M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Chapitre 3
Révisions d'algèbre linéaire

David BLOTTIÈRE

Table des matières

C3. 1. *Notation.* — Dans tout ce chapitre la lettre $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$.

1 K-espaces vectoriels

1.1 Notion de K-espace vectoriel

C3. 2. Définition (Structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel). — *Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est la donnée d'un triplet $(E, +, .)$ où :*

1. *E est un ensemble*
2. *$+$ est une loi de composition interne sur E, i.e. une application :*

$$+ \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \right.$$

3. *. est une loi de composition externe sur E à opérateurs dans $\mathbf{K}$, i.e. :*

$$. \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda.u \end{array} \right.$$

vérifiants les propriétés suivantes.

1. $\forall (u, v, w) \in E^3 \quad (u + v) + w = u + (v + w) =: u + v + w$ *(+ est associative)*
2. $\exists\, 0_E \in E \quad \forall u \in E \quad 0_E + u = u + 0_E = u$ *(+ possède un élément neutre)*
3. $\forall u \in E \quad \exists v \in E \quad u + v = v + u = 0_E$ *(tout élément de E possède un opposé)*
4. $\forall (u, v) \in E^2 \quad u + v = v + u$ *(+ est commutative)*
5. $\forall u \in E \quad 1_{\mathbf{K}}.u = u$ *($1_{\mathbf{K}}$ est neutre pour .)*
6. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \forall u \in E \quad \lambda.(\mu.u) = (\lambda \times_{\mathbf{K}} \mu).u$ *(associativité mixte)*
7. $\forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall (u, v) \in E^2 \quad \lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$ *(distributivité à droite)*
8. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \forall u \in E \quad (\lambda +_{\mathbf{K}} \mu).u = \lambda.u + \mu.u$ *(distributivité à gauche)*

C3. 3. *Remarque.* — Soit $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. En vertu des propriétés (1)–(4) de la définition **C3.2**, $(E, +)$ est un groupe abélien (ou commutatif).

C3. 4. Proposition (Conséquences des axiomes de structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel). — *Soit $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

1. *L'élément 0_E est unique. Il est appelé vecteur nul de E.*
2. *Soit $u \in E$. L'élément v de E tel que $v + u = u + v = 0_E$ est unique. Il est appelé opposé de u et est noté $-u$.*
3. $\forall u \in E \quad 0_{\mathbf{K}}.u = 0_E$
4. $\forall u \in E \quad (-1_{\mathbf{K}}).u = -u$

1.2 Quelques $\mathbf{K}$-espaces vectoriels usuels

C3. 5. *Exemple (Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}^n$.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'ensemble $\mathbf{K}^n$ des n-uplets d'éléments de $\mathbf{K}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 +_{\mathbf{K}} y_1, \dots, x_n +_{\mathbf{K}} y_n) \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ (\lambda, (x_1, \dots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda \times_{\mathbf{K}} x_1, \dots, \lambda \times_{\mathbf{K}} x_n) \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbf{K}^n$ est $0_{\mathbf{K}^n} = (0_{\mathbf{K}}, \dots, 0_{\mathbf{K}})$. L'opposé d'un vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$.

C3. 6. *Exemple (Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel d'applications $\mathbf{K}^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K})$).* — Soit Ω un ensemble non vide. L'ensemble $\mathbf{K}^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{K})$ des applications de Ω dans $\mathbf{K}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^\Omega \times \mathbf{K}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{K}^\Omega \\ (f, g) & \longmapsto & f + g \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \omega & \longmapsto & f(\omega) +_{\mathbf{K}} g(\omega) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}^\Omega & \longrightarrow & \mathbf{K}^\Omega \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda . f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \omega & \longmapsto & \lambda \times_{\mathbf{K}} f(\omega) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbf{K}^\Omega$ est

$$0_{\mathbf{K}^\Omega} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \omega & \longmapsto & 0_{\mathbf{K}} \end{array} \right. .$$

L'opposé d'un vecteur $f \in \mathbf{K}^\Omega$ est

$$-f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \omega & \longmapsto & -f(\omega) \end{array} \right. .$$

C3. 7. *Exemple (Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des suites $\mathbf{K}^{\mathbf{N}} = \mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{N})$).* — L'ensemble $\mathbf{K}^{\mathbf{N}} = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{K})$ des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ indexées par $\mathbf{N}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ ((u_n), (v_n)) & \longmapsto & (u_n +_{\mathbf{K}} v_n) \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ (\lambda, (u_n)) & \longmapsto & (\lambda \times_{\mathbf{K}} u_n) \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est $0_{\mathbf{K}^n} = (0_{\mathbf{K}}, 0_{\mathbf{K}}, \dots, 0_{\mathbf{K}}, \dots)$. L'opposé d'un vecteur $(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est $(-u_n)$.

C3. 8. *Exemple (Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$).* — Soient n et p des entiers naturels non nuls. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices de format $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ ((a_{i,j}), (b_{i,j})) & \longmapsto & (a_{i,j} +_{\mathbf{K}} b_{i,j}) \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ (\lambda, (a_{i,j})) & \longmapsto & (\lambda \times_{\mathbf{K}} a_{i,j}) \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est la matrice de format $n \times p$ dont tous les coefficients valent $0_{\mathbf{K}}$. L'opposé d'un vecteur $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est $(-a_{i,j})$.

C3. 9. *Rappel (Écriture d'un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$).* — Tout polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$ s'écrit d'une unique manière sous la forme

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où $(a_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est une suite de scalaires tous nuls, sauf peut être un nombre fini d'entre eux. Ainsi, la somme $(\star)$ est une somme finie (et donc aucun problème de convergence n'est à considérer ici).

C3. 10. *Exemple (Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$).* — L'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ muni de

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \, , \, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \right) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k +_{\mathbf{K}} b_k) X^k \end{array} \right.$$

et

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \left(\lambda \, , \, \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \right) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda \times_{\mathbf{K}} a_k) X^k \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbf{K}[X]$ est le polynôme dont tous les coefficients valent $0_{\mathbf{K}}$. L'opposé d'un vecteur $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ est $\sum_{k=0}^{+\infty} (-a_k) X^k$.

2 Sous-espaces vectoriels

C3. 11. *Notation.* — Dans toute cette partie, consacrée aux sous-espaces vectoriels, on fixe un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$

2.1 Notion de sous-espace vectoriel

C3. 12. Définition (Sous-espace vectoriel de E). — *Soit F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si trois propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. $0_E \in F$ $\quad$ *(F contient le vecteur nul de E)*
2. $\forall (u_1, u_2) \in F^2 \quad u_1 + u_2 \in F$ $\quad$ *(F est stable par addition)*
3. $\forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall u \in F \quad \lambda . u \in F$ $\quad$ *(F est stable par multiplication par un scalaire)*

C3. 13. *Exemple (Sous-espaces vectoriels triviaux de E).* — $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E.

C3. 14. Proposition (Critère pour être un s.e.v. de E). — *Soit F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. $F \neq \emptyset$ *(F contient au moins un élément)*
2. $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2 \quad \forall (u_1, u_2) \in F^2 \quad \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 \in F$ *(F est stable par combinaison linéaire)*

C3. 15. *Exercice.* —

1. Démontrer que $\{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \ : \ x - y + 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^3$.
2. Justifier que $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{[0,1]}$.

C3. 16. Proposition (Ensemble solution d'une équation linéaire homogène). — *Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et soit $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des éléments de $\mathbf{K}$. On considère l'équation linéaire homogène (E) définie par*

$$(E) \qquad a_1.x_1 + a_2.x_2 + \ldots + a_p.x_p = 0$$

d'inconnue $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p$. Alors l'ensemble solution de (E)

$$\mathit{Sol}(E) := \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p \ : \ a_1.x_1 + a_2.x_2 + \ldots + a_p.x_p = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$.

C3. 17. Théorème (Un s.e.v. de E possède une structure naturelle de $\mathbf{K}$-e.v.). — *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors les applications*

$$+_F \left| \begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \right.$$

et

$$\cdot_F \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda.u \end{array} \right.$$

induites par les opérations $+$ et $.$ de E, sont bien définies et $(F, +_F, \cdot_F)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

C3. 18. *Remarque.* — Le précédent théorème fournit un outil puissant, pour construire de nouveaux espaces vectoriels.

C3. 19. *Exercice.* — Démontrer que

$$F := \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}) \ : \ \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$.

2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

2.2.1 Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels

C3. 20. Proposition (L'intersection d'une famille de s.e.v. de E est un s.e.v. de E). — *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\bigcap_{i\in I} F_i \;:=\; \{u \in E \;:\; \forall\, i \in I,\; u \in F_i\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

C3. 21. *Remarque (Sur les réunions de sous-espaces vectoriels).* — Une réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E. Par exemple

$$F_1 := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; x - y = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;:\; x + y = 0\right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ (puisque chacun est ensemble solution d'une équation linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbf{R}^2$), mais $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. En effet, $F_1 \cup F_2$ n'est pas stable par addition : $(1,1)$ et $(1,-1)$ appartiennent à $F_1 \cup F_2$, mais $(1,1)+(1,-1) = (2,0) \notin F_1 \cup F_2$.

