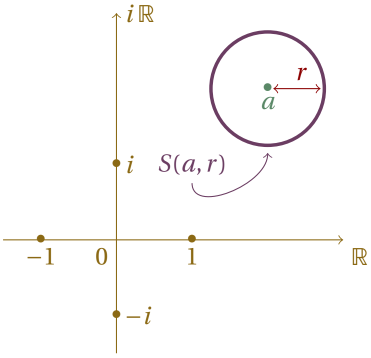
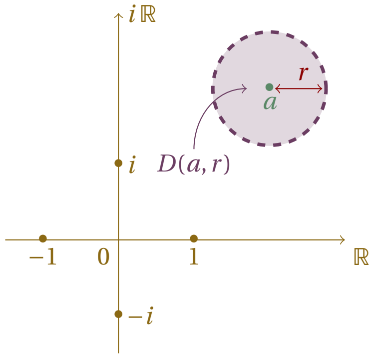
14. Séries entières

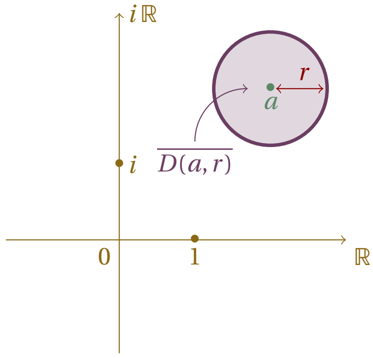
§ 1 Notion de série entière

C14.1. Notation (Disque ouvert et disque fermé dans $\mathbb{C}$) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$. On note $S(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r, $D(a,r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon r et $\overline{D(a,r)}$ le disque fermé de centre a et de rayon r, de sorte que $\overline{D(a,r)} = D(a,r) \sqcup S(a,r)$.

$$S(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-a| = r\} \qquad D(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-a| < r\} \qquad \overline{D(a,r)} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-a| \leqslant r\}$$







C14.2. Définition (Série entière) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est appelée série entière de coefficients a_n, $n \in \mathbb{N}$.

C14.3. Problématique Étant donnée une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, on s'intéresse aux questions suivantes.

(a) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge ? L'ensemble :

$$\mathscr{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

est appelé ensemble de définition de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ (il peut être réduit au singleton $\{0\}$).

(b) Quel est la nature de la convergence de la séries de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n \end{array} \right.$$

sur $\mathscr{D}$, ou sur des parties de $\mathscr{D}$: simple, uniforme, normale ?

(c) Si tous les a_n sont réels, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} \cap \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

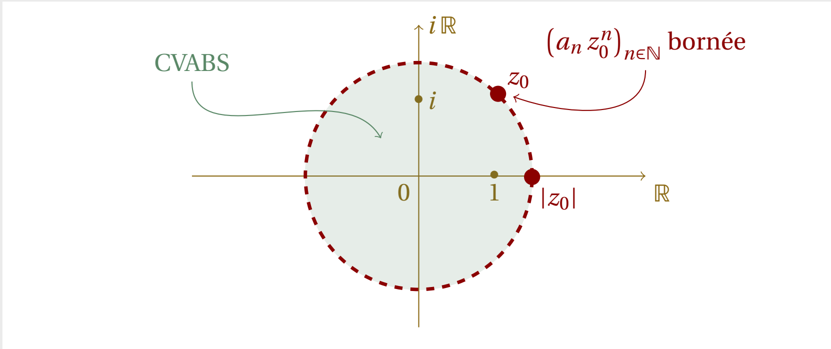
est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$? Si oui, a-t-on pour tout $k \in \mathbb{N}$ et certains réels x

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \qquad ?$$

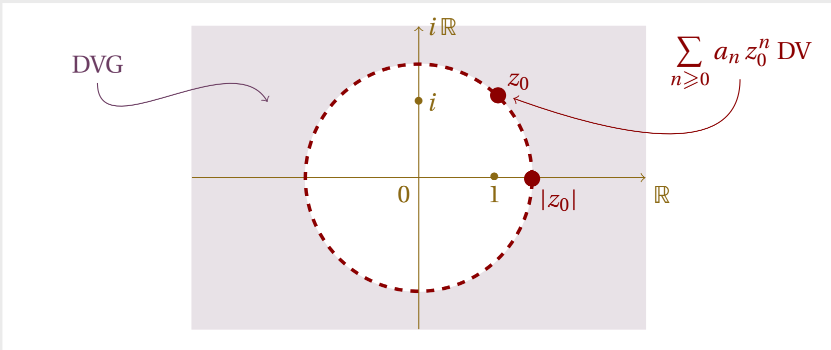
§ 2 Rayon de convergence d'une série entière

C14.4. Lemme d'Abel Soit (a_n) une suite de nombres complexes et soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

(a) Supposons que la suite $\left(a_n\, z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors, pour tout $z \in D(0,|z_0|)$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge absolument.



(b) Supposons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z_0^n$ diverge. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |z_0|$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ diverge grossièrement.



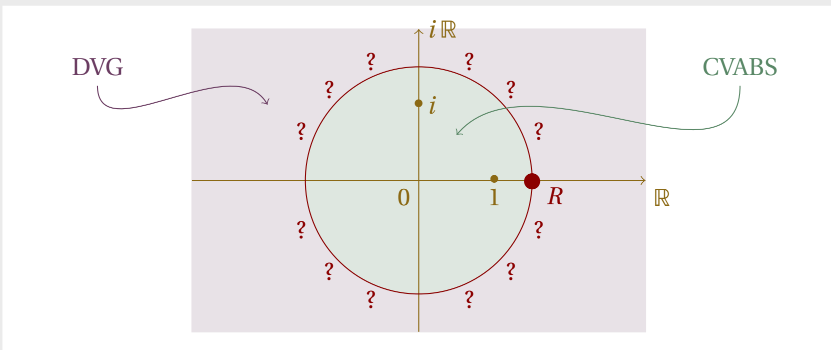
C14.5. Définition (Rayon de convergence d'une série entière) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $I := \left\{r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} : \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\right\}$ qui est un intervalle non vide (puisqu'il contient 0) de $\mathbb{R}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, noté $R\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)$ est défini par

$$R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) := \begin{cases} \sup(I) & \text{si } I \text{ est majoré} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

C14.6. Proposition (Caractérisation du rayon de convergence) Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ une série entière.

(a) Son rayon de convergence est $+\infty$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge absolument.

(b) Si son rayon de convergence n'est pas $+\infty$, alors son rayon de convergence est l'unique $R \in \mathbb{R}_+$ tel que
- pour tout $z \in D(0,R)$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ converge absolument
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ diverge grossièrement.



C14.7. EXERCICE (PREMIERS CALCULS DE RAYONS DE CONVERGENCE)

(a) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$.

(b) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$.

(c) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n!\, z^n$.

