M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Chapitre 2
Séries numériques

David BLOTTIÈRE

Table des matières

1 Notions de base sur les séries numériques

C2. 1. *Notation.* — Dans toute cette partie, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

C2. 2. DÉFINITION (SÉRIE CONVERGENTE). — *Soit* $n_0 \in \mathbf{N}$. *Soit* $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{K}$.

1. *La série* $\sum u_n$ *est dite convergente si la suite* $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ *de terme général*

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

   est convergente, i.e. si la suite des sommes partielles converge.

2. *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors la limite de la suite* $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ *est appelée somme de la série et est notée* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

C2. 3. *Sur trois notations attachées aux séries.* — On veillera à ne pas confondre les trois notations suivantes, qui désignent des objets, certes liés, mais différents.

$\sum u_n$	désigne la série de terme général u_n, où $n \geqslant n_0$.
$\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$	désigne la somme partielle d'indice n de la série de terme général u_n, où $n \geqslant n_0$.
$\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$	désigne la somme de la série de terme général u_n, où $n \geqslant n_0$, uniquement si la série converge.

C2. 4. *Restriction au cas où $n_0 = 0$ dans la suite.* — Dans ce qui suit, les définitions et résultats seront énoncés et démontrés pour des séries associées à des suites définies à partir du rang 0. Il s'étendent naturellement à des séries associées à des suites seulement définies à partir d'un rang $n_0 \in \mathbf{N}^*$.

C2. 5. PROPOSITION (CONDITION NÉCESSAIRE, NON SUFFISANTE, POUR QU'UNE SÉRIE CONVERGE). — *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{K}$.

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

C2. 6. *Exercice (Nature de la série harmonique).* — Démontrer que la série harmonique, de terme général $\dfrac{1}{n}$, diverge.

C2. 7. *La réciproque de l'implication de la Proposition* **C2.5** *est fausse.* — La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, bien que $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

C2. 8. Théorème (Série géométrique). — *Soit $r \in \mathbf{K}$.*

1. *$\sum r^n$ converge $\iff$ $|r| < 1$.*
2. *Si $|r| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.*

C2. 9. Proposition (Séries télescopiques). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.*

1. *$\sum v_n$ converge $\iff$ $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.*
2. *Dans le cas où il y a convergence, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$.*

C2. 10. *D'une suite à une série.* — La Proposition **C2.9** permet de ramener l'étude de l'asymptotique d'une suite à celle d'une série.

C2. 11. Théorème (Opérations sur les séries convergentes). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{K}$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$.*

1. *$\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent $\implies$ $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge.*
2. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*

C2. 12. *Exercice (Somme d'une série convergente et d'une série divergente).* — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{K}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge et que la série $\sum v_n$ diverge. Que dire de la nature de la série $\sum u_n + v_n$?

C2. 13. Définition (Reste d'une série convergente). — *Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est défini par :*

$$R_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \,.$$

Le reste d'ordre n de la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ coïncide donc avec la somme de la série convergente $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$, i.e. :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

C2. 14. *Exercice (Reste d'une série géométrique convergente).* — Soit r un nombre complexe tel que $|r| < 1$. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le reste d'ordre n de la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} r^k$.

C2. 15. Proposition (La suite des restes d'une série convergente tendent vers 0). — *Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge. Alors*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2 Comparaison série-intégrale

C2. 16. Théorème (Comparaison série-intégrale). — *Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.*

(C1) La série de terme général

$$u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt \; - \; f(n)$$

est convergente.

(C2) La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite de terme général $\int_0^n f(t)dt$ converge.

C2. 17. Théorème (Séries de Riemann). — *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

C2. 18. *Exercice (Équivalent du reste d'une série de Riemann convergente).* — Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 1$. Former un équivalent du reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$.

C2. 19. *Exercice (Séries de Bertrand).* — Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Démontrer

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ \ln^\beta(n)} \text{ converge} \quad \iff \quad \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \ \text{ et } \ \beta > 1. \end{cases}$$

C2. 20. *Exercice.* — Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots \sqrt{n}}$.

C2. 21. *Exercice (Quelques équivalents associés aux séries de Riemann).* — Soit α un réel strictement positif.

