracer la courbe représentative de φ.
2. Posons, pour $x \in \mathbf{R}$:
$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi\left(4^n x\right).$$
Démontrer que f est définie et continue sur $\mathbf{R}$.
3. Posons, pour $n \in \mathbf{N}$, $h_n = \dfrac{1}{2.4^n}$. Démontrer que :
$$\left|\frac{f(h_n) - f(0)}{h_n}\right| \geqslant \frac{3^{n+1} - 3}{2}.$$
En déduire que f n'est pas dérivable en 0.
4. Démontrer que f n'est nulle-part dérivable.

C9. 116. *Exercice (X).* — Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2x(1-x) \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que la suite (f^n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction valant 0 en 0 et en 1, et $\dfrac{1}{2}$ sur $]0, 1[$.
2. Démontrer que (f^n) converge vers $\dfrac{1}{2}$ uniformément sur tout segment de $]0, 1[$.
3. Soient a, b tels que $0 < a < b < 1$. Démontrer que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients entiers est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b])$.

C9. 117. *Exercice (ENS).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$f_n \colon x \longmapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n.$$

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_n^{(k)}(0) \in \mathbf{Z}$.
2. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. En considérant :
$$\int_0^1 p^{2n+1} e^{px} f_n(x)\, \mathrm{d}x$$
démontrer que e^p est irrationnel.
3. Par une méthode similaire, démontrer que π^2 est irrationnel.

C9. 118. *Exercice (ENS).* —

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ une fonction croissante. Démontrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales croissantes.
2. Reprendre la question précédente en supposant uniquement f continue et croissante.

C9. 119. *Exercice (X).* — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \end{array} \right.$$

est définie et continue sur $\mathbf{R}$. Étudier sa dérivabilité en 0.

C9. 120. *Exercice (X).* — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \exists\, L_n \subset [n, +\infty[\text{ fini}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \exists\, i \in L_n, \quad |f(x) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement uniformément vers f ?
2. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue en x_0. Démontrer que f est continue en x_0.

C9. 121. *Exercice (X).* — Posons :

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_{n+1} \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle 2\int_0^x \sqrt{|f_n(t)|}\, \mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$

Étudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.