M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Chapitre 1
Suites numériques

David BLOTTIÈRE

Table des matières

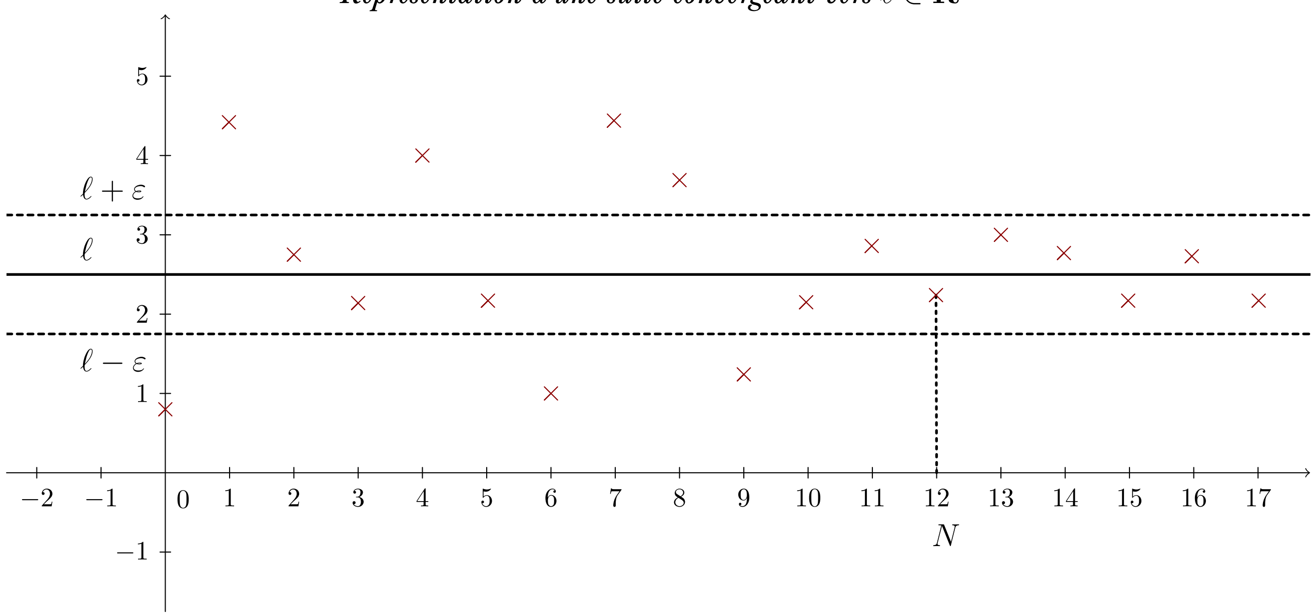
1 Limite de suite

1.1 Suites convergentes

C1. 1. Définition (Suite convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$). — *Soit $(u_n)_{\in \mathbf{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{\in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, et on note $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$, si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}, \qquad \exists N \in \mathbf{N}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Représentation d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$



C1. 2. Proposition (Unicité de la limite d'une suite convergente). — *Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle convergente. Alors le nombre réel ℓ tel que $u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$ est unique. On l'appelle limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et on le note $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.*

C1. 3. Proposition (Convergente $\Longrightarrow$ bornée). — *Toute suite réelle convergente est bornée.*

C1. 4. *Question.* — Une suite réelle bornée est-elle nécessairement convergente ?

C1. 5. *Exercice (Signe d'une suite convergeant vers un réel strictement positif).* — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle convergente de limite $\ell > 0$. Démontrer : $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

C1. 6. *Question.* — Une suite réelle convergente est-elle nécessairement monotone à partir d'un certain rang ?

C1. 7. *Question.* — Une suite de réels strictement positifs, convergente, de limite nulle est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?

C1. 8. *Exercice (Écriture formelle de deux propriétés).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et soit $\ell \in \mathbf{R}$. Exprimer les propriétés suivantes sous forme quantifiée.

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers ℓ.
2. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de limite finie.