Indication

(a) Séries géométriques
(b,c) Critère de d'Alembert

C14.8. ATTENTION AU COMPORTEMENT D'UNE SÉRIE ENTIÈRE AU BORD DE SON DISQUE OUVERT DE CONVERGENCE

Considérons une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_{>0}$. *A priori* on ne peut rien dire quant à la convergence de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ lorsque $|z| = R$. Considérons deux exemples, pour observer que différents comportement peuvent apparaître.

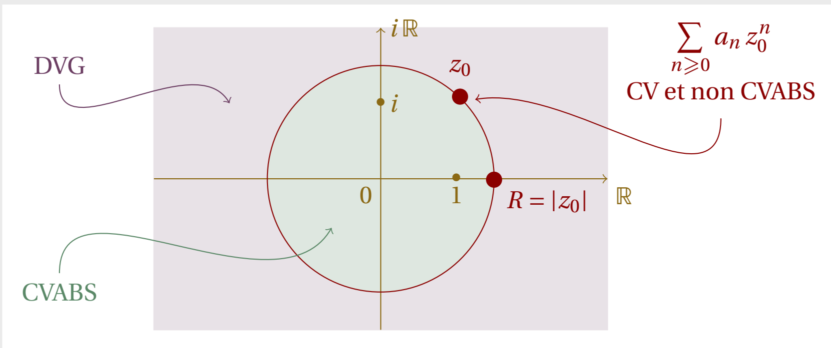
(a) La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1. Elle converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$.

(b) La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n^2}$ a également pour rayon de convergence 1. Elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$.

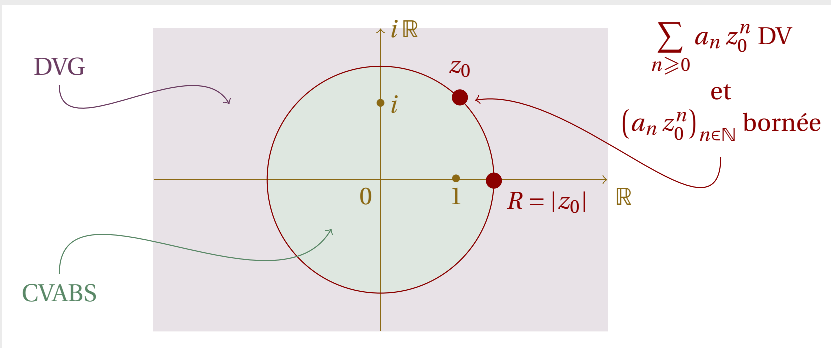
§ 3 CALCUL PRATIQUE DU RAYON DE CONVERGENCE

C14.9. PROPOSITION (DÉTERMINATION DU RAYON DE CONVERGENCE À PARTIR D'UN POINT ATYPIQUE) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

(a) Si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z_0^n$ est convergente, mais non absolument convergente, alors $R = |z_0|$.



(b) Si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z_0^n$ est divergente et la suite $\left(a_n\, z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $R = |z_0|$.



C14.10. EXERCICE Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \cos(n)\, z^n$.

Indication

Chercher un point atypique. On pourra justifier que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en raisonnant par l'absurde grâce aux identités $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$, $\cos(n-1) = \cos(n)\cos(1) + \sin(n)\sin(1)$ et $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C14.11. Exercice Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}$.

Indication: Chercher un point atypique.

C14.12. Exercice Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, dont les coefficients d'indices pairs a_{2n} sont non nuls à partir d'un certain rang. Supposons que $\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$.

Indication: Critère de d'Alembert.

C14.13. Exercice Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{2n}$.

Indication: Série géométrique.

Le critère de d'Alembert n'est pas le seul résultat qui permette de calculer un rayon de convergence. Le critère de d'Alembert est, certes utile en pratique, mais ce n'est pas le seul moyen de calculer le rayon de convergence d'une série entière. Nous disposons également du critère via un point atypique C14.9 et des deux résultats suivants.

C14.14. Proposition (Séries entières et relation de comparaison O sur les coefficients) Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors

$$|a_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(|b_n|) \qquad \Longrightarrow \qquad R_a \geqslant R_b\,.$$

C14.15. Proposition (Séries entières dont les modules des coefficients sont équivalents) Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors

$$|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n| \qquad \Longrightarrow \qquad R_a = R_b\,.$$

C14.16. Exercice Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n(n+1)}$.

Indication: Critère de d'Alembert.

C14.17. Exercice Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$.

Indication: Critère de d'Alembert.

C14.18. Exercice Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+2}\, z^n$.

Indication: Critère de d'Alembert.

C14.19. Exercice Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} P(n)\, z^n$.

Indication | Si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ alors... Si $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$, alors $|P(n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\mathrm{Dom}\,(P)\; n^{\deg(P)}\right|$...

C14.20. EXERCICE Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{n!}$.

Indication | Chercher un point atypique.

C14.21. EXERCICE Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \text{ premier}} \frac{z^n}{3^n}$.

Indication | Chercher un point atypique.

C14.22. EXERCICE Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$.

Indication | On pourra commencer par justifier que $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$... puis appliquer le critère de d'Alembert.

C14.23. EXERCICE Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} e^{i a_n} z^n$.

Indication | C14.15

C14.24. EXERCICE Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$.

Indication | Quel est le comportement de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ lorsque $|z^2| < R$? Et quand $|z^2| > R$?

C14.25. EXERCICE Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Indication | Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Commencer par justifier que $\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\left|a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n\right|\right)$.

§ 4 Somme et produit de séries entières

C14.26. PROPOSITION (SOMME DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$.

(a) $R \geqslant \min(R_a, R_b)$

(b) Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

C14.27. EXERCICE Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$ aient même rayon de convergence R. Démontrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R.

Indication | C14.26 pour obtenir une inégalité entre R et $R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)$. Pour obtenir l'autre inégalité, observer que si $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ est tel que la suite est bornée $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors la suite $\left(a_{2n} r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

C14.28. Définition (Produit de Cauchy de deux séries entières) Le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

C14.29. Proposition (Rayon de convergence du produit de Cauchy) Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

(a) Le rayon de convergence R de leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

(b) Pour tout $z \in D(0, \min(R_a, R_b))$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Démonstration

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Comme $z \in D(0, R_a)$ et $z \in D(0, R_b)$, les deux séries numériques

$$\sum_{n\geqslant 0} \underbrace{a_n z^n}_{=:a'_n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \underbrace{b_n z^n}_{=:b'_n}$$

sont absolument convergentes. D'après le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (cf. C11.109) nous savons que

(i) la série de terme général

$$c'_n := \sum_{k=0}^{n} a'_k\, b'_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\, b_{n-k} z^{n-k} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{c_n} z^n$$

est absolument convergente et donc $|z| \leqslant R$

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} c'_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a'_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b'_n\right)$ i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

L'assertion (ii) livre (b). De (i), nous déduisons $[0, \min(R_a, R_b)[\subset [0, R]$ puis $\min(R_a, R_b) \leqslant R$.

C14.30. Exercice Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} A_n z^n$ est non nul.

Indication

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} A_n z^n$ est le produit de Cauchy de deux séries entières…

C14.31. Exercice Considérons l'ensemble $\mathscr{A} := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) > 0 \right\}$.