1. Supposons $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
2. Supposons $\alpha = 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
3. Supposons $\alpha < 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

C2. 22. *Exercice (Équivalent de ζ en 1^+).* — Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers 1^+, de la fonction ζ définie par :

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right. .$$

3 Convergence absolue

C2. 23. *Notation.* — Dans toute cette partie, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

C2. 24. DÉFINITION (SÉRIE ABSOLUMENT CONVERGENTE). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

C2. 25. THÉORÈME (UNE SÉRIE ABSOLUMENT CONVERGENTE EST CONVERGENTE). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.*

$$\sum u_n \textit{ converge absolument} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \textit{ converge.}$$

C2. 26. *Exercice (Nature de la série harmonique alternée).* — Démontrer que la série harmonique alternée, de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$, converge et déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

C2. 27. *La réciproque de l'implication du Théorème* **C2.25** *est fausse).* — La série harmonique alternée $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais non absolument convergente (une telle série est dite semi-convergente).

4 Séries à termes réels positifs

C2. 28. Théorème (Convergence des séries à termes réels positifs). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $\left(S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des sommes partielles.*

1. *$\sum u_n$ converge $\iff$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée*
2. *Si $\sum u_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} S_n$.*
3. *Si $\sum u_n$ diverge, alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

C2. 29. Corollaire (Théorème de domination pour les séries à termes réels positifs). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels positifs telles que :*

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n \leqslant v_n \qquad \text{[hypothèse de domination].}$$

1. *$\sum v_n$ converge $\implies$ $\sum u_n$ converge*
2. *$\sum u_n$ diverge $\implies$ $\sum v_n$ diverge*

C2. 30. *Affaiblissement de l'hypothèse de domination dans le Corollaire* **C2.29**. — Le théorème de domination reste vrai si l'hypothèse de domination n'est satisfaite qu'à partir d'un certain rang.

C2. 31. *Exercice (Sommes des deux séries en cas de convergence dans le théorème de domination).* — On se place dans le contexte du théorème de domination et on suppose que $\sum v_n$ converge. Alors $\sum u_n$ converge également. Que dire des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$?

C2. 32. *Exercice.* — Déterminer la nature des séries suivantes.

(A) $\sum \frac{1}{n^2+n+1}$ (B) $\sum \frac{\sin(n)}{2^n}$ (C) $\sum \frac{1}{n^2-n}$ (D) $\sum \frac{1}{n^2\ln(n)}$

(E) $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$ (F) $\sum \frac{n}{3^n}$ (G) $\sum \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{n^2}\right)$

C2. 33. Théorème (Règle de d'Alembert. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+$ tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

1. *Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $\ell = 1^+$, alors $\sum u_n$ diverge.*

C2. 34. *Exercice (Règle de Raabe-Duhamel).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

avec un développement asymptotique de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

C2. 35. *Exercice (Comparaison logarithmique).* — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

à partir d'un certain rang.

1. Démontrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Quel résultat antérieur peut-on retrouver grâce à la question 1 ?

C2. 36. *Exercice.* — Soient $x \in \mathbf{R}$ et a, b des réels strictement positifs. Déterminer la nature des séries suivantes.

(A) $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n^2}$ (B) $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ (C) $\displaystyle\sum n!\, x^{n^2}$

(D) $\displaystyle\sum \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)}$ (E) $\displaystyle\sum \frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$

5 Sommation des relations de comparaison

C2. 37. Théorème (Sommation des o et des O). — *Soient*

- $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de nombres complexes ;*
- $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels, dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang, appelée suite de référence.*

Alors, nous avons les résultats suivants.

1. *Supposons que la série* $\sum \alpha_n$ *converge.*

   (a) *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$, *alors* $\sum u_n$ *converge absolument et :*

   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k\right).$$

   (b) *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$, *alors* $\sum u_n$ *converge absolument et :*

   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k\right).$$

2. *Supposons que la série* $\sum \alpha_n$ *diverge.*

   (a) *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$, *alors :*

   $$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right).$$

   (b) *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$, *alors :*

   $$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right).$$

C2. 38. *Exercice (Le théorème de Cesàro pour les suites de réels positifs).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un réel ℓ. Le théorème de Cesàro nous livre le résultat de convergence en moyenne suivant :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Déduire du théorème **C2.37** le théorème de Cesàro.