C1. 9. Opérations sur les suites convergentes. —

1. *L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites réelles convergentes indexées par $\mathbf{N}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, i.e.*
   - *(a) la suite constante nulle appartient à $\mathcal{S}_c$*
   - *(b) l'ensemble $\mathcal{S}_c$ est stable par somme :*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c, \quad \forall\, (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c, \quad (a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c$$

   - *(c) l'ensemble $\mathcal{S}_c$ est stable par multiplication par un scalaire :*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c, \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R}, \quad (\lambda a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c$$

   - *(d) l'ensemble $\mathcal{S}_c$ est stable par multiplication interne :*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c, \quad \forall\, (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c, \quad (a_n\, b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c\ .$$

2. *L'application :*

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_c & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (a_n)_{n\in\mathbf{N}} & \mapsto & \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n \end{array}\right.$$

   est un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres, i.e. :
   - *(a) l'application est linéaire :*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c,\ \forall\, (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda a_n + \mu b_n = \lambda \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n + \mu \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n$$

   - *(b) l'image de la suite constante égale à 1 (qui est le neutre de $\mathcal{S}_c$ pour la multiplication interne) est le réel 1 (qui est le neutre de $\mathbf{R}$ pour la multiplication)*
   - *(c) l'application respecte le produit interne*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c, \quad \forall\, (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n\, b_n = \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n\right) \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n\right).$$

3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c$ est un élément inversible de $\mathcal{S}_c$. On suppose que $\ell := \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \neq 0$. Alors*

$$\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{S}_c \quad \textit{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}.$$

C1. 10. *Exercice (Convergence du carré d'une suite versus convergence de la suite elle-même).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement ?
2. Si $(u_n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement vers 0 ?

C1. 11. *Question.* — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $a_n - b_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. Peut-on affirmer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n$?

C1. 12. THÉORÈME (PASSAGE À LA LIMITE DANS UNE INÉGALITÉ LARGE). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :*

- *(H1) la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;*
- *(H2) la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;*
- *(H3) $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.*

Alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

C1. 13. *Question.* — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < v_n$. A-t-on nécessairement $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n < \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$?

C1. 14. THÉORÈME (ENCADREMENT). — *Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites réelles. On suppose que :*

- *(H1) la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;*
- *(H2) la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;*
- *(H3) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} c_n$;*
- *(H4) $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ à partir d'un certain rang.*

Alors

- *(C1) la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ;*
- *(C2) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} c_n$.*

C1. 15. *Exercice.* —

1. Démontrer : $\dfrac{\cos(n)}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.
2. Proposer une généralisation du résultat de la question 1.

C1. 16. *Exercice (Comportement asymptotique de $(\sin(n)_{n\in\mathbf{N}}$).* — Démontrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est divergente ?

1.2 Suites divergeant vers $-\infty$

C1. 17. Définition (Suite divergeant vers $-\infty$). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, si*

$$\forall A \in \mathbf{R}, \qquad \exists N \in \mathbf{N}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant A.$$

C1. 18. Théorème (Domination pour la divergence vers $-\infty$). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.*

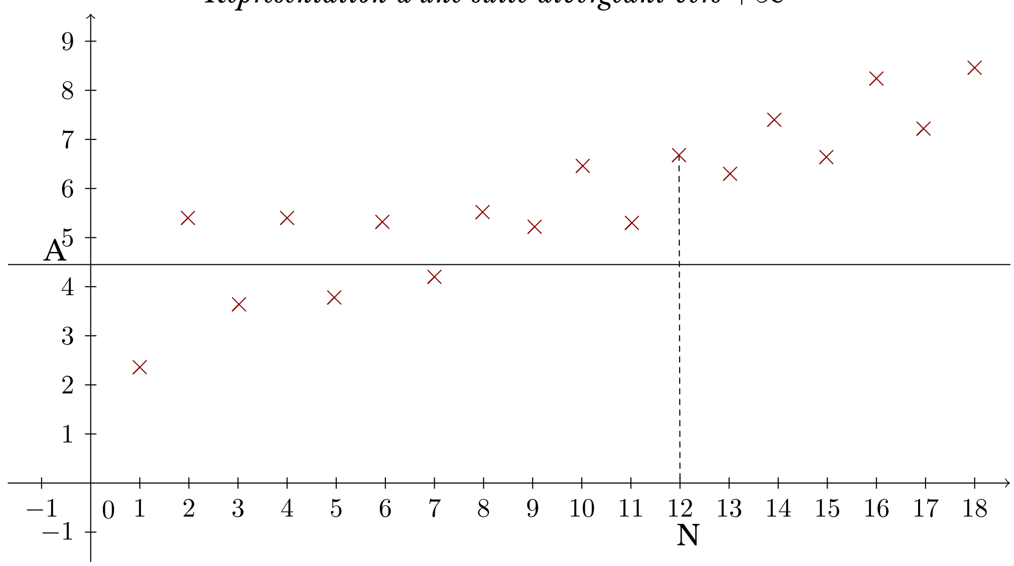
$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