(a) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$. Démontrer que $\lambda.a := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$.

(b) Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$. Justifier que $a + b := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$.

(c) Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$. Justifier que $a \star b := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$.

(d) Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$. Justifier que $a \star b := b \star a$.

(e) Soit $1_{\mathscr{A}} := \left(\delta_{0,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Justifier que $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$ puis que, pour tout $a \in \mathscr{A}$, $a \star 1_{\mathscr{A}} = a$.

D'après (a),(b),(c), les applications

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ (\lambda, a) & \longmapsto & \lambda.a \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{A}\times\mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ (a, b) & \longmapsto & a+b \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{A}\times\mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ (a, b) & \longmapsto & a\star b \end{array}\right.$$

sont bien définies. D'après (d) et (e), la loi interne $\star$ sur $\mathscr{A}$ est commutative et $1_{\mathscr{A}}$ est son élément neutre. On admet que $(\mathscr{A}, ., +, \star)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.

(f) Démontrer que la $\mathbb{C}$-algèbre $(\mathscr{A}, ., +, \star)$ est intègre.

Un élément $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ est dit inversible s'il existe $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ tel que $a \star b = 1_{\mathscr{A}}$. Dans ce cas, l'élément b est unique et est appelé inverse de a. Dans la suite, on se propose de déterminer les éléments inversible de $\mathscr{A}$.

(g) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ un élément inversible. Démontrer que $a_0 \neq 0$.

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ tel que $a_0 \neq 0$.

(h) Justifier qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant A^n$.

(i) Justifier qu'il existe une constante $B > A$ telle que, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{B^k} \leqslant |a_0|$.

(j) Supposons qu'il existe $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $a \star b = 1_{\mathscr{A}}$. Déterminer b_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_{n+1} en fonction de $b_0, \ldots, b_n$.

(k) Soit $b = (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par la valeur de b_0 et la relation de récurrence obtenues à la question précédente. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leqslant \dfrac{B^n}{|a_0|}$ et en déduire que $b \in \mathscr{A}$.

(l) Conclure quant aux éléments inversibles de $\mathscr{A}$.

Indication

(a) Soit $R := R\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) > 0$. Que dire de la suite $\left(\lambda a_n \left(\dfrac{R}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Justifier $R\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n\right) > 0$ avec C14.26.

(c) Justifier $R\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n\right) > 0$. avec C14.29.

(d) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

(e) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{0,n-k}$.

(f) Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments non nuls de $\mathscr{A}$. Justifier l'existence de $p := \min(\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\})$ et $q := \min(\{n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0\})$. Analyser alors le coefficient d'indice $p + q$ de la suite $a \star b$.

(g) Notons $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ l'inverse de a. Analyser le terme d'indice 0 de $a \star b$.

(h) Soit $R := R\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) > 0$. Que dire de la suite $\left(a_n \left(\dfrac{R}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

(i) Fixer $B > A$ et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{B^k}$. Comment évolue cette somme lorsque B tend vers $+\infty$?

(j) D'après (d), $b \star a = 1_{\mathscr{A}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le coefficient d'indice n de $b \star a$ et observer qu'il vaut 1 si $n = 0$ et 0 sinon.

(k) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(k)$ le prédicat « $|b_k| \leqslant \dfrac{B^k}{|a_0|}$ ». Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vrai en raisonnant par récurrence forte. Calculer ensuite le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{B^n}{a_0} z^n$.

(l) Utiliser certaines des questions précédentes pour formuler une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ soit inversible.

§ 5 Suites et séries de fonctions de la variable complexe à valeurs dans $\mathbb{C}$

Dans le chapitre 9 « Suites et séries de fonctions », nous avons étudié des suites et des séries de fonctions de la **variable réelle** à valeurs dans $\mathbb{C}$. Ici, nous voulons étendre certains des résultats obtenus aux suites et des séries de fonctions de la **variable complexe** à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans la suite de cette partie, on fixe une partie A non vide de $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{F}(A, \mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des applications de A dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{B}(A, \mathbb{C})$ la sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathscr{F}(A, \mathbb{C})$ formée des fonctions de $\mathscr{F}(A, \mathbb{C})$ bornées sur A. On rappelle que $\mathscr{B}(A, \mathbb{C})$ est muni de la norme $||\cdot||_{\infty,A}$ définie par

$$||\cdot||_{\infty,A} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(A,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sup_{z\in A} |f(z)| \end{array} \right. .$$

§ 5.1 Modes de convergence des suites de fonctions de la variable complexe à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathscr{F}(A,\mathbb{C})$.

C14.32. Convergence simple d'une suite de fonctions La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si, pour tout $z \in A$, $f_n(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(z)$ dans $\mathbb{C}$, i.e. si

$$\forall z \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_{z,\varepsilon}, \quad \left|f_n(z) - f(z)\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

C14.33. Convergence uniforme d'une suite de fonctions La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_{\varepsilon}, \quad \forall z \in A, \quad \left|f_n(z) - f(z)\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

C14.34. Convergence uniforme d'une suite de fonctions et norme infinie Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur A. Alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU sur } A} f \quad \Longleftrightarrow \quad ||f_n - f||_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

C14.35. Comparaison des deux modes de convergence pour les suites de fonctions

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU sur } A} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS sur } A} f$$

§ 5.2 Modes de convergence des séries de fonctions de la variable complexe à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$.

C14.36. Convergence simple d'une série de fonctions La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A si l'une des conditions équivalentes (a), (b), (c) est vérifiée.

(a) Pour tout $z \in A$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(z)$ converge dans $\mathbb{C}$.

(b) Pour tout $z \in A$, la suite numérique $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.

(c) La suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A.

C14.37. Convergence uniforme d'une série de fonctions La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.

C14.38. Convergence normale d'une série de fonctions bornées Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur A. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur A si la suite numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n||_{\infty,A}$ converge dans $\mathbb{R}$.

C14.39. Comparaison des trois modes de convergence pour les séries de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ CN sur } A \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ CU sur } A \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ CU sur } A \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ CS sur } A$$

§ 6 Continuité d'une fonction de la variable complexe à valeurs complexes

Dans toute cette partie, A désigne une partie non vide de $\mathbb{C}$.

C14.40. Définition (Continuité d'une fonction de la variable complexe, à valeurs complexes) Soit $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{C})$.

