M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°1
Suites numériques

David BLOTTIÈRE

Une suite numérique est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $u\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{K}$; $n \longmapsto u_n$, que l'on note couramment $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on s'intéresse à des propriétés de monotonie (croissance, décroissance, stricte croissance, stricte décroissance) et au comportement asymptotique. Il existe quatre comportements asymptotiques possibles : la suite peut converger (i.e. tendre vers un nombre réel), diverger vers $-\infty$, diverger vers $-\infty$ ou n'admettre aucune limite comme la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Il conviendra de bien revoir les définitions formelles de limite et de bien maîtriser les premiers raisonnements epsilonesques en s'appuyant sur des dessins pour figurer ces notions abstraites. La relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ et la propriété de la borne supérieure livreront des résultats puissants (e.g. théorème de la limite monotone), fort utiles pour définir de nouveaux nombres réels. Le cas $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ jouera un rôle important et, s'il ne fallait citer qu'un résultat, nous mentionnerions celui portant sur le comportement asymptotique des suites géométriques de raisons complexes : pour tout nombre complexe q, la suite $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si ($|q| < 1$ ou $q = 1$). Tant l'énoncé que la démonstration de ce résultat sont à savoir.

R1. 1. *Travail sur le cours.* — On commencera par une étude minutieuse du polycopié de cours sur les suites réelles [PDF]. Il faudra être en mesure :

- d'énoncer précisément et formellement les définitions ;
- d'énoncer et de démontrer les propositions et théorèmes ;
- de résoudre les exemples d'applications directes.

On veillera, autant que possible, à se forger une image mentale des concepts, à l'aide d'un dessin (e.g. pour la définition de suite convergente). De même, on pourra s'exercer à dégager les idées essentielles d'une démonstration au moyen d'un graphique (e.g. pour le théorème de la limite monotone). Votre compréhension s'en trouvera renforcée et vous disposerez d'une aide précieuse pour appréhender des questions nouvelles, qui pourra supporter votre intuition. Pour un exemple de représentation de la notion de suite convergente et d'applications possibles, vous pouvez visionner la vidéo [YouTube] (42 minutes).

Ce travail sur le cours est fondamental et il constituera le cœr de votre travail sur ce thème.

R1. 2. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. $n^2 + 2n + 2^n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.

> Vrai. D'après les croissances comparées
>
> $$n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(2^n\right) \qquad 2n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(2^n\right) \qquad \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(2^n\right)$$
>
> et donc
>
> $$n^2 + 2n + 2^n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} 2^n + o\left(2^n\right)$$
>
> ce qui équivaut à $n^2 + 2n + 2^n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Alors $(u_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

> Faux. Un contre-exemple est donné par la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$. En effet, en remarquant que, pour tout $n \in \mathbf{N}$
>
> $$(u_n)^n = \exp\left(n\ \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right)$$
>
> et en appliquant $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on démontre
>
> $$(u_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e \neq 1\ .$$

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Faux. Un contre-exemple est donné par les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n+1$ et $v_n = n$.

4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Faux. Un contre-exemple est donné par les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

5. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]a; b[$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et on note ℓ sa limite. Alors $\ell \in]a; b[$.

Faux. Un contre-exemple est donné par $a = 0$, $b = 2$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Remarque. D'après le théorème de passage à la limite dans une inégalité large, on a cependant $\ell \in [a, b]$.

6. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels qui converge. Alors, si ℓ désigne la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$.

Faux. Si f est la fonction partie entière et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais

$$f(u_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \neq f(1) = 1 \ .$$

Remarque. L'assertion est vraie, si l'on suppose de plus la fonction f continue en ℓ.

R1. 3. *Exercice.* — On étudie la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie, de manière implicite par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_n est l'unique solution de l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnnue $x \in]0, +\infty[$ admet une unique solution. Cette dernière sera notée x_n dans ce qui suit.

On introduit la fonction f_n définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x + \ln(x) \ . \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable (donc continue) sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \ .$$

D'après le critère différentiel de stricte monotonie, la fonction f est dont strictement croissante sur $]0,+\infty[$. De plus

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty\ .$$

Du théorème de la bijection, nous déduisons alors que la fonction f est bijective. L'élément $n \in \mathbf{R}$ possède un et un seul antécédent par f, que l'on note x_n.