1.3 Suites divergeant vers $+\infty$

C1. 19. Definition (Suite divergeant vers $+\infty$). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, si*

$$\forall A \in \mathbf{R}, \qquad \exists N \in \mathbf{N}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A.$$

Représentation d'une suite divergeant vers $+\infty$



C1. 20. Théorème (domination pour la divergence vers $+\infty$). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

C1. 21. *Exercice.* — Démontrer $n! \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n!$.

C1. 22. *Exercice (Comportement asymptotique d'une suite réelle géométrique).* — Soit $q \in \mathbf{R}$. Quel est le comportement asymptotique de la suite $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$?

C1. 23. *Exercice (Opérations sur les suites divergeant vers l'infini).* — Énoncer et démontrer les résultats sur les opérations sur les suites réelles divergeant vers l'infini.

C1. 24. *Exercice (Croissances comparées).* — Soient des nombres réels α, β, q strictement positifs. Énoncer les résultats sur les croissances comparées des suites :

$$(n^\alpha)_{n\in\mathbf{N}} \qquad \left(\ln^\beta(n)\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \qquad (q^n)_{n\in\mathbf{N}} \qquad (n!)_{n\in\mathbf{N}} \quad .$$

Comment peut-on les établir ?

C1. 25. *Exercice (Formalisation de la non divergence vers $+\infty$).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Exprimer à l'aide d'une proposition logique quantifiée l'assertion : « $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ ».

C1. 26. *Question.* — Une suite réelle qui ne tend pas vers $+\infty$ est-elle nécessairement majorée ?

C1. 27. *Question.* — Une suite qui tend vers $+\infty$ est-elle nécessairement croissante à partir d'un certain rang ?

C1. 28. *Exercice (Suite réelle non majorée).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle non majorée. Démontrer qu'il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, strictement croissante, telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.

C1. 29. *Exercice (Une version du critère de D'Alembert pour les suites).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$.

1. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ si $\ell < 1$.
2. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$ si $\ell > 1$.
3. Que peut-on dire du comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si $\ell = 1$?

C1. 30. *Exercice.* — Soit $x \in \mathbf{R}$.

1. Justifier que le nombre $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ est bien défini à partir d'un certain rang n_x.
2. Étudier le comportement asymptotique de la suite $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant n_x}$.

C1. 31. *Exercice (La forme indéterminée $1^{+\infty}$).* —

1. Soit $\ell > 0$. Donner une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et telle que $u_n^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$.
2. Donner une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et telle que $v_n^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.
3. Donner une suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et telle que la suite $(w_n^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'ait ni limite finie ni limite infinie.

C1. 32. *Question.* — Quel peut être le comportement asymptotique d'une suite réelle ?

2 Théorème de la limite monotone et conséquences

C1. 33. Théorème (la limite monotone). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle croissante.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, alors elle converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.*

C1. 34. *Remarque.* — Ce théorème d'existence « abstraite » de limite est un outil puissant pour construire de nouveaux nombres. Il a des applications très riches, dans la théorie des séries numériques par exemple.

C1. 35. *Question.* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle, décroissante et minorée par 0. A-t-on nécessairement $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$?

C1. 36. Corollaire (Théorème des suites adjacentes). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites réelles. On suppose que*

(H1) $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est croissante ;*
(H2) $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante ;*
(H3) $u_n - v_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Alors

(C1) $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge ;*
(C2) $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge ;*
(C3) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$;
(C4) $\forall\, k \in \mathbf{N}, \quad u_0 \leqslant u_k \leqslant \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n \leqslant v_k \leqslant v_0$.

C1. 37. *Remarque.* — Le théorème des suites adjacentes est, avant tout, un critère de convergence pour deux suites. Le résultat sur la valeur commune des deux limites est trivial, une fois les deux convergences établies.

C1. 38. *Question.* — Que peut-on dire de deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant seulement les hypothèses (H1) et (H2) du théorème des suites adjacentes ?