(a) Soit $z_0 \in A$. On dit que f est continue en z_0 si

$$f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} f(z_0) \text{ dans } \mathbb{C}$$

i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall z \in A, \quad |z - z_0| \leqslant \alpha \implies |f(z) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon.$$

(b) On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

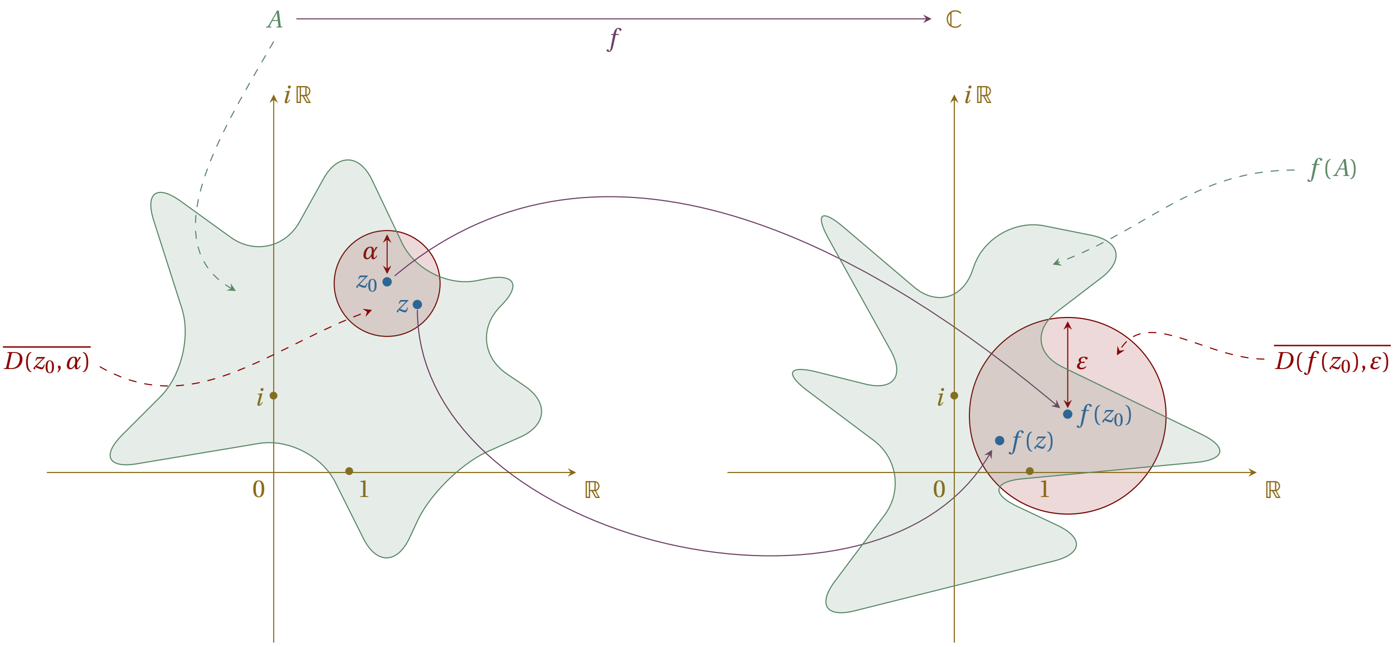
C14.41. Illustration géométrique de la continuité d'une fonction de la variable complexe à valeurs dans $\mathbb{C}$
Nous pouvons reformuler C14.40(a) en termes de disques

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall z \in A \cap \overline{D(z_0, \alpha)}, \quad f(z) \in \overline{D(f(z_0), \varepsilon)}$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad f\left(A \cap \overline{D(z_0, \alpha)}\right) \subset \overline{D(f(z_0), \varepsilon)}$$

ce qu'on illustre ci-dessous.



Quel que soit le choix du rayon $\varepsilon > 0$ du disque $\overline{D(f(z_0), \varepsilon)}$, il existe un rayon $\alpha > 0$ tel que $\overline{D(z_0, \alpha)} \cap A$ est tout entier envoyé dans $\overline{D(f(z_0), \varepsilon)}$ par f.

C14.42. Notation L'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$.

C14.43. Exemple Soit $k \in \mathbb{C}$. L'application constante

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & k \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{C}$. En effet, si $\varepsilon > 0$ alors en posant $\alpha := 1 > 0$ (toute valeur réelle strictement positive conviendrait pour α), il vient

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| \leqslant \alpha \implies \underbrace{|f(z) - f(z_0)|}_{=|k-k|=0} \leqslant \varepsilon\,.$$

C14.44. Exemple La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{C}$. En effet, si $\varepsilon > 0$ alors en attribuant à α la valeur $\varepsilon > 0$, nous obtenons

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| \leqslant \alpha \implies \underbrace{|f(z) - f(z_0)|}_{=|z-z_0|} \leqslant \varepsilon\,.$$

C14.45. Proposition (Opérations sur les fonctions continues)

(a) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, pour tout $(f_1, f_2) \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})^2$, la fonction

$$\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2 \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \lambda_1.f_1(z) + \lambda_2.f_2(z) \end{array} \right.$$

est continue sur A.

(b) Pour tout $(f, g) \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$, la fonction

$$fg \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z)g(z) \end{array} \right.$$

est continue sur A.

(c) Pour tout $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f^n \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z)^n \end{array} \right.$$

est continue sur A.

(d) Pour tout $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$ ne s'annulant pas sur A, la fonction

$$\frac{1}{f} \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{f(z)} \end{array} \right.$$

est continue sur A.

(e) Pour tout $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$, pour tout $g \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$ ne s'annulant pas sur A, la fonction

$$\frac{f}{g} \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{f(z)}{g(z)} \end{array} \right.$$

est continue sur A.

Pour établir les propriétés (a)–(e) énoncées en C14.45, il suffit de reprendre les démonstrations des propriétés correspondantes rédigées en MPSI pour les fonctions de la variable réelle à valeurs réelles, en considérant que le symbole $|\cdot|$ ne désigne plus la valeur absolue mais le module. L'exercice suivant permettra de s'y essayer.

C14.46. Exercice (Produit de deux fonctions continues) Soient $(f, g) \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

(a) Démontrer que la fonction f est bornée au voisinage de z_0, i.e. qu'il existe un rayon $\alpha_1 > 0$ et une constante réelle $M > 0$ tels que, pour tout $z \in A \cap \overline{D(z_0, \alpha_1)}$, $\left|f(z)\right| \leqslant M$.

(b) Soient $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un rayon $\alpha > 0$ tel que, pour tout $z \in A \cap \overline{D(z_0, \alpha)}$, $f(z)g(z) \in \overline{D(f(z_0)g(z_0), \varepsilon)}$.

Indication

(a) Écrire la définition de la continuité de f au point z_0 avec $\varepsilon := 1 > 0$ et remarquer que, pour tout $z \in A$, $\left|f(z)\right| = \left|f(z) - f(z_0) + f(z_0)\right|$.

(b) Commencer par observer que, pour tout $z \in A$

$$\begin{array}{rcl} \left|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)\right| & = & \left|f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)\right| \\ & \leqslant & \left|f(z)\right| \left|g(z) - g(z_0)\right| + \left|g(z_0)\right| \left|f(z) - f(z_0)\right| \end{array}.$$

Appliquer ensuite (a) puis écrire les définitions de la continuité de f et g en z_0 en spécialisant habilement $\varepsilon > 0$ dans celles-ci.

C14.47. Corollaire (Continuité des applications polynomiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. L'application

$$\widetilde{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P(z) \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{C}$.