C3. 22. Proposition (Ensemble solution d'un système linéaire homogène). — *Soient n et p est entiers naturels non nuls. Soit $(a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbf{K})$. On considère le système linéaire homogène (S) défini par :*

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}.x_1 & + & a_{1,2}.x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}.x_p & = & 0 & & (E_1) \\ a_{2,1}.x_1 & + & a_{2,2}.x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}.x_p & = & 0 & & (E_2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1}.x_1 & + & a_{n,2}.x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}.x_p & = & 0 & & (E_n) \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbf{K}^p$. Alors l'ensemble solution de (S)

$$\mathit{Sol}(S) := \{(x_1,\dots,x_p) \in \mathbf{K}^p \;:\; \forall\, i \in [\![1,n]\!],\; a_{i,1}.x_1 + a_{i,2}.x_2 + \dots + a_{i,p}.x_p = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$.

2.2.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

C3. 23. Théorème (Somme de deux s.e.v. de E). — *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $F_1 + F_2$ la partie de E définie par*

$$F_1 + F_2 := \{u_1 + u_2 \;:\; u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2\}.$$

Alors

1. *$F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$ (inclusion)*
2. *$F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E (sous-espace vectoriel)*
3. *si G est une partie de E telle que $F_1 \cup F_2 \subset G$ et G est un sous-espace vectoriel de E, alors $F_1 + F_2 \subset G$.*

Ainsi $F_1 + F_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient $F_1 \cup F_2$.

C3. 24. *Terminologie.* — La propriété 3 du Théorème **C3.23** sera appelée propriété de minimalité de la somme.

C3. 25. *Exercice.* — Soient F_1, F_2, G des sous-espaces vectoriels de E. En utilisant, pleinement et uniquement, les 3 points du théorème précédent, établir l'équivalence (souvent utile) suivante.

$$(\ F_1 \subset G \text{ et } F_2 \subset G\ ) \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_1 + F_2 \subset G$$

C3. 26. *Exercice (Fil rouge - partie 1).* — Soient

$$F_1 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3\ :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \left\{(a, a, a) \in \mathbf{R}^3\ :\ a \in \mathbf{R}\right\}.$$

1. Justifier que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Démontrer que $F_1 + F_2 = \mathbf{R}^3$.

C3. 27. Définition (Deux s.e.v. de E en somme directe). — *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. *On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si*

$$\forall\, u \in F_1 + F_2 \quad \exists!\,(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \quad u = u_1 + u_2$$

   i.e. si tout élément de $F_1 + F_2$ s'écrit de manière unique sous la forme $u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$.
2. *Si F_1 et F_2 sont en somme directe, alors on note $F_1 \oplus F_2$ le sous-espace vectoriel $F_1 + F_2$ de E.*

C3. 28. Théorème (Critère pour que deux s.e.v. de E soient en somme directe). — *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$. Alors F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*

C3. 29. *Exercice (Fil rouge - partie 2).* — Démontrer que les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de l'exercice **C3.26** sont en somme directe.

2.2.3 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

C3. 30. *Attention.* — Nous allons à présent étudier la somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, qui étend ce qui a été vu pour la somme de deux sous-espaces vectoriels. Il faut prendre garde à la généralisation du Théorème **C3.23**. Le critère ne mettra pas en jeu des intersections de deux sous-espaces vectoriels quelconques parmi ceux dont on prend la somme. Cf. Théorème **C3.34**.

C3. 31. Définition (Somme d'un nombre fini de s.e.v.). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.*

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_p = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_p\ :\ (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_p\}\ .$$

La somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est également notée $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

C3. 32. Théorème (Structure de la somme d'un nombre fini de s.e.v.). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E.*

C3. 33. Définition (Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.*

1. *La somme $F_1 + \ldots + F_p$ est dite directe si tout élément x de $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = x_1 + x_2 + \ldots x_p \quad \textit{avec} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in F_1 \times F_2 \ldots \times F_p.$$

2. *L'existence de la décomposition de $x \in F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ en 1 étant claire par définition de $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$, seule l'unicité est à considérer. Ainsi peut-on reformuler comme suit la somme $F_1 + \ldots + F_p$ est directe si :*
   pour tout $((x_1, x_2, \ldots, x_p), (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in (F_1 \times F_2 \ldots \times F_p)^2$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = y_1 + y_2 + \ldots + y_p \Longrightarrow x_1 = y_1 \ , \ x_2 = y_2 \ , \ \ldots \ , \ x_p = y_p.$$

3. *Si la somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est directe, on la note $F_1 \oplus F_2 + \oplus + F_p$ ou $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.*

C3. 34. Théorème (Critère pour qu'un nombre fini de s.e.v. soient en somme directe). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.*

1. *La somme $F_1, F_2, \ldots, F_p$ est directe si et seulement si la seule décomposition de 0_E sous la forme*

$$0_E = x_1 + x_2 + \ldots x_p \quad \textit{avec} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in F_1 \times F_2 \ldots \times F_p$$

   est $0_E = 0_E + 0_E + \ldots + 0_E$.

2. *Autrement dit, la somme $F_1, F_2, \ldots, F_p$ est directe est directe si et seulement si pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_p \in F_1 \times F_2 \ldots \times F_p$*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = 0_E \Longrightarrow x_1 = 0_E \ , \ x_2 = 0_E \ , \ \ldots \ , \ x_p = 0_E.$$

C3. 35. *Exercice.* — Soient $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ z = 0\}$, $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x = y = 0\}$ et $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x = 0 \text{ et } y = z\}$.

1. Justifier que F_1, F_2, F_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Calculer $F_1 \cap F_2$, $F_2 \cap F_3$ et $F_3 \cap F_1$.
3. La somme $F_1 + F_2 + F_3$ est-elle directe ?

C3. 36. THÉORÈME (INTERSECTION TRIVIALE ET SOMME DIRECTE : CAS GÉNÉRAL). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors la somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est directe si et seulement si*

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!] \qquad F_i \cap \left(\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} F_j \right) = \{0_E\}\,.$$

2.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

C3. 37. DÉFINITION (S.E.V. DE E SUPPLÉMENTAIRES). — *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si*

$$\forall\, u \in E \quad \exists\,!(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \qquad u = u_1 + u_2$$

i.e. si tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

C3. 38. *Attention.* — Soit F un sous-espace vectoriel de E. Le complémentaire $\overline{F}$ de F dans E n'est pas un supplémentaire de F dans E. En effet, $0_E \in F$, donc $0_E \notin \overline{F}$. Ainsi $\overline{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E et ce ne peut donc être un supplémentaire de F dans E.

C3. 39. PROPOSITION (CRITÈRE POUR QUE DEUX S.E.V. DE E SOIENT SUPPLÉMENTAIRES). — *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E.*
2. *$F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème **C3.28**. Q.E.D.

C3. 40. *Exercice (Fil rouge - partie 3).* — Les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de l'exercice **C3.26** sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$?

C3. 41. *Exercice.* — On considère le sous-espace vectoriel $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R}) \ :\ \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = 0 \right\}$ de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. En donner un supplémentaire dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$.

C3. 42. THÉORÈME (EXISTENCE D'UN SUPPLÉMENTAIRE POUR UN S.E.V. DE E). — *Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E.*

C3. 43. *Remarque.* — Le Théorème **C3.42** est admis pour un espace vectoriel E quelconque. Cependant, lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie, nous serons en mesure de le démontrer, grâce au théorème de la base incomplète.

2.4 Sous-espaces vectoriels engendrés

C3. 44. Proposition (S.e.v. engendré par une partie de E). — *Soit A une partie de E. On définit la partie Vect(A) de E par :*

$$\mathrm{Vect}\,(A) := \bigcap_{F \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } A \subset F} F\ .$$

Alors

1. $A \subset \mathrm{Vect}\,(A)$ *(inclusion)*
2. $\mathrm{Vect}\,(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *(sous-espace vectoriel)*
3. *si G est une partie de E telle que*
   — $A \subset G$ *(inclusion)*
   — G *est un sous-espace vectoriel de* E *(sous-espace vectoriel)*
   alors $\mathrm{Vect}\,(A) \subset G$.

En d'autres termes, $\mathrm{Vect}\,(A)$ *est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A. Le sous-espace vectoriel de E, noté* $\mathrm{Vect}\,(A)$*, est appelé sous-espace vectoriel de E engendré par A.*

C3. 45. *Terminologie.* — La propriété 3 du Théorème **C3.44** sera appelée propriété de minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré.

C3. 46. Théorème (Description du s.e.v. engendré par une partie finie de E). — *Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E. Alors* $\mathrm{Vect}\,(\{u_1, \ldots, u_n\})$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$, i.e. :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\,(\{u_1, \ldots, u_n\}) &= \{\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \ldots + \lambda_n.u_n \ :\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i \ :\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\right\}. \end{aligned}$$

C3. 47. *Remarque.* — Si A est une partie non vide de E, non nécessairement finie, on peut démontrer que Vect(A) est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de A.

C3. 48. *Exercice.* —

1. Comparer les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$

   $F := \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 2, -2), (1, 2, 3, -6))$ et $G := \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ :\ x + y + z + t = 0\right\}.$

2. Soit $u_1 := (1, 1, 2)$, $u_2 := (2, 2, 1)$, $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 := (1, 1, -1)$. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}\,(\{u_1, u_2\})$ et $\mathrm{Vect}\,(\{v_1, v_2\})$ de $\mathbf{R}^3$ sont égaux.