C1. 39. *Exercice (Théorème des segments emboîtés).* — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites réelles telles que $a_n \leqslant b_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $K_n := [a_n, b_n]$, le segment d'extrémités a_n, b_n. On suppose que :

(H1) la suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, i.e. $K_{n+1} \subset K_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$;

(H2) $\text{longueur}(K_n) := b_n - a_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Démontrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ est un singleton, i.e. il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n = \{\ell\}$.

C1. 40. *Question.* — Que dire d'une suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de segments de $\mathbf{R}$ décroissante au sens de l'inclusion (i.e. vérifiant uniquement l'hypothèse (H1) du théorème des segments emboîtés) ?

C1. 41. *Exercice* ($\liminf$ *et* $\limsup$ *d'une suite réelle bornée).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$v_n := \inf_{p\geqslant n} u_p \qquad \text{et} \qquad w_n := \sup_{p\geqslant n} u_p.$$

1. Démontrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes.
2. Que peut-on dire de plus, dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ?

3 Valeur d'adhérence

C1. 42. Définition (Suite extraite et valeur d'adhérence). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.*

1. *On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, où $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ est une application strictement croissante.*
2. *Un nombre réel ℓ est appelée valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers ℓ.*

C1. 43. *Exercice (Calculs de quelques valeurs d'adhérence).* —

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = n\,(1 + (-1)^n)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Déterminer une valeur d'adhérence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

C1. 44. Proposition (Valeur d'adhérence d'une suite convergente). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$. Toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne possède qu'une valeur d'adhérence : ℓ.*

C1. 45. *Exercice (Suite extraite des termes d'indices pairs et suite extraite des termes d'indices impairs).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur ces deux suites extraites, pour que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

C1. 46. *Exercice (Critère pour être valeur d'adhérence d'une suite).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et soit $\ell \in \mathbf{R}$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbf{N}, \quad \exists n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \ : \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\}$ est infini.
4. Il existe une suite d'entiers naturels strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_{k_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$.

C1. 47. *Exercice (Ensemble de valeurs d'adhérence).* —

1. Déterminer toutes les valeurs d'adhérence des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Déterminer toutes les valeurs d'adhérence des suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = n\ (1 + (-1)^n)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

C1. 48. *Exemple.* — Grâce au Théorème décrivant les sous-groupes du groupe $(\mathbf{Z}, +)$ (cf. Chapitre 3 « Algèbre Générale »), on peut démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est le segment $[-1, 1]$.

C1. 49. *Question.* — Une suite réelle ayant une unique valeur d'adhérence est-elle nécessairement convergente ?

C1. 50. *Question.* — Une suite réelle possède-t-elle toujours une valeur d'adhérence ?

C1. 51. *Question.* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Soient $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ et $\psi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ deux applications strictement croissantes. Les suites

$$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}} \qquad \text{et} \qquad (u_{\psi\circ\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$$

sont-elles des suites extraites de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$?

4 Théorème de Bolzano-Weierstraß

C1. 52. Théorème (Bolzano-Weierstrass). — *Toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

C1. 53. Corollaire (Suite réelle bornée ayant une unique valeur d'adhérence). — *Toute suite réelle bornée ayant une unique valeur d'adhérence converge.*

C1. 54. *Exercice (Suites extraites de deux suites, convergentes et ayant des indices communs).* — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles bornées. Démontrer qu'il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que les suites $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent.

C1. 55. *Exercice (Valeurs d'adhérence identiques).* — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ont les mêmes valeurs d'adhérence.

C1. 56. *Exercice (Borne supérieure, borne inférieure et valeurs d'adhérence).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Démontrer que A admet une borne supérieure et une borne inférieure, et que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ appartiennent à A.

C1. 57. *Exercice (Lemme de la puce).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée telle que :

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\ .$$

Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un segment.

C1. 58. *Remarque.* — Le théorème de Bolzano-Weierstraß permet de démontrer plusieurs théorèmes fondamentaux, portant sur les fonctions définies et continues sur un segment de $\mathbf{R}$. Nous en mentionnons deux.