Démonstration

Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. Si, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on définit la fonction f_k par

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^k \end{array} \right.$$

alors la fonction $\widetilde{P}$ est combinaison linéaire des fonctions $f_0, \ldots, f_p$. D'après C14.44 et C14.45, chacune des fonctions $f_0, \ldots, f_p$ est continue sur $\mathbb{C}$. On en déduit, de nouveau grâce à C14.45, que la fonction $\widetilde{P}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

§ 7 Limite uniforme et continuité

Dans toute cette partie, A désigne une partie non vide de $\mathbb{C}$.

C14.48. Théorème (Convergence uniforme et continuité) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{C})$. Supposons que

(H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A,

(H2) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{C.U. sur } A} f$.

Alors la fonction f est continue sur A.

Démonstration

Soient $z_0 \in A$ et $\varepsilon > 0$. D'après (H2), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \quad \forall\, z \in A, \quad \left|f_n(z) - f(z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

et en particulier

$$(\star) \qquad \forall\, z \in A, \quad \left|f_N(z) - f(z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Comme la fonction f_N est continue en z_0, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(\star\star) \qquad \forall\, z \in A, \quad |z - z_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|f_N(z) - f_N(z_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $z \in A$ tel que $|z - z_0| \leqslant \alpha$. D'après l'inégalité triangulaire

$$\left|f(z) - f(z_0)\right| \leqslant \left|f(z) - f_N(z)\right| + \left|f_N(z) - f_N(z_0)\right| + \left|f_N(z_0) - f(z_0)\right| .$$

En appliquant $(*)$ deux fois et $(**)$ une fois, il vient $\left|f(z) - f(z_0)\right| \leqslant \varepsilon$.

C14.49. Corollaire (Convergence uniforme d'une série de fonctions et continuité) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$. Supposons que

(H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A,

(H2) la série de fonction $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A.

Alors la fonction

$$S \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \end{array} \right.$$

est continue sur A.

Démonstration

Il suffit d'appliquer C14.48 à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(A,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la fonction définie par

$$S_n \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(z)\,. \end{array} \right.$$

§ 8 Modes de convergence et continuité de la somme d'une série entière

C14.50. Théorème (Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\,z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : z \longmapsto a_n\,z^n$.

(a) Si $R = +\infty$ alors, pour tout $r \in \mathbb{R}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$.

(b) Si $R \in \mathbb{R}_{>0}$ alors, pour tout $0 < r < R$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$.

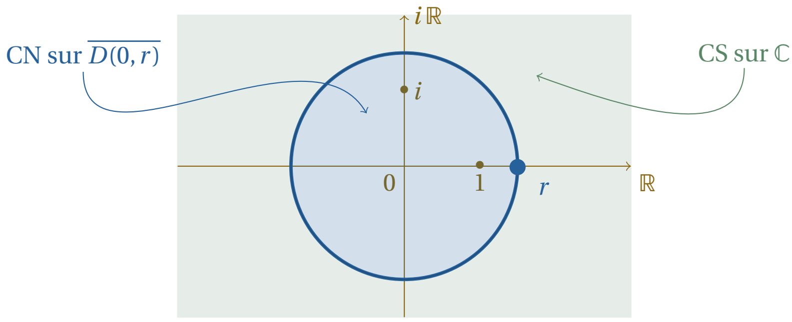
C14.51. Modes de convergence d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\,z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$ alors la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(z \longmapsto a_n\,z^n\right)$

(i) converge simplement sur $\mathbb{C}$;

(ii) converge normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$, où $r \in \mathbb{R}_{>0}$;

(iii) **ne converge pas nécessairement uniformément (et donc pas normalement) sur $\mathbb{C}$.**



Donnons un contre-exemple pour justifier (iii). La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(z \longmapsto \dfrac{z^n}{n!}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{C}$. Alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant 1\,.$$

En particulier

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad 0 \leqslant \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant 1\,.$$

Ainsi la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ est bornée sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Contradiction.

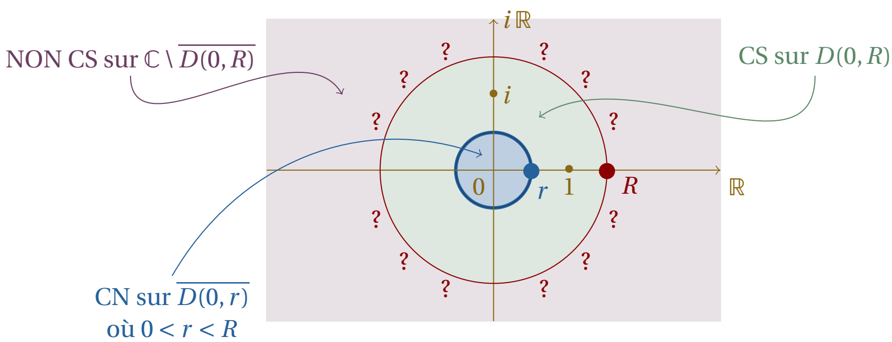
C14.52. Modes de convergence d'une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_{>0}$

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\,z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$ alors la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(z \longmapsto a_n\,z^n\right)$

(i) converge simplement sur $D(0,R)$;

(ii) converge normalement (donc uniformément) sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$, où $0 < r < R$;

(iii) **ne converge pas nécessairement uniformément (et donc pas normalement) sur $D(0,R)$.**



Pour donner un contre-exemple justifiant (iii), considérons la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ de rayon de convergence $R = 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \left(z \longmapsto \frac{z^n}{n}\right)$ converge uniformément sur $D(0,1)$. Alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \quad \forall\, z \in D(0,1), \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{3}.$$

En particulier

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^k}{k} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{3}.$$

d'où

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^k}{k} \leqslant \frac{1}{3}.$$

En faisant tendre x par valeurs inférieures vers 1, il vient

$$(\star) \qquad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Comme, pour tout $k \in [\![N+1, 2N]\!]$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2N}$ nous avons également

$$(\star\star) \qquad \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{3}$. Contradiction.

C14.53. Exercice Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1.

(a) On suppose que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est absolument convergente. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} (z \longmapsto a_n z^n)$ est normalement convergente sur $\overline{D(0,1)}$.

(b) Si la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est convergente, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} (z \longmapsto a_n z^n)$ est-elle nécessairement normalement (resp. uniformément, simplement) convergente sur $\overline{D(0,1)}$?

Indication

(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\| z \longmapsto a_n z^n \|_{\infty, \overline{D(0,1)}} = |a_n|.$$

(b) Considérer la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$.

C14.54. Corollaire (Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Si $R = +\infty$, la fonction

$$S \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{C}$.

(b) Si $R \in \mathbb{R}_{>0}$, la fonction

$$S \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $D(0,R)$.

C14.55. Exemple (Continuité de la fonction exponentielle complexe) Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. D'après C14.54, la fonction

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{C}$.