2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbf{N}$. De
$$f\left(x_{n+1}\right) = n+1 > n = f\left(x_n\right)$$
et de la **stricte** croissance de la fonction f, nous déduisons $x_{n+1} > x_n$ (pourquoi ?). La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc strictement croissante.

3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$. Nous allons démontrer qu'elle n'est pas convergente (en raisonnant par l'absurde) et nous en déduirons
$$x_n \xrightarrow[n\to +\infty]{} +\infty\ .$$
Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et notons $\ell \in \mathbf{R}$ sa limite. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante
$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \qquad 0 < x_0 < x_n.$$
Par passage à la limite dans une inégalité, il vient

$$0 < x_0 \leqslant \ell.$$

Ainsi $\ell > 0$. Par continuité de la fonction f sur $]0,+\infty[$, nous en déduisons que :

$$f\left(x_n\right) \xrightarrow[n\to +\infty]{} f(\ell) \in \mathbf{R}$$

ce qui est contradictoire avec
$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad f\left(x_n\right) = n.$$

4. Démontrer
$$x_n \underset{n\to +\infty}{\sim} n.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$x_n + \ln\left(x_n\right) = n.$$

Comme $x_n \neq 0$, nous déduisons
$$1 + \frac{\ln\left(x_n\right)}{x_n} = \frac{n}{x_n}\ .$$

Par croissances comparées

$$\frac{\ln(X)}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0.$$

De la question 3 et du résultat sur les composition de limites, nous déduisons

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi

$$\frac{n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et donc $n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.

5. Démontrer

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n)).$$

Indication : On pourra introduire la quantité a_n ***définie par*** $\dfrac{x_n}{n} = 1 + a_n$***, pour tout*** $n \in \mathbf{N}^*$.

Il s'agit de démontrer

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

i.e.

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}\ .$$

Nous savons d'après la question précédente que

$$\frac{x_n}{n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et il nous faut à présent préciser la vitesse de convergence de $\left(\dfrac{x_n}{n} - 1\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vers 0.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $x_n + \ln(x_n) = n$

$$(\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 = -\frac{\ln(x_n)}{n}\ .$$

Nous observons

$$\ln(n) = \ln(x_n + \ln(x_n)) = \ln(x_n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n}\right).$$

Nous avons déjà établi

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et nous en déduisons

$$\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(x_n)\ .$$

D'après cet équivalent et $(\star)$

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}$$

ce qu'il fallait établir.

6. Démontrer

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Il s'agit de démontrer

$$\frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

i.e.

$$\frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En reprenant les calculs effectués à la question précédente, il vient

$$(\star\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} = \frac{1}{n}\ \ln\left(1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n}\right).$$

Comme

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$$

il vient

$$\ln\left(1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

Comme nous avons établi

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \qquad \text{et} \qquad \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

nous pouvons affirmer

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

De cet équivalent et de $\star\star$, nous déduisons

$$(\star\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

ce qu'il fallait établir.

R1. 4. *Exercice.* — On étudie une caractérisation des suites réelles non majorées. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On suppose qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui diverge vers $+\infty$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée.

Par hypothèse, il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ majorée. Alors il existe $M \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$. En particulier

$$(\star) \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad u_{\varphi(n)} \leqslant M\ .$$

Comme $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$(\star\star) \qquad \forall\, n \geqslant N, \quad u_{\varphi(n)} \geqslant M + 1\ .$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons $M + 1 \leqslant u_{\varphi(N)} \leqslant M$. Contradiction.

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée. Démontrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui diverge vers $+\infty$.
Indication : On pourra construire, par récurrence, une suite de nombres entiers naturels $(\varphi(n))_{n\in\mathbf{N}}$ qui est strictement croissante et qui vérifie de plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{\varphi(n)} > n$.

Nous devons construire une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. une application $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante. Nous souhaitons de plus que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Pour cela nous allons construire $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ par récurrence.