1. *Le théorème de Heine*
   Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors f est une fonction uniformément continue, i.e. :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \exists\,\alpha > 0, \quad \forall\,(x, y) \in [a\,,\,b]^2, \quad |x-y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\ .$$

2. *Le théorème des bornes atteintes*
   Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. :

$$\exists\,(x_m, x_M) \in [a\,,\,b]^2, \quad \forall\,x \in [a\,,\,b], \quad f\left(x_m\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(x_M\right)\ .$$

5 Limite inférieure et limite supérieure (HP)

On étudie plus en profondeur des notions rencontrées lors de la résolution de l'exercice **C1.41**.

C1. 59. Définition (Limite supérieure et limite inférieure). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée.*

1. *La suite $\left(\sup\limits_{p\geqslant n} u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}}\sup\limits_{p\geqslant n} u_p$. On appelle limite supérieure de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on note $\limsup u_n$ la limite de la suite $\left(\sup\limits_{p\geqslant n} u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. :*

$$\limsup u_n := \inf_{n\in\mathbf{N}}\sup_{p\geqslant n} u_p = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{p\geqslant n} u_p.$$

2. *La suite $\left(\inf\limits_{p\geqslant n} u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée. Elle converge donc vers $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\inf\limits_{p\geqslant n} u_p$. On appelle limite*

inférieure de** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **et on note** $\liminf u_n$ **la limite de la suite** $\left(\inf_{p\geqslant n} u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$**, i.e. :

$$\liminf u_n := \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf_{p\geqslant n} u_p = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \inf_{p\geqslant n} u_p.$$

C1. 60. Proposition (Limite inférieure, limite supérieure et valeur d'adhérence). — ***Soit** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **une suite réelle bornée.***

1. $\limsup u_n$ ***et** $\liminf u_n$ **sont des valeurs d'adhérence de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
2. $\limsup u_n$ ***est la plus grande valeur d'adhérence de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
3. $\liminf u_n$ ***est la plus petite valeur d'adhérence de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*

C1. 61. *Exercice (Un critère de convergence via $\limsup$ et $\liminf$).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $\limsup u_n = \liminf u_n$.

C1. 62. *Exercice (Suites sous-additives).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que :

$$\forall\,(n,m)\in\mathbf{N}^2, \qquad u_{n+m}\leqslant u_n+u_m.$$

1. Soit $(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ tel que $n<m$. Démontrer qu'il existe $r\in\mathbf{N}$ tel que $r<n$ et :
$$\frac{u_m}{m}\leqslant\frac{u_n}{n}+\frac{u_r}{m}.$$
2. On suppose $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée. Démontrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

6 Suites complexes

C1. 63. Definition (Convergence d'une suite à valeurs complexes). — ***Soit** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **une suite de nombres complexes, soit** $\ell\in\mathbf{C}$. **On dit que la suite** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge vers** ℓ **et on écrit** $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$ **si :***

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N},\quad \forall\,n\in\mathbf{N},\qquad n\geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

C1. 64. *Remarque.* — Dans la définition **C1.63**, le symbole $|\cdot|$ désigne le module.

C1. 65. Proposition (Convergence via les parties réelle et imaginaire). — ***Soit** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **une suite de nombres complexes, soit** $\ell\in\mathbf{C}$. **La suite** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge vers** ℓ **si et seulement si la suite** $(Re(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ **converge vers** $Re(\ell)$ **et la suite** $(Im(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ **converge vers** $Im(\ell)$.*

C1. 66. *Concepts et résultats sur les suites réelles qui s'étendent aux suites complexes.* —

- Les Théorèmes d'opérations.

- La notion de valeur d'adhérence.
- Le Théorème de Bolzano-Weierstraß.

C1. 67. *Concepts et résultats sur les suites réelles qui ne s'étendent pas aux suites complexes.* —
- La notion de suite monotone et le Théorème de convergence monotone.
- Le Théorème de passage à la limite dans une inégalité large.
- Le Théorème d'encadrement.
- La notion de suites adjacentes, le théorème des suites adjacentes.
- La notion de limite supérieure et de limite inférieure.

C1. 68. *Exercice (Comportement asymptotique d'une suite complexe géométrique).* — Soit $q \in \mathbf{C}$. Quel est le comportement asymptotique de la suite $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$?

C1. 69. *Exercice (Module et arguments).* — Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels. On suppose que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de terme général

$$z_n := \rho_n e^{i\theta_n}$$

est convergente et on note $z = \rho e^{i\theta}$ sa limite (que l'on suppose non nulle), où ρ est un réel positif et θ un réel.