§ 9 Dérivation et intégration d'une série entière

C14.56. Théorème (Rayons de convergence de la dérivée et d'une primitive) Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, $\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n z^{n-1}$ sa série entière dérivée et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ sa série entière primitive. Ces trois séries entières ont même rayon de convergence, i.e.

$$R\left(\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n z^{n-1}\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right).$$

C14.57. Convention pour la suite du cours. Désormais, on s'intéresse uniquement aux fonction d'une variable **réelle** définies comme somme d'une série entière. On restreindra donc les séries entières à $\mathbb{R}$ et on parlera, par abus de langage, d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ (avec $x \in \mathbb{R}$) plutôt que d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

C14.58. Corollaire (Dérivation d'une série entière) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

La fonction $S :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et

(a) la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}.$$

(b) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\sum_{n\geqslant p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$ a pour rayon de convergence R et

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

C14.59. Corollaire (Primitivation d'une série entière) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Notons $S :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^x S(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

C14.60. COROLLAIRE (COEFFICIENTS D'UNE SÉRIE ENTIÈRE VERSUS NOMBRES DÉRIVÉES SUCCESSIFS) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Notons $S :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour tout $x \in]-R,R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.
Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

d'où un « développement de Taylor » infini suivant

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n \,.$$

§ 10 DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE ENTIÈRE

C14.61. PROBLÉMATIQUE On s'intéresse dans ce paragraphe à un moyen de déterminer si une fonction donnée peut s'exprimer comme la somme d'une série entière.

C14.62. DÉFINITION (FONCTION DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE) Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un voisinage I de 0. Soit $R>0$ tel que $]-R,R[\subset I$.
On dit que f est **développable en série entière (DSE)** sur $]-R,R[$ s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \,.$$

C14.63. EXERCICE Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$.

Indication: Considérer la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ où $x \in]-1,1[$.

C14.64. THÉORÈME (UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE) Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un voisinage de 0. Supposons f est développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$. Alors son développement en série entière est unique et égale à sa série de Taylor

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

C14.65. EXERCICE Que dire d'une fonction DSE au voisinage de 0 dont toutes les dérivées successives s'annulent en 0 ?

Indication: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction DSE au voisinage de 0 dont toutes les dérivées successives s'annulent en 0. Il existe donc $R>0$ tel que $]-R,R[\subset I$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R tels que

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \,.$$

Grâce à l'hypothèse, démontrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = 0$.

C14.66. THÉORÈME (EXISTENCE D'UN DSE) Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un voisinage de 0.

(a) **Condition nécessaire pour que f soit DSE sur un voisinage de 0.**
Si f est DSE, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.

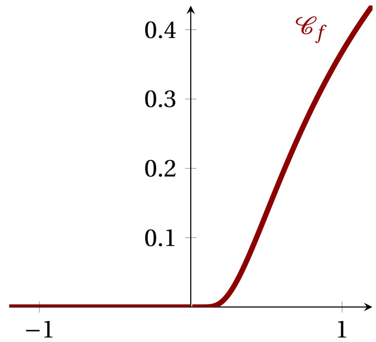
(b) **Condition suffisante pour que f soit DSE sur sur un voisinage de 0.**
Si $a > 0$ est un réel tel que
(H1) f est définie, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-a, a]$;
(H2) $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [-a, a], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \dfrac{M\, n!}{a^n}$ (condition de croissance de Cauchy)
alors f est DSE sur un intervalle $]-a, a[$.

C14.67. UNE FONCTION $\mathscr{C}^\infty$ SUR UN VOISINAGE DE 0 MAIS NON DSE AU VOISINAGE DE 0

La condition nécessaire « f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 » n'est pas suffisante. La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (cf. Q8 DM4), mais n'est pas DSE au voisinage de 0. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$, mais la fonction f n'est pas nulle au voisinage de 0.



§ 11 QUELQUES MÉTHODES ET EXEMPLES

§ 11.1 CALCULS DE DSE PAR DÉRIVATION OU PRIMITIVATION

C14.68. EXERCICE Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(1-x)^2} \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$.

Indication — Deux approches possibles
(i) C14.63 et produit de Cauchy de deux séries entières
(ii) C14.63 et dérivation d'une série entière

C14.69. EXERCICE Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1-x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$.

Indication — C14.63 et primitivation d'une série entière

C14.70. EXERCICE Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$$

est DSE sur $]-1,1[$.

Indication — Deux approches possibles
(i) établir que $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est DSE sur $]-1,1[$ en considérant une série géométrique et primitivation d'une série entière
(ii) C14.69 et changement de variable

§ 11.2 Calculs de DSE à l'aide d'une équation différentielle

C14.71. Exercice Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le DSE au voisinage de 0 de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1+x)^{\alpha} \end{array} \right.$$

en utilisant une équation différentielle.

Indication

(1) Recherche d'une équation différentielle (E) dont f est solution.
Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, calculer la dérivée de f et en déduire une équation différentielle linéaire homogène d'ordre (1), notée (E), dont f est solution.
(2) Recherche d'une solution de (E) DSE sur $]-1,1[$: analyse.
Supposons qu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 dont la somme est solution de (E) sur $]-1,1[$. À l'aide de C14.64, déterminer une relation de récurrence vérifier par les coefficients a_n puis une expression explicite de ceux-ci.
(3) Recherche d'une solution de (E) DSE sur $]-1,1[$: synthèse.
Vérifier que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, dont les coefficients ont été obtenus en (2), a rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que sa somme est solution de (E).
(4) Application du théorème de Cauchy-Lipschitz pour conclure.
Lier la fonction f et la somme de la série entière toutes deux solutions de (E).

§ 11.3 Calculs de DSE à l'aide d'un produit de Cauchy

C14.72. Exercice Déterminer le DSE au voisinage de 0 de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x)^2 \,. \end{array} \right.$$

Indication

C14.70 et produit de Cauchy de deux séries entières

§ 11.4 Applications de la table des DSE usuels

C14.73. Exercice Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

(a) $x \longmapsto \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ (b) $x \longmapsto \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$ (c) $x \longmapsto \dfrac{x}{(1-x)(1-2x)^2}$ (d) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Indication

(a) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \left(1+x^2\right) \times \dfrac{1}{1-x^2}$ et table des DSE usuels.

(b) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1+x}{(1-x)^2} = (1+x) \times \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \dfrac{1}{1-x}$ et table des DSE usuels.

(c) Pour tout $y \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{(1-y)^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \dfrac{1}{1-y}$, pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{x}{(1-x)(1-2x)^2} = x \times \dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{(1-2x)^2}$ et table des DSE usuels.

(d) Pour tout $x \in]-1,1[$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = (1+x) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x) \times \left(1-x^2\right)^{-1/2}$$

et table des DSE usuels.

C14.74. Exercice Exprimer les sommes des séries entières suivantes à l'aide de fonctions usuelles, après avoir précisé leurs rayons de convergence.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$

Indication

(a) Calculer $R := R\left(\sum_{n\geqslant 0} n^2\, x^n\right)$ à l'aide du critère de d'Alembert. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)+n)\, x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}$$

table des DSE usuels et dérivation d'une série entière.

(b) Calculer $R := R\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}\right)$ à l'aide du critère de d'Alembert. Pour tout $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+3)}\right) x^n = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2x^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3}$$

table des DSE usuels et primitivation d'une série entière.