C2. 39. Théorème (Sommation des équivalents). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels. On suppose que :*

(H1) $v_n > 0$ *à partir d'un certain rang ;*

(H2) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Alors :

(C0) $u_n > 0$ *à partir d'un certain rang ;*

(C1) les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature ;*

(C2) si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\ ;$$

(C3) si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent, alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Démonstration. $\boxed{\text{C0}}$ Par hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant N_1, \quad v_n > 0\ . \tag{1}$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N_1}$, qui est bien définie, converge vers 1. En appliquant la définition de la convergence vers 1, avec ε spécialisé à $\dfrac{1}{2} > 0$, nous obtenons :

$$\exists\, N_2 \geqslant N_1, \quad \forall\, n \geqslant N_2, \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}\ . \tag{2}$$

De (1) et (2), on déduit que :

$$\forall\, n \geqslant N_2, \quad u_n > 0\ .$$

$\boxed{\text{C1}}$ De (1) et (2), nous déduisons également :

$$\forall\, n \geqslant N_2, \quad \frac{1}{2}\, v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}\, v_n\ . \tag{3}$$

- Supposons que la série $\sum u_n$ converge.

  Comme les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(\frac{1}{2}\,v_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ sont positives à partir d'un certain rang, le Théorème de domination pour les séries à termes positifs et (3) nous livrent la convergence de la série $\sum \frac{1}{2}\,v_n$. D'après les résultats sur les opérations sur les séries convergentes, la série $\sum v_n$ converge.
- Supposons que la série $\sum v_n$ converge.

  D'après les résultats sur les opérations sur les séries convergentes, la série $\sum \frac{3}{2}\,v_n$ converge. Comme les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(\frac{3}{2}\,v_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ sont positives à partir d'un certain rang, le Théorème de domination pour les séries à termes positifs et (3) nous livrent la convergence de la série $\sum u_n$.

Nous avons démontré que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge. Les deux séries ont donc même nature.

$\boxed{\text{C2}}$ Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$:

$$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(v_n\right) \ .$$

D'après le Théorème sur la sommation des o :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) .$$

Ainsi :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \ .$$

$\boxed{\text{C3}}$ Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$:

$$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(v_n\right) \ .$$

D'après le Théorème sur la sommation des o :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) .$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k \ .$$

Q.E.D.

C2. 40. *Attention aux hypothèses sur le signe.* — Lorsque qu'aucune des deux suites n'est de signe constant à partir d'un certain rang, le théorème de sommation des équivalents n'est pas nécessairement vrai. Par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La série $\sum v_n$ converge (cf. critère des séries alternées), la série $\sum u_n$ diverge, mais pourtant $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

C2. 41. *Exercice.* — Que dire de la série $\sum \frac{n+2^n}{\sqrt{n}+3^n}$?

C2. 42. *Exercice.* — Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

C2. 43. *Exercice.* — Soit q un réel strictement positif.

1. Supposons $q = 1$. Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Supposons $q > 1$. Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ quand n tend vers $+\infty$.

C2. 44. *Exercice.* — Déterminer la nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants.

(A) $u_n = \frac{3n^2+5n}{8n^3+4}$ (B) $u_n = \frac{n+\cos(n)}{n^3+1}$ (C) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

(D) $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^2+n}$ $[\theta \in \mathbf{R}]$ (E) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

6 Séries alternées

C2. 45. Théorème (Critère des séries alternées). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que :*

(H1) $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n u_{n+1} \leqslant 0$ *;*

(H2) la suite $(\,|\,u_n\,|\,)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante ;*

(H3) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors :

(C1) la série $\sum u_n$ *converge ;*

(C2) si $u_{n+1} < 0$ *alors :*

$$S_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S_n \qquad \textit{et} \qquad u_{n+1} \leqslant R_n \leqslant 0\ ;$$

(C3) si $u_{n+1} > 0$ *alors :*

$$S_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S_{n+1} \qquad \textit{et} \qquad 0 \leqslant R_n \leqslant u_{n+1}\ .$$

où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ *et* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

C2. 46. *Formulation synthétique des propriétés sur le reste d'une série alternée.* — Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant les hypothèses (H1), (H2), (H3) du Théorème **C2.45**, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$:

1. $R_n := \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a le signe de u_{n+1} ;
2. $|R_n| := \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.