1. Les suites $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent-elles nécessairement ?
2. Reprendre la question 1 avec l'hypothèse additionnelle suivante.

$$\text{(H1)} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \theta_n \in]\theta - \pi, \theta + \pi]$$

3. Reprendre la question 1 avec les hypothèses additionnelles suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{(H1)} & \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \theta_n \in]\theta - \pi, \theta + \pi] \\ \text{(H2)} & \rho > 0 \end{array}$$

C1. 70. *Remarque.* — Le théorème des segments emboîtés (cf. Exercice **C1.39**) n'a pas de sens tel quel dans $\mathbf{C}$, mais peut être reformulé de manière satisfaisante (cf. Exercice **C1.71**).

C1. 71. *Exercice (Une version du Théorème des segments emboîtés dans $\mathbf{C}$).* — Soit une suite $\left(\overline{B}(a_n, r_n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ de boules fermées de $\mathbf{C}$, décroissante au sens de l'inclusion, telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer qu'il existe $\ell \in \mathbf{C}$ tel que :

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{B}(a_n, r_n) = \{\ell\} .$$

7 Une sélection d'exercices

C1. 72. *Exercice (Suite arithmético-géométrique).* — Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

C1. 73. *Exercice (Suite récurrente linéaire d'ordre 2).* — Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

C1. 74. *Exercice (Suite récurrente linéaire d'ordre 2).* — Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

C1. 75. *Exercice (Suite d'entiers qui converge).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{Z}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ. Démontrer que $\ell \in \mathbf{Z}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

C1. 76. *Exercice (Sous-suite des termes d'indices congrus à 0 (resp. 1, 2) modulo 3).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que les suites $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle ?
2. Supposons que $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

C1. 77. *Exercice (Banque CCINP).* —

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

C1. 78. *Exercice (Banque CCINP).* — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

C1. 79. *Exercice (Banque CCINP, Irrationalité de e).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.
2. On admet que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} e$. Démontrer que $e \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

   Indication : Raisonner par l'absurde et supposer que e peut s'écrire $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.

C1. 80. *Exercice (Banque CCINP).* —

1. Démontrer que pour, tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant e^x - x - 1 \leqslant \dfrac{e}{2}x^2$.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in N^*}$.

   Indication : on pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\longrightarrow+\infty}{=} \ln(n) + o(1)$.

C1. 81. *Exercice (Banque CCINP).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante telle que $u_n+u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ et déterminer un équivalent de u_n.

C1. 82. *Exercice (Banque CCINP).* — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{E\left(\sqrt{k+1}\right) - E\left(\sqrt{k}\right)}{k}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Indication : on pourra admettre que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ *converge.*

C1. 83. *Exercice (Banque CCINP).* — Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbf{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$.
Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n, puis étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

C1. 84. *Exercice (Banque CCINP).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Démontrer que $u_n \sim \dfrac{2n}{\pi}$.

C1. 85. *Exercice (Banque CCINP).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que $u_0, u_1, u_2 \in \mathbf{R}_{>0}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+3} = (u_n u_{n+1} u_{n+2})^{1/3}.$$

Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et déterminer son éventuelle limite en fonction de u_0, u_1, u_2.

C1. 86. *Exercice (Banque CCINP).* — Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}$.

C1. 87. *Exercice (Banque CCINP).* — Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$.

1. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

C1. 88. *Exercice (Banque CCINP).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $s_n \leqslant 9(\log(n) + 1)$ où $\log$ désigne le logarithme décimal.
2. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

C1. 89. *Exercice (Banque CCINP).* — Considérons deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $0 \leqslant x_0$, $y_0 \leqslant 7$ et les relations de récurrence

$$x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \sqrt{7 - x_n}$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Étudier la convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

C1. 90. *Exercice (Banque CCINP).* —

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation
$$\tan\left(\frac{x\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2nx}$$
admet une unique solution x_n dans $]0,1[$.
2. Démontrer que $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ et déterminer un équivalent de x_n.

C1. 91. *Exercice (Banque CCINP).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

C1. 92. *Exercice (Banque CCINP).* —

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, l'équation
$$1 + \ln(x+n) = x$$
admet une unique solution $u_n \in \mathbf{R}_{>0}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}_{\geqslant 2}}$ est croissante.
3. Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a : $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant n$.
4. Déterminer un équivalent de u_n.