(c) Calculer $R := R\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!} x^n\right)$ à l'aide du critère de d'Alembert. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)-n}{(n-1)!}\, x^n = x\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-2)!}\, x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!}\, x^{n-1}\right)$$

table des DSE usuels et primitivation d'une série entière.

(d) Calculer $R := R\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}\right)$ à l'aide du critère de d'Alembert. Pour tout $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) x^{2n} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

table des DSE usuels et primitivation d'une série entière.

§ 12 Table des développements en série entière usuels

Fonction	DSE	Rayon	Une démarche pour obtenir le DSE
$x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	Cf. résultats sur les séries géométriques.
$x \longmapsto e^x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	Solution du problème de Cauchy : $I=\mathbb{R}$, $y'=y$, $y(0)=1$.
$x \longmapsto \sin(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	Partie imaginaire de la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ dont le DSE peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (ix)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto e^x$, en remarquant que $i^{2n}=(-1)^n$ et $i^{2n+1}=(-1)^n\, i$.
$x \longmapsto \cos(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	Partie réelle de la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ dont le DSE peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (ix)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto e^x$, en remarquant que $i^{2n}=(-1)^n$ et $i^{2n+1}=(-1)^n\, i$.
$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	Partie impaire de la fonction $x \longmapsto e^x$.
$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	Partie paire de la fonction $x \longmapsto e^x$.
$x \longmapsto (1+x)^\alpha$	$\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}\, x^n$	1	Solution du problème de Cauchy : $I=]-1,1[$, $(1+x)\,y'=\alpha\, y$, $y(0)=1$.
$x \longmapsto \ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow (-x)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.
$x \longmapsto \arctan(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow \left(-x^2\right)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.
$x \longmapsto \arcsin(x)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	Intégration entre 0 et x du DSE de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, qui peut être obtenu par la substitution $x \leftarrow \left(-x^2\right)$ dans le DSE de la fonction $x \longmapsto (1+x)^{-1/2}$, avec une expression de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$ en termes de factorielles et de puissances de 2, dans le cas $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

§ 13 UNE SÉLECTION D'EXERCICES

C14.75. EXERCICE (CCINP)

1. Démontrer que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, posons :
$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
Montrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$, sans utiliser la fonction exponentielle.
3. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$ et $f(-z) = \frac{1}{f(z)}$.

C14.76. EXERCICE (CCINP)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Démontrer que cette série converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.
2. Démontrer que la fonction :
$$S : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
est continue sur $D(0, R)$.

C14.77. EXERCICE (CCINP)

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes.

1. $\sum n^\alpha z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) z^n$

C14.78. EXERCICE (CCINP)

1. Démontrer que si $|a_n| \sim |b_n|$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$.

C14.79. EXERCICE (CCINP)

1. Soit (a_n) une suite de nombres complexes bornée, telle que la série $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$?

C14.80. EXERCICE (CCINP)

1. Que savez-vous du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ?
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction
$$f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x).$$
La série converge-t-elle pour $x = \frac{1}{2}$? Pour $x = \frac{1}{4}$? Si oui, quelle est sa somme ?

C14.81. EXERCICE (CCINP)

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, telle que les termes de la suite (a_n) sont touts non nuls et :
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$. Que dire du rayon de convergence de la série entière ?
2. Démontrer que les séries entières $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} x^n$ ont même rayon de convergence R que la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Démontrer que la fonction
$$f \left| \begin{array}{ccc}]-R;R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$
est dérivable sur $]-R;R[$.

C14.82. EXERCICE (CCINP) Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

et préciser le rayon de convergence.

C14.83. EXERCICE (CCINP)

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. Notons :

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

pour tout réel x tel que la série converge.

2. Déterminer le développement en série entière de la fonction ch et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$, pour tout réel x tel que la série converge.

(b) On considère la fonction f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

C14.84. EXERCICE (CCINP) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. Considérons la série entière $\sum P(X = n)\ t^n$. Notons R_X son rayon de convergence.

(a) Montrer que $R_X \geq 1$.

(b) Notons :

$$G_X(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n$$

et $\mathscr{D}_{G_X}$ l'ensemble de définition de G_X. Montrer que $[-1, 1] \subset \mathscr{D}_{G_X}$.

(c) Pour tout $t \in \mathscr{D}_{G_X}$, exprimer $G_X(t)$ comme une espérance.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X = n)$ en fonction de $G_X^{(n)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer $\mathscr{D}_{G_X}$ et calculer $G_X(t)$ pour tout $t \in \mathscr{D}_{G_X}$.

(b) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, suivant respectivement une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Déterminer à l'aide des questions précédentes la loi de $X + Y$.

C14.85. EXERCICE (CCINP) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \arctan\left(n^a\right)\ x^n$.

C14.86. EXERCICE (CCINP) Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_{n+2} = (n+1)\ (d_n + d_{n+1})\ .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n!}{3} \leq d_n \leq n!$$

En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{d_n}{n!}\ x^n$.

2. On pose :

$$S \left| \begin{array}{ccc}]-R\,;R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}\ x^n \end{array} \right. .$$

Montrer que S est solution de l'équation différentielle :

$$(1-x)\, y' - x\, y = 1$$

puis exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.

C14.87. Exercice (CCINP) Soit (b_n) la suite réelle définie par $b_0 = 1$ et pout tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq e^n$. En déduire que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence R non nul.
2. Calculer $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ pour tout $x \in]-R\,;R[$.

C14.88. Exercice (CCINP) Rayon de convergence et calcul de la somme de $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{4n}{(2n-1)(n+1)}\, x^n$.

C14.89. Exercice (CCINP) Rayon de convergence et calcul de la somme de $\sum \frac{n^2-5n+1}{n!}\, x^n$.

C14.90. Exercice (CCINP) Rayon de convergence et calcul de la somme de $\sum \frac{x^{4n+1}}{4n^2-1}$.

C14.91. Exercice (CCINP) Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) x^n$.

C14.92. Exercice (CCINP) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$u_n := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)}\, \mathrm{d}x\,.$$

1. Justifier l'existence de u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n\, x^n$.

C14.93. Exercice Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

$$\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell\,.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$.

C14.94. Exercice Soient $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n)\, z^n$.

C14.95. Exercice Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{1+|a_n|}\, z^n$.

C14.96. Exercice Notons $a_n = \sum_{d|n} d^2$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$.

C14.97. Exercice Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit (a_n) une suite de nombres complexes p-périodique de période p, i.e. telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+p} = a_n\,.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, x^n$ et montrer que sa somme est une fraction rationnelle.

C14.98. Exercice (ENSAM) Rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\sin(n)}{n}\, x^n$.

C14.99. Exercice (ENSAM) Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = 4u_n + v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

valables pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{u_n}{n!}\, x^n$ et $\sum \frac{v_n}{n!}\, x^n$, puis une expression à l'aide des fonctions usuelles des fonctions f et g définies par :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!}\, x^n \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!}\, x^n\,.$$

C14.100. EXERCICE (CCINP)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons :
$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t\,.$$
Étudier la limite éventuelle de la suite (a_n).
2. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge et déterminer sa somme.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \dfrac{1}{2n+1}$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, x^n$.
4. Montrer que la fonction f définie par :
$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$
est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

C14.101. EXERCICE (TPE) Montrer que la fonction $x \longmapsto e^x \cos(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer les coefficients de son développement en série entière.