On dit parfois que le reste d'ordre n (R_n), a le signe de son premier terme (u_{n+1}) et que sa valeur absolue est majorée par la valeur absolue de son premier terme.

C2. 47. *Exercice.* — Déterminer la nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants.

(A) $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ (B) $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (C) $\quad u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$

C2. 48. *D'une hypothèse du théorème* **C2.45**. — L'hypothèse (H2) dans le critère des séries alternées est essentielle. En effet, la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

vérifie (H1) et (H3), mais pas (H2) et la série $\sum u_n$ diverge.

7 Dix développements limités usuels au voisinage de $x = 0$

Développements limités	Indications pour retrouver les développements limités
$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$	Si $x \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$	Substitution $x \leftarrow -x$ dans le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o\left(x^n\right)$	Primitivation du DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
$\arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$	Substitution $x \leftarrow x^2$ dans le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, puis primitivation.
$\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$	Formule de Taylor-Young et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.
$\operatorname{ch}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Partie paire de $\exp$
$\operatorname{sh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$	Partie impaire de $\exp$
$\cos(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = \operatorname{ch}(ix)$
$\sin(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$	Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(ix)}{i}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$	Formule de Taylor-Young et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la dérivée k-ième de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $x \mapsto \left(\displaystyle\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)\right)(1+x)^{\alpha-k}$

8 Une sélection d'exercices

C2. 49. *Exercice.* — Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants.

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$	$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$	$(n+1)^{1/n}-n^{1/n}$
$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$	$\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$	$\dfrac{n!}{n^n}$
$\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$	$\dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$	$\dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$
$\dfrac{(2n)!}{n^n}$	$\mathrm{ch}(n^\alpha)-\mathrm{sh}(n^\alpha) \qquad [\alpha\in\mathbf{R}]$	$\dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+2)!}$

C2. 50. *Exercice (CCINP).* — Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-1}$.

C2. 51. *Exercice.* — Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

C2. 52. *Exercice.* — Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$.

C2. 53. *Exercice (CCINP).* — Soit $\alpha\in\mathbf{R}$. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

C2. 54. *Exercice (CCINP).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs, soit $\ell\in]0,1[$.

1. Supposons que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{n}{(3n+1)!}$?

C2. 55. *Exercice (CCINP).* —

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(n-1)\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}-1}$.

C2. 56. *Exercice (CCINP).* —

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante à termes strictement positifs et convergeant vers 0.
2. Démontrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
3. Déterminer un majorant du reste de cette série.

C2. 57. *Exercice (CCINP).* — Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{a^n}{1+b^n}$ en fonction des valeurs de a et de b.

C2. 58. *Exercice (TPE).* — Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\sqrt{n}$.

C2. 59. *Exercice (CCINP).* — Déterminer la nature de la série $\sum \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$.

C2. 60. *Exercice (CCINP).* — Déterminer la nature de la série $\sum(1-\operatorname{th}(n))$.

C2. 61. *Exercice (CCINP).* — Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

C2. 62. *Exercice (CCINP).* — Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\pi n^3 + \dfrac{1}{n^2} + 1\right)$.

C2. 63. *Exercice (CCINP).* — Soient $a, b \in \mathbf{R}$.

1. Déterminer la nature de la suite de terme général $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ suivant les valeurs de a et b.
2. Étudier la convergence de u_n selon les valeurs de a et b.

C2. 64. *Exercice (CCINP).* — Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

C2. 65. *Exercice (CCINP).* — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la nature, selon la valeur de α, de la série $\sum \dfrac{n^\alpha (\ln(n))^n}{n!}$.

C2. 66. *Exercice (Navale).* — Soit $\alpha > 0$. Déterminer, selon la valeur de α, la nature de la série $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

C2. 67. *Exercice (TPE).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$.

1. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Déterminer sa somme. ***Indication : on cherchera*** a, b ***tels que*** $\dfrac{1}{n^2+3n+3} = \dfrac{a-b}{1+ab}$ ***et*** $a = b+1$.

