M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°1
Suites numériques

David BLOTTIÈRE

Une suite numérique est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $u\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{K}$; $n \longmapsto u_n$, que l'on note couramment $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on s'intéresse à des propriétés de monotonie (croissance, décroissance, stricte croissance, stricte décroissance) et au comportement asymptotique. Il existe quatre comportements asymptotiques possibles : la suite peut converger (i.e. tendre vers un nombre réel), diverger vers $-\infty$, diverger vers $-\infty$ ou n'admettre aucune limite comme la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Il conviendra de bien revoir les définitions formelles de limite et de bien maîtriser les premiers raisonnements epsilonesques en s'appuyant sur des dessins pour figurer ces notions abstraites. La relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ et la propriété de la borne supérieure livreront des résultats puissants (e.g. théorème de la limite monotone), fort utiles pour définir de nouveaux nombres réels. Le cas $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ jouera un rôle important et, s'il ne fallait citer qu'un résultat, nous mentionnerions celui portant sur le comportement asymptotique des suites géométriques de raisons complexes : pour tout nombre complexe q, la suite $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si ($|q| < 1$ ou $q = 1$). Tant l'énoncé que la démonstration de ce résultat sont à savoir.

R1. 1. *Travail sur le cours.* — On commencera par une étude minutieuse du polycopié de cours sur les suites réelles [PDF]. Il faudra être en mesure :

- d'énoncer précisément et formellement les définitions ;
- d'énoncer et de démontrer les propositions et théorèmes ;
- de résoudre les exemples d'applications directes.

On veillera, autant que possible, à se forger une image mentale des concepts, à l'aide d'un dessin (e.g. pour la définition de suite convergente). De même, on pourra s'exercer à dégager les idées essentielles d'une démonstration au moyen d'un graphique (e.g. pour le théorème de la limite monotone). Votre compréhension s'en trouvera renforcée et vous disposerez d'une aide précieuse pour appréhender des questions nouvelles, qui pourra supporter votre intuition. Pour un exemple de représentation de la notion de suite convergente et d'applications possibles, vous pouvez visionner la vidéo [YouTube] (42 minutes).

Ce travail sur le cours est fondamental et il constituera le cœr de votre travail sur ce thème.

R1. 2. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. $n^2 + 2n + 2^n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Alors $(u_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
5. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in]a; b[$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et on note ℓ sa limite. Alors $\ell \in]a; b[$.
6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels qui converge. Alors, si ℓ désigne la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$.

R1. 3. *Exercice.* — On étudie la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie, de manière implicite par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_n est l'unique solution de l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnnue $x \in]0, +\infty[$ admet une unique solution. Cette dernière sera notée x_n dans ce qui suit.
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.
3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.
4. Démontrer
$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$
5. Démontrer
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n)).$$
Indication : On pourra introduire la quantité a_n ***définie par*** $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$***, pour tout*** $n \in \mathbf{N}^*$.
6. Démontrer
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

R1. 4. *Exercice.* — On étudie une caractérisation des suites réelles non majorées. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On suppose qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui diverge vers $+\infty$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée.
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée. Démontrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui diverge vers $+\infty$.
   Indication : On pourra construire, par récurrence, une suite de nombres entiers naturels $(\varphi(n))_{n\in\mathbf{N}}$ ***qui est strictement croissante et qui vérifie de plus, pour tout*** $n \in \mathbf{N}$, $u_{\varphi(n)} > n$.
3. Synthétiser les résultats des deux premières questions en une seule phrase.

R1. 5. *Défi.* — Dans la question 2 de l'exercice **R1.2**, nous avons vu que pour l'assertion :

$$\forall\,(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \implies u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

est **fausse**. En fait, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels qui converge vers 1, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ peut converger vers un nombre réel positif ou nul quelconque ou diverger vers $+\infty$ ou n'admettre aucune limite.

1. Soit $\ell \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telle que :
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ .$$
2. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telle que :
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\ .$$
3. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telle que :
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \text{la suite } (u_n^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ n'admet aucune limite.}$$