Comme 0 n'est pas un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $0 < u_{n_0}$. Nous posons $\varphi(0) := n_0$, de sorte que $u_{\varphi(0)} > 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons construits des entiers naturels $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ tels que
— $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$;
— $u_{\varphi(0)} > 0, u_{\varphi(1)} > 1, \ldots, u_{\varphi(n)} > n$.
Si la suite $(u_p)_{p\geqslant\varphi(n)+1}$ était majorée par $M \in \mathbf{R}$, alors la suite $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ serait également majorée par
$\max(u_0, \ldots, u_{\varphi(n)+1}, M)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. La suite $(u_p)_{p\geqslant\varphi(n)+1}$ n'est donc pas majorée. Comme $n+1$ n'est pas un majorant de la suite $(u_p)_{p\geqslant\varphi(n)+1}$, il existe $p \geqslant \varphi(n)+1$ tel que $u_p > n+1$. Nous posons $\varphi(n+1) := p$, de sorte que $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)+1 > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} > n+1$. Ainsi
— $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n) < \varphi(n+1)$;
— $u_{\varphi(0)} > 0, u_{\varphi(1)} > 1, \ldots, u_{\varphi(n)} > n$, $u_{\varphi(n+1)} > n+1$.

Nous avons ainsi construit, par récurrence, une application

$$\varphi \ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}\right.$$

qui est strictement croissante et qui vérifie de plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{\varphi(n)} > n$. Par théorème de domination, nous en déduisons $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3. Synthétiser les résultats des deux premières questions en une seule phrase.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée si et seulement si elle possède une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

R1.5. *Défi.* — Dans la question 2 de l'exercice **R1.2**, nous avons vu que pour l'assertion :

$$\forall\,(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \implies u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

est **fausse**. En fait, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels qui converge vers 1, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ peut converger vers un nombre réel positif ou nul quelconque ou diverger vers $+\infty$ ou n'admettre aucune limite.

1. Soit $\ell \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telle que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\,.$$

Nous débutons par une analyse de la situation, basée sur des idées présentées dans la solution donnée de la question 2 de l'exercice **R1.2** Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n > 0$ (cf. définition formelle de la limite avec $\varepsilon = 1/2$). Nous pouvons donc écrire, pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n^n = \exp\left(n\,\ln\left(u_n\right)\right) = \exp\left(n\,\ln\left(1+\varepsilon_n\right)\right)$$

avec $\varepsilon_n := u_n - 1$. Comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, il vient :

$$n\,\ln\left(1+\varepsilon_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\varepsilon_n$$

mais, attention, u_n^n et $e^{n\,\varepsilon_n}$ ne sont pas nécessairement équivalents (n et $n+1$ sont équivalents, mais e^n et e^{n+1} ne le sont pas).

- Soit ℓ un nombre réel strictement positif. La discussion précédente et la continuité de la fonction exponentielle en $\ln(\ell)$ assure que si l'on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n := 1 + \frac{\ln(\ell)}{n} \qquad \left(\varepsilon_n = \frac{\ln(\ell)}{n}\right)$$

alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\ln(\ell)) = \ell\,.$$

- La discussion précédente et la limite nulle d'exponentielle en $-\infty$ assure que si l'on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n := 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \left(\varepsilon_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

2. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telle que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\ .$$

De nouveau, grâce à la discussion de la réponse donnée à la question précédente et à la limite $+\infty$ d'exponentielle en $+\infty$ assure que si l'on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \left(\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\ .$$

3. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telle que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \text{la suite } (u_n^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ n'admet aucune limite.}$$

Grâce à la discussion précédente (encore) et au fait que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'ait aucune limite, on peut être tenté de considérer la suite définie par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n := 1 + \frac{(-1)^n}{n} \qquad \left(\varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

sans pour autant avoir la certitude que cette suite convienne, avant une étude soignée.

- Comme la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0 et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_{2n}^{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1}^{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\ .$$

Grâce à la réponse apportée à la question 1 :

$$u_{2n}^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1}^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}\ .$$

La suite $(u_n^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet donc aucune limite.