C3. 49. THÉORÈME (SOMME DE DEUX S.E.V. DE E, TOUS DEUX ENGENDRÉS PAR UNE PARTIE FINIE). — *Soient $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de E. Alors :*

$$\mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_n\}\right) + \mathrm{Vect}\left(v_1, \ldots, v_m\right) = \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\right) \, .$$

3 Familles remarquables finies

C3. 50. *Notation.* — Dans cette partie, on fixe $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

3.1 Familles génératrices finies

C3. 51. DÉFINITION (FAMILLE GÉNÉRATRICE DE E). — *Soit $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite génératrice de E si $\mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_n\}\right) = E$.*

C3. 52. PROPOSITION (REFORMULATION DE LA DÉFINITION DE FAMILLE GÉNÉRATRICE DE E). — *Soit $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.*

C3. 53. *Exercice.* —

1. Démontrer que $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{K}^4 \ : \ x - y + z = 0 \, , \, x + y - 2t = 0 \, , \, x + z - 2t = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbf{K}^4$ et en donner une famille génératrice.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathbf{K}_n[X] = \{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ \deg(P) \leqslant n\}$. Démontrer que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ et en donner une famille génératrice.

C3. 54. PROPOSITION (SUR-FAMILLE D'UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE DE E). — *Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E.*

3.2 Familles libres finies

C3. 55. DÉFINITION (FAMILLE LIBRE ET FAMILLE LIÉE DE E). — *Soit $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite libre si et seulement si :*

$$\forall \left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \in \mathbf{K}^n \qquad \lambda_1.u_1 + \ldots + \lambda_n.u_n = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbf{K}}.$$

Si la famille n'est pas libre, elle est dite liée.

C3. 56. *Exercice.* —

1. Énoncer et démontrer un critère qui assure la liberté d'une famille de polynômes de $\mathbf{K}[X]$.
2. Soit $a \in \mathbf{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la famille $\left(\left(1, a, a^2\right), \left(a, a^2, 1\right), \left(a^2, 1, a\right)\right)$ soit une famille libre de $\mathbf{C}^3$.

C3. 57. PROPOSITION (SOUS-FAMILLE D'UNE FAMILLE LIBRE DE E). — *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

3.3 Bases finies

C3. 58. DÉFINITION (BASE DE E). — *Une base de E est une famille de vecteurs de E qui est à la fois libre et génératrice de E.*

C3. 59. *Exercice.* — Soient n et p des nombres entiers naturels non nuls.

1. Donner la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
2. Donner la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.
3. Donner la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

C3. 60. *Exercice.* — Justifier que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ : \ M = {}^tM\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, puis en donner une base.

C3. 61. *Exercice (Coordonnées d'un vecteur dans une base).* —

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Soit $x \in E$. Justifier qu'
$$\text{il existe un unique} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \text{ tel que } x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \ldots + x_n.e_n.$$
Ce vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelé vecteur des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. Expliciter les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
3. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \in \mathbf{K}_n[X]$. Expliciter les coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.
4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Expliciter les coordonnées de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

C3. 62. THÉORÈME (CONSTRUCTION DE BASES ADAPTÉES À UNE DÉCOMPOSITION EN SOMME DIRECTE). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Soit $\left(e^i_1, \ldots, e^i_{n_i}\right)$ une base de F_i, $i \in [\![1, p]\!]$. Alors $\left(e^1_1, \ldots, e^1_{n_1}, e^2_1, \ldots, e^2_{n_2}, \ldots, e^p_1, \ldots, e^p_{n_p}\right)$ est une base de $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$, que l'on appelle base adaptée à $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p$.*

4 Familles remarquables

C3. 63. *Notation.* — Dans cette partie, on fixe $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et I désigne un ensemble non vide.

4.1 Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

C3. 64. Définition (Famille presque nulle de scalaires). —

1. *On dit qu'une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^I$ indexée par I est presque nulle si son support*

$$\mathit{supp}((\lambda_i)_{i\in I}) := \{i \in I \ : \ \lambda_i \neq 0\}$$

est fini.

2. *L'ensemble des familles de scalaires indexées par I, qui sont presque nulles, est noté $\mathbf{K}^{(I)}$.*

C3. 65. Proposition (Structure de $\mathbf{K}^{(I)}$). — *$\mathbf{K}^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^I$.*

C3. 66. Définition (Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs non nécessairement finie). — *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I. Un vecteur u de E est dit combinaison linéaire de $(u_i)_{i\in I}$ si il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ tel que*

$$u = \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i := \underbrace{\sum_{i\in \mathit{supp}((\lambda_i)_{i\in I})} \lambda_i.u_i}_{\textit{somme finie}}.$$

ou de manière équivalente, s'il existe une partie finie J de I et $(\lambda_j)_{j\in J}$ tel que $u = \sum_{j\in J} \lambda_j.u_j$.

C3. 67. Remarque (Cas particulier des familles indexées par $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$). —

1. *Soit $(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille de vecteurs de E. u est combinaison linéaire de $(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ si et seulement si il existe $N \in \mathbf{N}$ et $(\lambda_i)_{i\in[\![0,N]\!]} \in \mathbf{K}^{N+1}$ tel que $u = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i u_i$. En effet tout partie finie de $\mathbf{N}$ est incluse dans un ensemble $[\![0, N]\!]$ pour un certain $N \in \mathbf{N}$.*
2. *Soit $(u_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ une famille de vecteurs de E. u est combinaison linéaire de $(u_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ si et seulement si il existe $N \in \mathbf{N}$ et $(\lambda_i)_{i\in[\![-N,N]\!]} \in \mathbf{K}^{2N+1}$ tel que $u = \sum_{i=-N}^{N} \lambda_i u_i$. En effet tout partie finie de $\mathbf{Z}$ est incluse dans un ensemble $[\![-N, N]\!]$ pour un certain $N \in \mathbf{N}$.*

4.2 Familles génératrices

C3. 68. Définition (Famille génératrice). — *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite génératrice de E si tout élément de E est combinaison linéaire de $(u_i)_{i\in I}$, i.e. si*

$$\forall\, u\in E \quad \exists\,(\lambda_i)_{i\in I}\in \mathbf{K}^{(I)} \quad x=\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i.$$

C3. 69. Remarque (Reformulation de la notion de famille génératrice). — *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E est génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs u_i, $i\in I$, i.e. si*

$$\bigcup_{J \text{ finie} \subset I} \mathrm{Vect}\left((u_j)_{j\in J}\right)=E.$$

C3. 70. *Exercice.* — Reformuler la notion de famille génératrice dans le cas $I=\mathbf{N}$ et dans le cas $I=\mathbf{Z}$.

C3. 71. *Exemple.* — La famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est génératrice de $\mathbf{K}[X]$.

4.3 Familles libres

C3. 72. Définition (Famille libre et famille liée). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I.*

1. *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite libre si toute combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ qui est nulle a tous ses coefficients nuls, i.e.*
$$\left(\forall\,(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbf{K}^{(I)} \quad \sum_{i\in I}\lambda_i.u_i=0_E\right)\Longrightarrow(\forall\, i\in I \quad \lambda_i=0_{\mathbf{K}})\,.$$
2. *Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas libre, elle est dite liée.*

C3. 73. *Exemple.* — La famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{K}[X]$ est libre.

C3. 74. Remarque (Reformulation de la notion de famille libre). — *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E est libre si et seulement si toute combinaison linéaire finie de vecteurs u_i, $i\in I$, qui est nulle tous ses coefficients nuls, i.e. si et seulement si*

$$\forall\, J \text{ finie} \subset I \qquad (u_j)_{j\in J} \text{ est libre.}$$

C3. 75. *Exercice.* — Reformuler la notion de famille génératrice dans le cas $I = \mathbf{N}$ et dans le cas $I = \mathbf{Z}$.

C3. 76. Remarque (Reformulation de la notion de famille liée). — *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est combinaison linéaire des autres, i.e. s'il existe $i \in I$ et J finie $\subset I$ ne contenant pas i tel que u_i est combinaison linéaire de $(u_j)_{j\in J}$.*

4.4 Bases

C3. 77. Définition (Base). — *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E est appelée base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E.*

C3. 78. *Exemple.* — Par définition de $\mathbf{K}[X]$, la famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$.

C3. 79. *Exercice.* — Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de réels deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{a_n x} \end{array} \right. .$$

La famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

C3. 80. *Exercice.* — Soit $(a_p)_{p\in\mathbf{Z}}$ une famille de réels deux à deux distincts. La famille $\left(\left(a_p^n\right)_{n\in\mathbf{N}}\right)_{p\in\mathbf{Z}}$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

5 Dimension finie

C3. 81. *Notation.* — Dans cette partie, on fixe $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

C3. 82. *Notation.* — Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E, la famille $(u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n)$ désigne la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ privée du vecteur u_i.