C14.102. EXERCICE Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,.$$

1. Supposons que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n\, x^n$ soit strictement positif. Notons :
$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\,.$$
Montrer que :
$$\forall x \in]-R\,;R[,\quad (x^2+x-1)f(x) = (a_0 - a_1)x - a_0\,.$$
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n\, x^n$ ainsi qu'unr expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

C14.103. EXERCICE (TPE) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons d_n le nombre de permutations sans points fixe de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, i.e. le nombre de permutations σ de $[\![1,n]\!]$ telles que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(k) \neq k$. On posera $d_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{d_n}{n!}\, x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Si $x \in]-1,1[$, calculer $e^x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}\, x^n$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

C14.104. EXERCICE Soit P une fonction polynomiale de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum P(n)\, x^n$.

C14.105. EXERCICE (CENTRALE) Développer la fonction suivante en série entière, en précisant le rayon de convergence.
$$f : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$$

C14.106. EXERCICE (CENTRALE) Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer la fonction suivante en série entière et préciser le rayon de convergence.
$$f : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{1 - 2\,x\,\mathrm{ch}(a) + x^2}\right)$$

C14.107. EXERCICE (CENTRALE) Développer la fonction suivante en série entière, en précisant le rayon de convergence.
$$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

C14.108. EXERCICE (MINES)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

$$f\colon x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

2. Déterminer la limite de f en 1^-.

C14.109. EXERCICE (MINES) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière convergeant normalement sur le disque ouvert $D(0,R)$. Montrer que la série $\sum a_n R^n$ converge.

C14.110. EXERCICE (MINES) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit la fonction f définie par :

$$f\colon z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Déterminer une expression de $f(z)$ pour $z \in [0,1[$.
3. Y a-t-il convergence sur le cercle unité ?
4. Peut-on déduire l'expression sur le cercle unité de l'expression sur le disque ouvert ?

C14.111. EXERCICE (MINES) Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante. Montrer que la fonction f définie par :

$$f\colon z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est définie sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et ne s'y annule pas.

C14.112. EXERCICE (MINES) Soit (a_n) une suite de réels telle que la série $\sum a_n$ converge.

1. Justifier l'existence de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n. \end{array} \right.$$

2. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

C14.113. EXERCICE (CENTRALE) Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$$

Soit (b_n) une suite de réels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}.$$

Notons R_a (respectivement R_b) le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ (respectivement $\sum b_n x^n$) et notons

$$A \left| \begin{array}{ccc}]-R_a\,;R_a[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right.$$

et

$$B \left| \begin{array}{ccc}]-R_b;R_b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \end{array} \right.$$

1. On suppose que $a_1 = 1$. Déterminer R_a, R_b, A et B.
2. Montrer que R_a et R_b sont strictement positifs.
3. Montrer que sur un voisinage de 0 que l'on précisera, $B(x) = A(x) + A(x)B(x)$. Que vaut R_b ?

4. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \neq 0$ et pour tout $q \geq p+1$, $a_q = 0$, et que les racines du polynôme $A(X) - 1$ sont simples.
   (a) Que dire du module des racines de $A(X)-1$? Montrer que 1 est la seule racine de module 1 de $A(X)-1$.
   (b) Montrer que B est une fraction rationnelle.
   (c) Trouver la limite de la suite (b_n).

C14.114. Exercice Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, de somme f, telle que pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.

1. Supposons que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que f est définie et continue sur $\overline{D(0,1)}$.
2. Supposons que la série $\sum a_n$ diverge. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 1^-]{} +\infty$.

C14.115. Exercice (Centrale) Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence 1, de sommes respectives f et g. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$ et que $a_n \sim b_n$. Montrer que :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow 1^-}{\sim} g(x)\,.$$

C14.116. Exercice (Centrale) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \geq 1$, de somme notée f.

1. Calculer pour tout $r \in [0\,,1[$:
$$m_f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta\,.$$
2. On suppose que la série $\sum |a_n|^2$ converge. Montrer que la fonction $r \longmapsto m_f(r)$ est bornée sur $[0,1[$.
3. Exhiber un exemple pour lequel m_f est bornée et f est non bornée sur $D(0,1)$.
4. On suppose à nouveau que la série $\sum |a_n|^2$ converge. Montrer que pour tout $r \in [0,1[$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$\left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 \leq \frac{1}{1-r^2} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2\,.$$

C14.117. Exercice (X-ENS) Soient $a > 0$ et $f :]-a\,;a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$ sur $]-a\,;a[$.

1. Donner des exemples de telles fonctions.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

C14.118. Exercice (X-ENS) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons, pour tout $z \in D(0,1)$:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,.$$

On suppose que la série $\sum a_n$ converge et on note ℓ sa somme. Pour tout $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, notons :

$$\Delta_{\theta_0} := \left\{ z \in D(0,1) \;:\; \exists \rho > 0,\, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\lim_{z \longrightarrow 1,\, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = \ell\,.$$

1. Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que :
$$\forall z \in D(0,1),\; f(z) - \ell = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n\,.$$
Indication : on pourra remarquer que pour tout $n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$ et effectuer une transformation d'Abel.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\left| f(z) - \ell \right| \leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \frac{\cos(\theta_0)\varepsilon}{2} \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $z \in B(1,\alpha) \cap \Delta_{\theta_0}$, $\left|f(z) - \ell\right| \leq \varepsilon$. Conclure.

C14.119. Exercice (X-ENS) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

pour tout $z \in D(0,1)$. On fait les hypothèses suivantes :

(H1) $\exists \ell \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 1^-]{} \ell$;

(H2) $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Le but de cet exercice est de montrer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall x \in [0,1[$:
$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k\,|a_k|}{n} x^k .$$
2. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$:
$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq (M+1)\varepsilon .$$
3. Conclure.

C14.120. Exercice (Formule de Cauchy et théorème de Liouville) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$. On note f sa somme.

1. Montrer que pour tout $r > 0$:
$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(r e^{i\theta}\right) e^{-ni\theta}\, \mathrm{d}\theta .$$
Cette égalité est connue sous le nom de **formule de Cauchy**.
2. Supposons f bornée. Montrer que f est constante. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de Liouville**.
3. Supposons qu'il existe un polynôme P de degré $d \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left|f(z)\right| \leq |P(z)|$. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à d.

C14.121. Exercice (Théorème de d'Alembert-Gauss) Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à $d \in \mathbb{N}^*$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il ne possède aucune racine dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que la fonction :
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{P(z)} \end{array} \right.$$
est bornée.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
3. Montrer que le rayon de convergence de f est infini (on pourra utiliser la formule de Cauchy).
4. Conclure à l'aide du théorème de Liouville.