C2. 68. *Exercice (TPE).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$u_{3n+1} = \frac{1}{4n+1} \qquad , \qquad u_{3n+2} = \frac{1}{4n+3} \qquad , \qquad u_{3n+3} = \frac{-1}{2n+2}.$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

C2. 69. *Exercice (CCINP).* — Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

Donner la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

C2. 70. *Exercice.* — Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels strictement positifs telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Démontrer que les séries suivantes convergent

$$\sum \max(u_n, v_n) \qquad \sum \sqrt{u_n v_n} \qquad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

C2. 71. *Exercice (TPE).* — Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{n(2n-1)2^n}$ converge et déterminer sa somme.

C2. 72. *Exercice.* — Démontrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$ converge et déterminer sa somme.

C2. 73. *Exercice (ENSAM).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

1. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Déterminer une majoration de son reste.
3. Déterminer un rang à partir duquel la différence entre la somme et la somme partielle est majorée par 10^{-3}.
4. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et vérifier le résultat précédent.

C2. 74. *Exercice (CCINP).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Démontrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.
2. Étudier la convergence de la suite de terme général $(n+1)!R_n$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \sin(2\pi e n!)$.

C2. 75. *Exercice.* — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs tels que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}$. Démontrer que si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge, et que si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

C2. 76. *Exercice (CCINP).* — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Démontrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

C2. 77. *Exercice (ENSAM).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien définie.
2. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et déterminer sa somme.

C2. 78. *Exercice.* — Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$ converge et calculer sa somme. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\ln(2)$.

C2. 79. *Exercice (TPE).* — Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, posons $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k\pi/3)}{k}$.

1. Trouver a,b,c tels que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:
$$T_n=a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}+b\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+1}+c\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+2}.$$
2. Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

C2. 80. *Exercice.* — Déterminer la nature de la série de terme général
$$\frac{(-1)^n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+(-1)^n}$$

C2. 81. *Exercice.* — Donner un équivalent simple de
$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\sqrt{k}}$$
et montrer qu'il existe une constante C telle que $u_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+C+o(1)$.

C2. 82. *Exercice.* — Démontrer que la suite $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ converge et donner un développement asymptotique de u_n de précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

C2. 83. *Exercice.* — Donner un développement asymptotique à deux termes de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

C2. 84. *Exercice.* —

1. Donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

2. Démontrer que la suite de terme général $v_n = u_n - \dfrac{\ln^2(n)}{2}$ converge vers un réel ℓ et donner un équivalent de $v_n - \ell$.

C2. 85. *Exercice.* — Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2$.

C2. 86. *Exercice (ENSEA).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $c(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. Étudier la convergence et, le cas échéant, la somme de la série $\displaystyle\sum \frac{c(n)}{n(n+1)}$.

C2. 87. *Exercice (INT).* — Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{\cos(u_n)}{n+1}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

C2. 88. *Exercice (INT).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.

C2. 89. *Exercice (Mines).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes positifs. Supposons qu'il existe un réel a tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^a}$.

C2. 90. *Exercice (Centrale).* — Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

C2. 91. *Exercice (Mines).* — Pour tout $n \geqslant 1$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} E(\log k)$, où $\log$ est le logarithme décimal, et $T_n = S_{10^n - 1}$.

1. Déterminer des équivalents de S_n et T_n.
2. Calculer directement T_n et retrouver le résultat précédent.

C2. 92. *Exercice (Centrale).* — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. Supposons que la série $\sum a_n$ converge. Démontrer que la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.
2. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ diverge et la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

C2. 93. *Exercice (Mines).* — Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}}$.

C2. 94. *Exercice (Mines-Centrale).* —

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$. Déterminer un équivalent de u_n.
2. Démontrer qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + o(1)$.
3. Démontrer que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

C2. 95. *Exercice (Mines).* —

1. Soit $\alpha > 1$. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$.
2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 2$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} P(k)$.

C2. 96. *Exercice (Mines).* — Soit $\alpha \in \mathbf{R}^+$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(\ln(n))^\alpha}{n} e^{i\ln(n)}$.

C2. 97. *Exercice (Centrale).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergeant vers 0, soient a, b, c tels que $a + b + c \neq 0$. Démontrer que les séries

$$\sum u_n \qquad \text{et} \qquad \sum a u_n + b u_{n+1} + c u_{n+2}$$

ont même nature.