5.1 Espace vectoriel de dimension finie et théorème de la base extraite

C3. 83. Définition (K-e.v. de dimension finie). — *On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.*

C3. 84. *Lemme clé pour le théorème de la base extraite.* — Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, qui est génératrice de E. On suppose qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$, tel que

$$u_i \in \operatorname{Vect}\left(\{u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n\}\right)$$

i.e. tel que u_i est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$. Alors la famille $(u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n)$ est génératrice de E.

Démonstration. Soit $x \in E$. Puisque la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ engendre E, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j u_j\right) + \lambda_i u_i.$$

Clairement, $\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j u_j \in \operatorname{Vect}\left(\{u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n\}\right)$. Comme $u_i \in \operatorname{Vect}\left(\{u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n\}\right)$, $\lambda_i u_i \in \operatorname{Vect}\left(\{u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n\}\right)$. Ainsi $x \in \operatorname{Vect}\left(\{u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n\}\right)$, comme somme de deux éléments de ce sous-espace vectoriel de E. Ceci étant vrai pour un $x \in E$ quelconque, il vient :

$$E \subset \operatorname{Vect}\left(\{u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n\}\right) .$$

L'inclusion réciproque est triviale. Q.E.D.

C3. 85. Théorème (Base extraite et existence d'une base en dimension finie). — *Supposons que E est non réduit à $\{0_E\}$ et de dimension finie. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E.*

1. *On peut extraire de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ une sous-famille qui est une base de E.*
2. *En particulier E possède une base (finie).*

Démonstration. Seule la première assertion requiert une preuve. Nous raisonnons par récurrence sur le nombre n d'éléments que possède la famille génératrice donnée. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ le prédicat suivant :

« De toute famille génératrice de n vecteurs de E, on peut extraire une base de E. »

— *Initialisation à $n = 1$*
Soit (u_1) une famille génératrice de E. Alors $u_1 \neq 0_E$, sinon $E = \mathrm{Vect}\left(\{0_E\}\right) = \{0_E\}$, ce qui est contraire à une des hypothèses. Par suite (u_1) est libre. C'est donc une base de E.

— *Hérédité*
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un entier $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Soit $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ une famille génératrice de E, formée de $n+1$ vecteurs.

  — Si $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est libre, alors c'est une base de E et la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est établie.
  — Sinon $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est liée et donc un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. Formellement, il existe $i \in [\![1, n+1]\!]$, tel que $u_i \in \mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_{n+1}\}\right)$. D'après le Lemme **C3.84**, la famille $(u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_{n+1})$, extraite de $(u_1, \ldots, u_{n+1})$, est génératrice de E. Comme elle possède n vecteurs, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ pour conclure.

Q.E.D.

5.2 Théorème de la base incomplète

C3. 86. *Lemme clé pour le théorème de la base incomplète.* — Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, qui est libre. Soit $v \in E$ tel que $v \notin \mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_n\}\right)$. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est libre.

Démonstration. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$(\star) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) + \mu v = 0_E.$$

— Démontrons que $\mu = 0$, en raisonnant par l'absurde. Si $\mu \neq 0$, alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\mu}\right) u_i \in \mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_n\}\right)$, ce qui contredit une des hypothèses.
— Comme $\mu = 0$, l'identité $(\star)$ se réécrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ étant libre, il vient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Q.E.D.

C3. 87. Théorème (Base incomplète). — ***Supposons que E possède une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E. On peut adjoindre à la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ un certain nombre des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ (éventuellement aucun) de manière à ce que la nouvelle famille ainsi obtenue soit une base de E.***

Démonstration. On raisonne par récurrence généralisée finie sur le nombre q de vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ qui n'appartiennent pas au sous-espace vectoriel engendré par la famille libre donnée. Pour tout $q \in [\![0, n]\!]$, notons $\mathcal{P}(q)$ le prédicat suivant :

> si q des vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ n'appartiennent pas au sous-espace vectoriel engendré une famille libre donnée, alors on peut adjoindre à cette famille libre donnée un certain nombre des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ (éventuellement aucun) de manière à ce que la nouvelle famille ainsi obtenue soit une base de E.

— ***Initialisation à*** $q = 0$
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E telle que tous les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ appartiennent à $\operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p\})$ (i.e. telle que $q = 0$). Par minimalité du sous-espace engendré $\operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p\})$, il vient

$$E = \operatorname{Vect}(\{e_1, \ldots, e_n\}) \subset \operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p\}) \subset E.$$

Par suite, $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de E. C'est donc une base de E, puisque cette famille est supposée libre par hypothèse.

— ***Hérédité***
Supposons que $\mathcal{P}(q')$ soit vraie pour tous les entiers $q' \in [\![0, q]\!]$, où $q \in [\![0, n-1]\!]$ est fixé. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E telle que $q+1$ vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ n'appartiennent pas à $\operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p\})$. Quitte à réindexer les vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$, on peut supposer que

$$e_1, \ldots, e_q, e_{q+1} \notin \operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p\}) \qquad \text{et} \qquad e_{q+2}, \ldots, e_n \in \operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p\}).$$

Comme $e_{q+1} \notin \operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p\})$, le Lemme **C3.86** nous livre la liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_p, e_{q+1})$. Nous avons

$$e_{q+1} \in \operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p, e_{q+1}\})$$

et

$$e_{q+2}, \ldots, e_n \in \operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p\}) \subset \operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p, e_{q+1}\}).$$

Par suite le nombre q' de vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ qui n'appartiennent pas à $\operatorname{Vect}(\{u_1, \ldots, u_p, e_{q+1}\})$ est inférieur ou égal à q. On applique alors l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(q')$ à la famille libre $(u_1, \ldots, u_p, e_{q+1})$, obtenue en adjoignant à $(u_1, \ldots, u_p)$ un des vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$, pour conclure.

Q.E.D.

C3. 88. *Remarque.* — Dans la preuve du théorème de la base incomplète, seul le caractère générateur de E de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ nous a été utile. Le résultat est donc encore valide si l'on suppose la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ seulement génératrice de E.

5.3 Cardinaux des familles remarquables et notion de dimension

C3. 89. *Lemme clé sur les cardinaux des familles remarquables.* — Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une famille génératrice de E. Alors $n \leqslant m$.

Démonstration. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, on définit $\mathcal{P}(m)$ comme étant l'assertion :

« $\forall\ (f_1, \ldots, f_m) \in E^m,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall (e_1, \ldots, e_n) \in \operatorname{Vect}(\{f_1, \ldots, f_m\})^n,\ (e_1, \ldots, e_n)$ libre $\Longrightarrow n \leqslant m$ »

On démontre que $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbf{N}^*$.

L'assertion du Lemme **C3.89** en découle, puisque si $(f_1, \ldots, f_m)$ est une famille génératrice de E, alors $\operatorname{Vect}(\{f_1, \ldots, f_m\}) = E$ par définition même.

Remarquons que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$ est équivalente à :

$$\forall\, (f_1, \ldots, f_m) \in E^m, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall\, (e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{Vect}\left(\{f_1, \ldots, f_m\}\right)^n, \qquad n > m \implies (e_1, \ldots, e_n) \text{ liée}$$

par contraposition.

— ***Initialisation à*** $m = 1$
Soit f_1 un vecteur de E, soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{Vect}\left(\{f_1\}\right)^n$. On suppose $n \geqslant 2$. Démontrons que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée. Pour cela, il suffit d'établir que la famille (e_1, e_2) est liée.

Il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ tel que $e_1 = \lambda_1 f_1$ et $e_2 = \lambda_2 f_1$.

. Si $\lambda_1 = 0$, alors $e_1 = 0_E$ et :
$$1.e_1 + 0.e_2 = 0_E$$
. Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $e_2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} e_1$ et :
$$-\lambda_2 e_1 + \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} e_2 = 0_E$$

Dans les deux cas, la famille (e_1, e_2) est liée.

— ***Hérédité***
Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbf{N}^*$ fixé. Soit $(f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}) \in E^{m+1}$, soit $n \in \mathbf{N}^*$ soit $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{Vect}\left(\{f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}\}\right)^n$. On suppose $n > m + 1$. Démontrons que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $(\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,m}, \lambda_{i,m+1}) \in \mathbf{K}^{m+1}$ tel que :

$$e_i = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_{i,j} f_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} f_j}_{\in \mathrm{Vect}(\{f_1, \ldots, f_m\})} + \lambda_{i,m+1} f_{m+1}$$

. Si $\lambda_{1,m+1} = \ldots = \lambda_{n,m+1} = 0$, alors $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{Vect}\left(\{f_1, \ldots, f_m\}\right)^n$. De $n > m + 1 > m$ et de $\mathcal{P}(m)$, on déduit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

. Si au moins un des scalaires $\lambda_{1,m+1}, \ldots, \lambda_{n,m+1}$ est non nul, alors quitte à renuméroter les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ on peut supposer $\lambda_{n,m+1} \neq 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n - 1]\!]$, on pose :

$$e'_i = e_i - \frac{\lambda_{i,m+1}}{\lambda_{n,m+1}} e_n = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} f_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{n,j} \frac{\lambda_{i,m+1}}{\lambda_{n,m+1}} f_j \quad \in \mathrm{Vect}\left(\{f_1, \ldots, f_m\}\right)$$

Alors $\left(e'_1, \ldots, e'_{n-1}\right) \in \mathrm{Vect}\left(\{f_1, \ldots, f_m\}\right)^{n-1}$. De $n - 1 > m$ (qui découle de $n > m + 1$) et de $\mathcal{P}(m)$, on déduit que la famille $\left(e'_1, \ldots, e'_{n-1}\right)$ est liée.