C1. 93. *Exercice (Banque CCINP).* — Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction 1-lipschitzienne. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle définie par la donnée de $x_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$$
valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f.

C1. 94. *Exercice (Mines-Ponts).* —

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation
$$x = \operatorname{cotan}(x)$$
admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = n\pi + \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
3. Déterminer un équivalent de x_n, puis un développement asymptotique à deux termes de x_n.

C1. 95. *Exercice (Moyenne arithmético-géométrique).* — Soient deux nombres réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les deux suites définies par $u_0 := a$, $v_0 := b$ et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\ .$$

1. Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $y \geqslant 0$, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant v_n$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une limite commune. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.
4. Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$.
5. Démontrer que, pour tout $\lambda > 0$, $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda\, M(a,b)$.
6. Écrire une fonction Python $\mathrm{moyenne(a, b, ecart)}$ qui donne un encadrement de la moyenne arithmético-géométrique de deux réels a et b, avec une erreur inférieure ou égale à ecart.

C1. 96. *Exercice (Mines-Ponts).* —

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, l'équation
$$x^n - nx + 1 = 0$$
admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0,1[$.
2. Démontrer que $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n.

C1. 97. *Exercice (Centrale).* —

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation
$$e^{-x}\cos(x) = \frac{x}{n}$$
admet une solution maximale x_n sur $\mathbf{R}$.
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et diverge vers $+\infty$.

C1. 98. *Exercice (Centrale).* —

1. Soit $a > 0$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique $x_n > n$ tel que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_n - k} = a.$$
2. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et déterminer un équivalent de x_n.

C1. 99. *Exercice (Mines-Ponts).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$, posons :

$$f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive ou nulle, que l'on notera x_n.
2. Étudier la convergence et déterminer l'éventuelle limite de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

C1. 100. *Exercice (Mines-Ponts).* —

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = 1$$

admet une unique solution positive notée x_n.

2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

C1. 101. *Exercice (Mines-Ponts).* — Soient $h, k \in \mathbf{N}$ tels que $1 \leqslant k < h$. Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{i=kn+1}^{hn} \ln\left(1 + \frac{i}{n^2}\right).$$

C1. 102. *Exercice (Mines-Ponts).* — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}.$$

Déterminer un équivalent de u_n.

C1. 103. *Exercice (Mines-Ponts).* — Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle, convergeant vers un réel ℓ, et notons $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad y_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k.$$

Étudier la convergence de $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et déterminer son éventuelle limite.

C1. 104. *Exercice.* — Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue, soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

C1. 105. *Exercice (Mines-Ponts).* —

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer : $u_n \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

2. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \sin(1)\cos(1)$.

3. Posons $z_0 = re^i$, avec $r > 0$. Considérons la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

   Étudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

C1. 106. *Exercice (Centrale).* — Soit $a \in]-1,1[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Démontrer que :

$$u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \iff u_{n+1} - au_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\,.$$

C1. 107. *Exercice (Mines-Ponts).* — Soit $u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée telle que :

$$u_{n+1} - u_{n-1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Démontrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est soit infini, soit de cardinal inférieur ou égal à 2.

C1. 108. *Exercice (X).* — Soit $\lambda \in]0,1]$. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1]$ et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

C1. 109. *Exercice (Centrale).* —

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $a > 1$ vérifiant
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a.$$
Démontrer que $a_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.

2. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f\colon I \longrightarrow I$ une fonction dérivable. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de I telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$u_{n+1} = f(u_n).$$
On suppose que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell \in I$ et que $|f'(\ell)| > 1$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est stationnaire.

3. Soit $a \in \mathbf{R}$, posons pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$u_n = 2\cos(2^n a).$$
   (a) Déterminer une fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (b) Déterminer les points fixes de f.
   (c) Déterminer les réels a tels que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

C1. 110. *Exercice (X).* — Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme
$$f(x) \underset{x\longrightarrow 0^+}{=} x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$$

1. Démontrer que pour u_0 assez petit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
converge vers 0.
2. Déterminer un équivalent de u_n.
Indication : on pourra examiner $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour un certain β.
3. Traiter l'exemple de la fonction sinus.

C1. 111. *Exercice (X).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k.$$

1. On suppose (dans cette question seulement) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est à termes réels positifs.

Démontrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

(b) Le suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

2. On suppose que $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$. Démontrer que si $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.