C2. 98. *Exercice (Mines).* — Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n \dfrac{E(n^{1/4})}{n^\alpha}$.

C2. 99. *Exercice (Centrale).* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $u_n = \sqrt{\ln(n^2+1)} - \sqrt{\ln\left(n^2 + \dfrac{1}{1}\right)}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

C2. 100. *Exercice (Mines).* — Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.

C2. 101. *Exercice (Centrale).* —

1. Rappeler le théorème de comparaison des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. En déduire le théorème de Césàro.
2. Démontrer que la suite de terme général $(-1)^n$ converge au sens de Césàro.
3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Démontrer que la suite de terme général $\cos(nx)$ converge au sens de Césàro.
4. Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes positifs convergeant vers 0 au sens de Césàro, mais ne convergeant pas vers 0 au sens usuel.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs convergeant vers 0 au sens de Césàro. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, notons

$$E_N = \left\{ k \in [\![1, N]\!] \; : \; u_k \leqslant \sqrt{\frac{u_1 + \ldots + u_N}{N}} \right\}.$$

Posons également $E = \displaystyle\bigcup_{N\in\mathbf{N}^*} E_N$. Démontrer que $\dfrac{1}{N}\,\mathrm{Card}\,(E \cap [\![1, N]\!]) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$.

C2. 102. *Exercice (Mines).* — Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k^k\right)^{-4/n^2}$.

C2. 103. *Exercice (Mines).* — Soient $a, b > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^b}$. Déterminer la nature de $\sum a^{s_n}$.

C2. 104. *Exercice (Centrale).* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs. Pour tout $n \geqslant 1$, posons

$$v_n = \frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

1. Soit $\alpha > 0$, posons $u_n = n^\alpha$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Étudier la convergence et l'éventuelle limite de $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
2. Supposons que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$. Démontrer que
$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{an^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} S_k.$$
3. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a > 0$. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la limite de $\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p u_k$.

C2. 105. *Exercice (X).* — Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Démontrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

C2. 106. *Exercice (X).* — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Supposons que $\sum u_n$ diverge. Soit $\alpha > 0$. Démontrer que :
$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.$$
2. Supposons que $\sum u_n$ converge. Notons R_n le reste d'ordre n. Soit $\alpha > 0$. Démontrer que :
$$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1.$$

C2. 107. *Exercice (X).* — Soit (α_n) une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers l'infini. Démontrer qu'il existe une suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum \alpha_n u_n$ diverge.

C2. 108. *Exercice (X).* — Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n}$. *Indication : on pourra montrer pour cela que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que* $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k} \geqslant \frac{1}{2}$.

C2. 109. *Exercice (X).* — Donner un équivalent de la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k}$.

C2. 110. *Exercice (X).* — Soit (u_n) une suite de complexes telle que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Supposons que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$.

C2. 111. *Exercice (X).* — On cherche à déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en fonction de α.

1. Que dire si $\alpha > 1$?
2. Démontrer que la série converge si $\frac{1}{2} < \alpha$. On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.
3. Démontrer que la série diverge si $\alpha = \frac{1}{2}$. On pourra commencer par donner un développement asymptotique de $\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})$.
4. Démontrer que la série diverge si $\alpha < \frac{1}{2}$. On pourra se ramener au cas précédent à l'aide d'une transformation d'Abel.

C2. 112. *Exercice (ENS).* — Notons $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite des nombres premiers $(p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, p_4 = 7,\ \text{etc})$.
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$.

C2. 113. *Exercice (X-ENS).* — Soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(b_1 \dots b_n)^{1/n} \leqslant \dfrac{b_1 + \dots + b_n}{n}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(b_1 \dots b_n)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes positifs telle que la série $\sum a_n$ converge. Démontrer que la série de terme général $(a_1 \dots a_n)^{1/n}$ converge, et que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \dots a_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

C2. 114. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n := H_n - \ln(n)$.

1. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n} - \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$ est convergente.
2. Expliciter $u_{n+1} - u_n$, puis démontrer
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$
où $\gamma := 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.
3. En écrivant $H_n - \ln(n) - \gamma$ comme le reste d'une série convergente, démontrer
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
4. En écrivant $\dfrac{1}{2n}$ comme le reste d'une série convergente, démontrer :
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$