Donc il existe des scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ non tous nuls tels que :

$$0_E = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i e'_i = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i e_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \frac{\lambda_{i,m+1}}{\lambda_{n,m+1}} \right) e_n$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc également liée.

Q.E.D.

C3. 90. Théorème (Cardinal des bases). — *Supposons que E est de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du Lemme 89. Q.E.D.

C3. 91. Définition (Dimension). — *Supposons que E est de dimension finie. Le cardinal commun de toutes les bases de E est appelé dimension de E. On le note* $\dim(E)$.

C3. 92. *Exemple (Dimension de quelques* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels de référence).* — Soient n et p des entiers naturels non nuls.

1. $\dim(\mathbf{K}^n) = n$
2. $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = n + 1$
3. $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})) = np$
4. La dimension de l'espace vectoriel des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

C3. 93. Théorème (Dimension et cardinal de familles remarquables). — *Supposons que E est de dimension finie. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.*

1. *Supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ génératrice de E.*
   (a) *Alors $\dim(E) \leqslant n$.*
   (b) *Si $n = \dim(E)$, alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est de plus libre ; c'est donc une base de E.*
2. *Supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ libre.*
   (a) *Alors $n \leqslant \dim(E)$.*
   (b) *Si $n = \dim(E)$, alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est de plus génératrice de E ; c'est donc une base de E.*

Démonstration.

1. Supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ génératrice de E.
   (a) C'est une conséquence du Lemme **C3.89**.
   (b) Supposons que $n = \dim(E)$. En appliquant le théorème de la base extraite à la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ génératrice de E, il vient qu'il existe une sous-famille de $(u_1, \ldots, u_n)$ qui est une base de E.
   Si cette sous-famille n'est pas la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ elle-même, alors on trouve une base de E qui a un cardinal strictement plus petit que la dimension de E, ce qui contredit l'égalité des cardinaux de toutes les bases de E (Théorème **C3.90**).
   Donc la sous-famille qui est une base de E, obtenue par application du théorème de la base extraite, est la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ elle-même. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est donc une base de E.
2. Supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ libre.

(a) C’est une conséquence du lemme **C3.89**.

(b) Supposons que $n = \dim(E)$. En appliquant le théorème de la base incomplète à $(u_1, \ldots, u_n)$, on obtient une sur-famille de $(u_1, \ldots, u_n)$ qui est une base de E.
Si cette sur-famille n’est pas la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ elle-même, alors on trouve une base de E qui a un cardinal strictement plus grand que la dimension de E, ce qui contredit l’égalité des cardinaux de toutes les bases de E (Théorème **C3.90**).
Donc la sur-famille qui est une base de E, obtenue par le théorème de la base incomplète, est la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ elle-même. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est donc une base de E.

Q.E.D.

5.4 Dimension et sous-espaces vectoriels

C3. 94. Théorème (Dimension et s.e.V.). — *Supposons que E est de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

1. F est de dimension finie ;

2. $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration.

1. Raisonnons par l’absurde. Supposons F n’est pas de dimension finie, i.e. qu’aucune famille finie de vecteurs de F n’engendre F. On va montrer qu’on peut, sous cette hypothèse, construire des familles libres de vecteurs de F, de cardinaux arbitrairement grands.
   — F n’étant pas de dimension finie, il n’est pas réduit à $\{0_E\}$ (en effet (0_E) est une famille génératrice de $\{0_E\}$). Soit donc u_1 un vecteur non nul de F. La famille (u_1) est une famille libre de vecteur(s) de F.
   — Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Supposons construit des vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de F, qui forment une famille libre. Puisque $(u_1, \ldots, u_p)$ n’est pas génératrice de F, il existe $u_{p+1} \in F \setminus \mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_p\}\right)$. Par le lemme 4.84, la famille $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})$ est une famille libre de vecteurs de F.

   Ainsi construit donc, par récurrence, des familles libres de vecteurs de F de cardinaux $p \geqslant 1$ quelconque. En particulier pour $p = \dim(E)+1$. L’espace vectoriel E, de dimension finie $\dim(E)$, contient donc une famille libre de cardinal $\dim(E) + 1$, ce qui contredit l’assertion 2.(a) du Théorème 93.
2. Une base de F est en particulier une famille libre de E. Par le Théorème 93, il vient donc $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Q.E.D.

C3. 95. *Exercice.* — Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Justifier que

$$F_\lambda := \left\{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 \ : \ \lambda x + y + z = 0 \ , \ x + \lambda y + z = 0 \ , \ x + y + \lambda z = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^3$, puis déterminer sa dimension.

C3. 96. *Exercice.* — Justifier que

$$F := \{P \in \mathbf{C}_3[X] \ : \ P(1) = P(-1) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}_3[X]$, puis déterminer sa dimension.

C3. 97. Théorème (Critère d'égalité de deux s.e.v.). — *Supposons que E est de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$.*

1. $\dim(F) \leqslant \dim(G)$.
2. *Si* $\dim(F) = \dim(G)$, *alors* $F = G$.

Démonstration.

1. D'après les hypothèses, F peut-être vu comme un sous-espace vectoriel de G. Alors l'inégalité $\dim(F) \leqslant \dim(G)$ résulte du Théorème **C3.94**.
2. Supposons $\dim(F) = \dim(G) =: d$. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de F. On peut considérer cette famille comme une famille libre de G. Puisqu'elle a le même cardinal que $\dim(G)$ c'est une famille génératrice de G (cf. 2.(b) du Théorème **C3.93**). Or c'est aussi une famille génératrice de F. D'où $F = \mathrm{Vect}\left(\{e_1, \dots, e_d\}\right) = G$.

Q.E.D.

C3. 98. Théorème (Formules de Grassmann). — *Supposons que E est de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. *Si F et G sont en somme directe,* $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
2. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Démonstration.

1. L'assertion résulte du Théorème **C3.62**.
2. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. On a ainsi

$$(\star) \qquad F = (F \cap G) \oplus F'.$$

Prouvons

$$(\star\star) \qquad F' \oplus G = F + G.$$

— *Caractère direct de la somme $F' + G$*
Soit $x \in F' \cap G$. Alors $x \in F' \subset F$ et $x \in G$. Donc $x \in F \cap G$. De $x \in F \cap G$, $x \in F'$ et $(\star)$, on déduit $x = 0_E$. Ainsi $F' \cap G \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est claire.

— *L'inclusion $F' \oplus G \subset F + G$*
Comme $F' \subset F$, $F' \oplus G \subset F + G$.

— *L'inclusion $F + G \subset F' \oplus G$*
Soit $x \in F+G$. Alors il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y+z$. Comme $y \in F = (F \cap G) \oplus F'$, il existe $y' \in F \cap G$ et $y'' \in F'$ tels que $y = y' + y''$. Ainsi :

$$(\star\star\star) \qquad x = y'' + (y' + z).$$

Comme $y' \in F \cap G \subset G$ et $z \in G$, $y' + z \in G$. Donc $(\star\star\star)$ est une écriture de x comme somme d'un élément de F' et d'un élément de G. D'où $x \in F' \oplus G$.

L'identité $(\star\star)$, à présent démontrée, nous livre

$$\dim(F+G) = \dim(F' \oplus G) = \dim(F') + \dim(G)$$

en appliquant 1. Toujours en appliquant 1, nous déduisons de $(\star)$

$$\dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G).$$

En combinant les deux dernières identités sur les dimensions, le résultat tombe.

Q.E.D.

C3. 99. Théorème (Dimension d'une somme directe). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Alors*

$$\dim\left(F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p\right) = \dim\left(F_1\right) + \dim\left(F_2\right) + \ldots + \dim\left(F_p\right).$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du Théorème **C3.62**.

C3. 100. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n tel que $n := \dim(E) \geqslant 3$. Soient H_1, H_2, H_3 trois hyperplans (i.e. trois sous-espaces vectoriels de E possédant une droite vectorielle pour supplémentaire) de E deux-à-deux distincts.

1. Démontrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.
2. Démontrer que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \geqslant n - 3$.
3. A-t-on « en général » $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = n - 3$?

C3. 101. Théorème (Critère pour être supplémentaires en dimension finie). — *Supposons que E est de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si*

$$F \cap G = \{0_E\} \qquad \textit{et} \qquad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$

Démonstration.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que F et G sont supplémentaires dans E, i.e. que $E = F \oplus G$.
Puisque la somme est directe, $F \cap G = \{0_E\}$. Ensuite par la première formule de Grassmann

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F \oplus G) = \dim(E).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
Puisque $F \cap G = \{0_E\}$, la somme $F + G$ est directe. Il reste à vérifier que cette somme égale E. $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E. Ensuite par la première formule de Grassmann

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

et cette dernière somme de nombres entiers vaut $\dim(E)$ par hypothèse. Donc $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension finie que E. Par le théorème **C3.97**, $E = F \oplus G$.

Q.E.D.

6 Applications linéaires

C3. 102. *Notation.* — Dans cette partie, E et F désignent deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

6.1 Notion d'application linéaire

C3. 103. Définition (Application linéaire). — *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si*

$$\forall (u,v) \in E^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2 \qquad f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v).$$

C3. 104. Proposition (Image du vecteur nul par une application linéaire). — *Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.*

C3. 105. Définition ($\mathcal{L}(E,F)$). — *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.*

C3. 106. Théorème (Structure de $\mathbf{K}$-e.v. sur $\mathcal{L}(E,F)$). —

1. *Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$. L'application $f+g$ définie par*

$$f+g \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f(u)+g(u) \end{array} \right.$$

   est linéaire, i.e. $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$.

2. *Soit $(\lambda, f) \in \mathbf{K} \times \mathcal{L}(E,F)$. L'application $\lambda.f$ définie par*

$$\lambda.f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \lambda.f(u) \end{array} \right.$$

   est linéaire, i.e. $\lambda.f \in \mathcal{L}(E,F)$.

3. *L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ muni des lois*

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \end{array} \right. \qquad\qquad . \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ (\lambda,f) & \longmapsto & \lambda.f \end{array} \right.$$

   qui sont bien définies d'après 1. et 2., est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

4. *Le vecteur nul de $\mathcal{L}(E,F)$ est*

$$0_{\mathcal{L}(E,F)} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$$

   et l'opposé d'un vecteur f de $\mathcal{L}(E,F)$ est donné par

$$-f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & -f(u). \end{array} \right.$$

C3. 107. DÉFINITION (ENDOMORPHISME, ISOMORPHISME, AUTOMORPHISME). —

1. *Une application linéaire de E dans E est nommée endomorphisme de E.*
2. *L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$, i.e. $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.*
3. *Une application linéaire et bijective de E dans F est nommée isomorphisme de E vers F.*
4. *Une application qui est à la fois un endormorphisme et un isomorphisme est nommée automorphisme.*

C3. 108. *Exercice.* — Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Démontrer que l'application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est un isomorphisme.

C3. 109. THÉORÈME (IMAGE DIRECTE ET IMAGE RÉCIPROQUE D'UN S.E.V.). — *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *Si H est un sous-espace vectoriel de E, alors*

$$f(H) := \{f(u) \ : \ u \in H\} \qquad [\textit{partie de } F \textit{ formée des images des éléments de } H \textit{ par } f]$$

   est un sous-espace vectoriel de F.
2. *Si H' est un sous-espace vectoriel de F, alors*

$$f^{-1}(H') := \{u \in E \ : \ f(u) \in H'\} \qquad [\textit{partie de } E \textit{ formée des antécédents des éléments de } H' \textit{ par } f]$$

   est un sous-espace vectoriel de E.

6.2 Noyau et image d'une application linéaire

C3. 110. DÉFINITION (NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE). — *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. *Le noyau de f est défini par*

$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E \ : \ f(u) = 0_F\} \qquad [\textit{partie de } E \textit{ formée des antécédents de } 0_F \textit{ par } f].$$

2. *L'image de f est définie par*

$$\mathrm{Im}(f) := f(E) = \{f(u) \ : \ u \in E\} \qquad [\textit{partie de } F \textit{ formée des images des éléments de } E \textit{ par } f].$$

C3. 111. COROLLAIRE (STRUCTURE DU NOYAU ET DE L'IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE). — *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
2. $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. Comme $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F et E est un sous-espace vectoriel de E, les deux assertions résultent du Théorème **C3.109**. Q.E.D.

C3. 112. Proposition (Détermination l'image). — *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E (une base par exemple). Alors :*

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(\{f\,(e_1)\,, \ldots, f\,(e_n)\})\ .$$

C3. 113. Théorème (Critères d'injectivité et de surjectivité. — *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*

1. *f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.*
2. *f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.*

6.3 Applications linéaires et dimension finie

C3. 114. *Exercice (Construction d'applications linéaires).* — Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille quelconque de vecteurs de F. Alors il existe une unique $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \varphi\,(e_i) = f_i\ .$$

C3. 115. Définition (Rang d'une application linéaire dont la source est de dim. finie). — *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*

1. *Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie.*
2. *La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est appelée rang de f et est notée $\mathrm{Rg}\,(f)$. On a donc : $\mathrm{Rg}\,(f) := \dim\,(\mathrm{Im}(f))\,.$*

C3. 116. Théorème (Théorème du rang). — *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{Rg}\,(f) = \dim(E).$$

C3. 117. *Exercice (Image d'une base de la source et propriétés d'une applications linéaires).* — Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Supposons que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Démontrer que f est injective si et seulement si $(f\,(e_1)\,, \ldots, f\,(e_n))$ est une famille libre de F.
2. Démontrer que f est surjective si et seulement si $(f\,(e_1)\,, \ldots, f\,(e_n))$ est une famille génératrice de F.
3. En déduire un critère d'isomorphisme.

C3. 118. Corollaire (Applications linéaires et dimension finie). — *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose E et F de dimension finie.*

1. *Si f est injective, alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.*
2. *Si f est surjective, alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.*
3. *Si f est injective et si $\dim(E) = \dim(F)$ alors f est un isomorphisme.*
4. *Si f est surjective et si $\dim(E) = \dim(F)$ alors f est un isomorphisme.*

7 Matrices d'applications linéaires

7.1 Cordonnées d'un vecteur dans une base

C3. 119. *Notations.* —

- E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, notée n, supposée non nulle.
- $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base de E.
- u désigne un vecteur de E.

C3. 120. Définition (Coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{E}$). — *Puisque $\mathcal{E}$ est génératrice de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que*

$$(\star) \qquad u = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \; .$$

Puisque la famille $\mathcal{E}$ est libre, le n-uplet d'éléments de $\mathbf{K}$ $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant $(\star)$ est unique. On définit la matrice des cordonnées de u dans la base $\mathcal{E}$ comme étant

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

C3. 121. *Exercice.* — Soit $u = (1, 2, 3) \in \mathbf{R}^3$.

1. Déterminer les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. On pose $e'_1 := (0, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 0, 1)$ et $e'_3 = (1, 1, 0)$. Démontrer que la famille $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{E}'$.

7.2 Matrices d'une application linéaire dans des bases

C3. 122. *Notations.* —

- E et F désignent des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, supposées non nulles.
- $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.
- φ désigne une application linéaire de E dans F.

C3. 123. Définition (Matrice d'une application linéaire relativement à des bases). — *La matrice de φ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est la matrice notée*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$$

dont la j-ième ($1 \leqslant j \leqslant n$) colonne est la matrice des cordonnées de $\varphi(e_j) \in F$ dans la base $\mathcal{F}$. Schématiquement, *nous avons la description suivante de* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$.

$$
\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & \varphi(e_n) \end{array} & \\
\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) = & \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} / f_1 \\ / f_2 \\ \vdots \\ / f_p \end{array}
\end{array}
$$

C3. 124. *Remarque.* — Par définition même, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{p} [\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)]_{i,j}\ f_i$.

C3. 125. Proposition (Intérêt de la notion de matrice d'application linéaire). — *La seule connaissance de* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$ *permet de retrouver* φ*, i.e. de calculer* $\varphi(u)$ *pour tout* $u \in E$.

Démonstration. En effet soit $u \in E$ et soit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

la matrice de ses cordonnées dans la base E. Alors :

$$\varphi(u) \quad = \quad \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\ \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\ \sum_{i=1}^{p} [\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)]_{i,j}\ f_i$$

et donc

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\, [\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)]_{i,j}\right) f_i.$$

Le terme de droite se calcule uniquement à l'aide de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ (et de la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{E}$), d'où la preuve de l'assertion. Q.E.D.

C3. 126. *Exercice.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la matrice de l'application linéaire :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

dans les bases canoniques de $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathbf{K}_n[X]$.

C3. 127. Proposition (Calculs d'images par φ grâce à « sa » matrice). — *On a :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$$

Démonstration. L'identité

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right]_{i,j} \right) f_i.$$

obtenue dans la démonstration de la Proposition C3.125 livre une autre information. Les cordonnées de $\varphi(u)$ dans la base $\mathcal{F}$ sont $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right]_{i,j} \right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. Ainsi observe-t-on

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right]_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right]_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right]_{p,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right]_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right]_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)\right]_{p,j} x_j \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u).$$

La dernière identité repose sur la définition du produit matriciel. Nous avons donc établi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)\ .$$

Q.E.D.

7.3 Composée d'applications linéaires versus produit de deux matrices

C3. 128. *Notations.* —

- E, F, G désignent des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
- $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G.
- φ désigne une application linéaire de E dans F et ψ une application linéaire de F dans G.

C3. 129. *Lemme (Rappel sur la j-ième colonne d'une matrice).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $(e_n^1, \dots, e_n^n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Le vecteur $\left(e_n^j\right)^\top$ est le vecteur colonne à n composantes, dont toutes les composantes sont nulles, à l'exception de la j-ième qui vaut 1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Alors :

$$A \times \left(e_n^j\right)^\top = j\text{-ième colonne de } A\ .$$

C3. 130. *Remarque (Formats des matrices en jeu).* — Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K})$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\psi \circ \varphi) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbf{K})$, le produit matriciel $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$ est bien défini et les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\psi \circ \varphi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$ ont même format $q \times n$.

C3. 131. Théorème (Composée d'applications linéaires vs. produit de matrices). — *On a :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi).$$

Démonstration. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Calculons la j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$, notée C_j.

$$\begin{aligned}
C_j &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \times (e_n^j)^\top \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(e_j) \qquad \left[\text{car } \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(e_j) = (e_n^j)^\top\right] \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi(e_j)) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(\psi(\varphi(e_j))) \qquad \text{(cf. proposition 4.125)}
\end{aligned}$$

Or par définition même de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\psi \circ \varphi)$, sa j-ième colonne est formée des cordonnées de $\psi(\varphi(e_j))$ dans la base $\mathcal{G}$, i.e. la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\psi \circ \varphi)$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(\psi(\varphi(e_j)))$.
Les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\psi \circ \varphi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi)$ ont (même format et) mêmes colonnes. Elles sont donc égales, i.e.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi).$$

Q.E.D.

7.4 Application linéaire canoniquement associée une matrice

C3. 132. *Notations.* —

- n et p désignent des entiers naturels non nuls. E, F, G désignent des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
- A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.
- Si $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{B}_n = (e_n^1, \ldots, e_n^n)$ désigne la base canonique de $\mathbf{K}^n$, de sorte que $\mathcal{B}_n^\top := \left((e_n^1)^\top, \ldots, (e_n^n)^\top\right)$ est la base canonique de $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbf{K})$.

C3. 133. Proposition-Définition (Application linéaire canoniquement associée A). — *L'application linéaire canoniquement associée A est*

$$\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{p,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right. .$$

L'application φ_A est bien linéaire et elle est caractérisée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n^\top, \mathcal{B}_p^\top}(\varphi_A) = A\,.$$

C3. 134. *Remarque.* — L'application linéaire canoniquement associée à une matrice va nous permettre d'appliquer la théorie développée pour les applications linéaires pour en déduire des propriétés portant sur les matrices. Un exemple en est donné ci-dessous, cf. Théorème **C3.140**.

C3. 135. DÉFINITION (NOYAU DE A). — *Le noyau de A est par définition de noyau de φ_A, i.e. :*

$$\mathrm{Ker}\,(A) := \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \ : \ AX = 0\}\,.$$

$\mathrm{Ker}\,(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

C3. 136. *Remarque.* — La détermination de $\mathrm{Ker}\,(A)$ conduit souvent à la résolution d'un système linéaire homogène dont A est la matrice des coefficients.

C3. 137. DÉFINITION (IMAGE DE A). — *L'image de A est par définition l'image de φ_A, i.e.*

$$\mathrm{Im}\,(A) = \{AX \ : \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\}\,.$$

$\mathrm{Im}\,(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.

C3. 138. DÉFINITION (RANG DE A). — *Le rang de A est la dimension de* $\mathrm{Im}\,(A)$*, i.e. :*

$$\mathrm{Rg}\,(A) = \dim(\mathrm{Im}\,(A)).$$

C3. 139. PROPOSITION (CALCUL EFFECTIF DU RANG). — *Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrices A. Alors* $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(\{C_1, C_2, \ldots, C_n\})$ *et donc :*

$$\mathrm{Rg}\,(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(\{C_1, C_2, \ldots, C_n\})\right).$$

Démonstration. Comme $\mathcal{B}_n^\top := \left((e_n^1)^\top, \ldots, (e_n^n)^\top\right)$ est une famille génératrice de la source de φ_A :

$$\mathrm{Im}\,(A) := \mathrm{Im}\,(\varphi_A) = \mathrm{Vect}\left(\left\{\varphi_A\left((e_n^1)^\top\right), \ldots, \varphi_A\left((e_n^n)^\top\right)\right\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\left\{A\ (e_n^1)^\top, \ldots, A\ (e_n^n)^\top\right\}\right)$$

D'après le Lemme **C3.129**, $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(\{C_1, C_2, \ldots, C_n\})$. Q.E.D.

C3. 140. THÉORÈME (CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ VIA LE NOYAU). — *Nous supposons ici que $n = p$, i.e. que A est une matrice carrée. Alors*

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \iff \mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}.$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Clairement $0 \in \mathrm{Ker}\,(A)$.

Soit à présent X dans $\mathrm{Ker}\,(A)$. Alors $AX = 0$. En multipliant chaque membre de cette identité à gauche par A^{-1} (qui existe par hypothèse) nous obtenons $X = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons à présent que $\{0\} = \mathrm{Ker}\,(A) := \mathrm{Ker}\,(\varphi_A)$. Alors $\varphi_A \in \mathcal{L}\,(()\,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ est injective. Or un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie qui est injectif est un automorphisme (conséquence du théorème du rang). Donc φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Nous pouvons donc considérer l'application linéaire φ_A^{-1}. Posons $B := \mathrm{Mat}_{B_n^\top, B_n^\top}\left(\varphi_A^{-1}\right)$.
Nous calculons

$$\begin{aligned} AB &= \mathrm{Mat}_{B_n^\top, B_n^\top}(\varphi_A) \times \mathrm{Mat}_{B_n^\top, B_n^\top}\left(\varphi_A^{-1}\right) \\ &= \mathrm{Mat}_{B_n^\top, B_n^\top}\left(\varphi_A \circ \varphi_A^{-1}\right) \\ &= \mathrm{Mat}_{B_n^\top, B_n^\top}\left(\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right) \\ &= I_n \end{aligned}$$

et de même $BA = I_n$. Donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Q.E.D.

7.5 Matrices de passage

C3. 141. *Notations.* —
— E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
— $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E.

C3. 142. Définition (Matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$). — *La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ est la matrice $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont la j-ième colonne est formée des cordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{E}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.*
Schématiquement, nous avons la description suivante de $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} * & * & \ldots & * \\ * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} /\, e_1 \\ /\, e_2 \\ \vdots \\ /\, e_p \end{array} \end{array}$$

On a l'identité fondamentale suivante :

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}\,(\mathrm{id}_E)\ .$$

C3. 143. Proposition (Propriétés d'une matrice de passage). — *La matrice $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ est inversible et :*

$$(P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})^{-1} = P_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}.$$

Démonstration. Nous pouvons aussi considérer la matrice de passage « dans l'autre sens ».

$$P_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\,(\mathrm{id}_E)\,.$$

Nous avons :

$$P_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} \times P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\left(\mathrm{id}_E\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}'}\left(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}'}\left(\mathrm{id}_E\right) = I_n.$$

De même $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \times P_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} = I_n$. Nous en déduisons que $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ est inversible et que $\left(P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}$.
Q.E.D.

C3. 144. Proposition (Changement de base et cordonnées d'un vecteur). — *Soit* $u \in E$. *Posons* $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ *et* $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$. *Alors :*

$$X = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \times X' .$$

Démonstration. Nous calculons

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \times X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}\left(\mathrm{id}_E\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\left(\mathrm{id}_E(u)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\left(u\right).$$

Ainsi $X = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \times X'$. Q.E.D.

7.6 Changement de bases pour les applications linéaires

C3. 145. *Notations.* —
- — E, F désignent deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
- — $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ désignent deux bases de E.
- — $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, \ldots, f'_p)$ désignent deux bases de F.
- — φ désigne une application linéaire de E dans F.

C3. 146. Théorème (Théorème de changement de base pour les applications linéaires). — *On a :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) = P_{\mathcal{F}\to\mathcal{F}'} \ \times\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) \ \times\ \left(P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{-1}$$

ou encore :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\left(\mathrm{id}_F\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\left(\mathrm{id}_E\right).$$

Démonstration. Nous calculons

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\left(\mathrm{id}_F\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\left(\mathrm{id}_F \circ \varphi \circ \mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi).$$

La même identité écrite avec des matrices de passages s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\varphi) = P_{\mathcal{F}\to\mathcal{F}'} \ \times\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(\varphi) \ \times\ \left(P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{-1}.$$

Q.E.D.

C3. 147. *Exemple (Exemple fondamental).* — Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit φ_A l'endomorphisme canonique de $\mathbf{R}^3$ associé.

1. Déterminer tous les $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que $\operatorname{Ker}(\varphi_A - \lambda id_{\mathbf{R}^3}) \neq \{0\}$.
2. Soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les réels trouvés à la question précédente. Démontrer

$$\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker}(\varphi_A - \lambda_1 id_{\mathbf{R}^3}) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi_A - \lambda_2 id_{\mathbf{R}^3}) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi_A - \lambda_3 id_{\mathbf{R}^3}).$$

3. Écrire la matrice D de φ_A dans une base adaptée à la décomposition précédente de $\mathbf{R}^3$.
4. Quel lien existe-t-il entre A et D ?

8 Matrices

8.1 Retour sur la structure de K-espace vectoriel sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

C3. 148. *Notations.* — Les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

C3. 149. Définition (Addition de deux matrices de format $n \times p$). — *Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La matrice $A + B$ est la matrice de format $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$, dont le coefficient d'adresse (i, j) est $a_{i,j} +_{\mathbf{K}} b_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.*

C3. 150. Définition (Multiplication d'une matrice de format $n \times p$ par un scalaire). — *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. La matrice $\lambda.A$ est la matrice de format $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$, dont le coefficient d'adresse (i, j) est $\lambda \times_{\mathbf{K}} a_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.*

C3. 151. Théorème (Structure de K-espace vectoriel sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$). — *L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ munit des opérations*

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & A + B \end{array} \right. \quad \text{et} \quad . \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ (\lambda, A) & \longmapsto & \lambda.A \end{array} \right.$$

est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

C3. 152. Théorème (Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$). — *Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, soit $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'adresse (i, j) qui vaut 1, i.e. :*

$$E_{i,j} = (\delta_{i,k}\ \delta_{j,\ell})_{1 \leqslant k \leqslant n\,,\,1 \leqslant \ell \leqslant p}$$

Alors $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, appelée base canonique.

C3. 153. *Exercice.* — Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Décomposer A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

C3. 154. Corollaire (Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$). — *Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension finie et*

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})) = np \ .$$

8.2 Retour sur le produit matriciel

C3. 155. *Notations.* — Les lettres n, p, q, r désignent des entiers naturels non nuls.

C3. 156. Définition (Produit matriciel. — *Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$.*

1. *Le produit matriciel de A par B est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, i.e. si $p = q$.*
2. *Si le produit matriciel de A par B est défini (donc si $p = q$), alors le produit matriciel de A par B, noté AB, est une matrice de format $n \times r$.*
3. *Si le produit matriciel de A par B est défini (donc si $p = q$), alors le coefficient d'adresse (i, j) de AB est*

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,i} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j} + \ldots + a_{i,p}b_{p,j}.$$

pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, r]\!]$. Autrement dit, nous avons les identités suivantes.

(a) $AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$

(b) $\forall\,(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, r]\!], \qquad [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \times [B]_{k,j}$

C3. 157. Théorème (Propriétés du produit matriciel). —

1. *Associativité*

$$\forall\,(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K}), \qquad (AB)C = A(BC).$$

Les parenthèses n'influant pas sur le résultat, on note plus simplement ABC la matrice $(AB)C = A(BC)$.

2. *Distributivité à gauche*

$$\forall\,(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2, \quad \forall\, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}), \qquad (A + B)C = AC + BC.$$

3. *Distributivité à droite*

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \forall\,(B, C) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})^2, \qquad A(B + C) = AB + AC.$$

4. *Commutativité de la multiplication et de la mutliplication par un scalaire*

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \forall\, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}), \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{K}, \qquad (\lambda.A)B = A(\lambda.B) = \lambda.(AB).$$

C3. 158. *Exemple (Produit de deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).* — Soit $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Soit $(i,j,k,\ell)\in [\![1,n]\!]^4$.

1. Démontrer :
$$E_{i,j}\, E_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, E_{i,\ell}$$
en utilisant uniquement la définition du produit matriciel.
2. Retrouver le résultat de la question 1, en introduisant les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$.

8.3 Matrices carrées

C3. 159. *Notation.* — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

C3. 160. Définition (L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$). — *On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées de format $n\times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. On a donc $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$.*

C3. 161. Définition (Matrice identité). — *On note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, appelée matrice identité, dont tous les coefficients sont nuls, sauf ses coefficients diagonaux, tous égaux à 1. En d'autres termes*
$$[I_n]_{i,j} = \left| \begin{array}{ll} 1 & \textit{si } i=j \\ 0 & \textit{si } i\neq j \end{array}\right.$$
pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$.

C3. 162. Théorème (Caractère neutre pour le produit $\times$ de la matrice identité). —
$$\forall\, A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \qquad AI_p = A \qquad \textit{et} \qquad I_nA = A.$$

C3. 163. Théorème (Structure de $\mathbf{K}$-algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$). — *$(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}),+,\times,.)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre.*

C3. 164. Définition (Puissance d'une matrice carrée). — *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si $s\in\mathbf{N}$, alors on définit A^s par*
$$A^s = \begin{cases} I_n & \textit{si } s=0 \\ \underbrace{A\times A\times A\times\ldots\times A}_{s\ \textit{fois}} & \textit{si } s\geqslant 1. \end{cases}$$

C3. 165. Théorème (Formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent). — *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent, i.e. telles que $AB=BA$. Alors pour tout $s\in\mathbf{N}$, on a*
$$(A+B)^s = \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k} A^k\, B^{s-k} = \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k} A^{s-k}\, B^k.$$

C3. 166. THÉORÈME (FACTORISATION DE LA DIFFÉRENCE DE DEUX PUISSANCES DE MATRICES QUI COMMUTENT). — *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent, i.e. telles que $AB = BA$. Alors pour tout $s \in \mathbf{N}^*$, on a*

$$A^s - B^s = (A - B) \sum_{k=0}^{s-1} A^k \, B^{s-1-k} \,.$$

C3. 167. *Remarque.* — Les deux formules sommatoires des théorèmes **C3.165** et **C3.166** sont valables dans tout anneau, pour deux éléments qui commutent.

8.4 Matrices carrées inversibles

C3. 168. *Notation.* — La lettre n désigne un entier naturel non nul.

C3. 169. DÉFINITION (MATRICE CARRÉE INVERSIBLE). — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. La matrice A est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que*

$$AB = I_n = BA.$$

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

C3. 170. THÉORÈME (INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE INVERSIBLE). — *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible, alors la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $AB = I_n = BA$ est unique. On la nomme matrice inverse de A et on la note A^{-1}.*

C3. 171. *Remarque.* — Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible alors il découle de la définition de la matrice inverse A^{-1} de A :

$$A\,A^{-1} = I_n = A^{-1}\,A.$$

C3. 172. THÉORÈME ($(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$ EST UN GROUPE). —

1. *Pour tout $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^2$, $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$. En particulier, la multiplication sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ induit une loi de composition interne (notée également $\times$) sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.*
2. *$(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$ est un groupe dont le neutre est I_n.*

C3. 173. *Remarque.* —

1. $I_n^{-1} = I_n$.
2. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

C3. 174. THÉORÈME (AFFAIBLISSEMENT DE LA CONDITION D'INVERSIBILITÉ). — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.*
2. *S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.*

8.5 Trace

C3. 175. *Notation.* — lettre n désigne un entier naturel non nul.

C3. 176. Définition (Trace). — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. La trace de A est le scalaire* $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,k}$, *i.e.* $\operatorname{Tr}(A)$ *est la somme des coefficients diagonaux de A.*

C3. 177. Théorème (Propriétés de la trace). —

1. *Linéarité*

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2, \quad \forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2, \qquad \operatorname{Tr}(\lambda_1.A_1 + \lambda_2.A_2) = \lambda_1 \operatorname{Tr}(A_1) + \lambda_2 \operatorname{Tr}(A_2).$$

2. *Trace et produit*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \qquad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$$

C3. 178. Proposition-Définition (Trace d'un endomorphisme). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire*

$$\operatorname{Tr}(f) := \operatorname{Tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$$

est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E. On le nomme trace de f.

8.6 Transposée d'une matrice

C3. 179. *Notations.* — Les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

C3. 180. Définition (Transposée d'une matrice). — *Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La matrice transposée de A est la matrice, notée $A^\top$, de format $p \times n$, à coefficients dans $\mathbf{K}$, définie par*

$$A^\top := (a_{j,i}).$$

En d'autres termes

$$\forall (k, l) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \quad \left[A^\top\right]_{k,l} = [A]_{l,k}.$$

C3. 181. Théorème (Propriétés de la transposition). —

1. *Caractère involutif*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \qquad \left(A^\top\right)^\top = A.$$

2. *Linéarité*

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2, \quad \forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2, \qquad (\lambda_1.A_1 + \lambda_2.A_2)^\top = \lambda_1.A_1^\top + \lambda_2.A_2^\top.$$

3. *Transposition et produit*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}), \qquad (AB)^\top = B^\top \times A^\top$$

4. Transposition, inversibilité et inverse éventuelle

$$\forall\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \qquad A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \quad \textit{et} \quad \left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$$

8.7 Matrices et applications linéaires

C3. 182. *Notations.* —

— E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbf{N}^*$.
— $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.
— F désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.
— $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de F.

C3. 183. Proposition-Définition (Application linéaire associée à une matrice relativement à des bases). — *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'application*

$$\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u \textit{ de coordonnées } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \textit{ dans } \mathcal{E} & \longmapsto & \varphi(u) \textit{ de coordonnées } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \textit{ dans } \mathcal{F} \end{array} \right.$$

est linéaire. On la nomme application linéaire associée à la matrice A relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

C3. 184. *Remarque.* — Dans le cas où $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}_p^\top$, $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_n^\top$, l'application $\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ coïncide avec l'application φ_A définie à la Définition **C3.133**.

C3. 185. Théorème ($\mathrm{Mat}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ vs. $\mathrm{App}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \mathcal{F})$). — *Les applications*

$$\mathrm{Mat}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \end{array} \right.$$

et

$$\mathrm{App}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ A & \longmapsto & \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \end{array} \right.$$

sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre, i.e. ces deux applications sont linéaires et bijectives, et de plus

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{L}(E, F), \quad \mathrm{App}(\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}), \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \varphi$$

et

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \mathrm{Mat}(\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}), \mathcal{E}, \mathcal{F}) = A.$$

C3. 186. Théorème (Théorème sur les liens entre applications linéaires et matrices). —

1. Addition

(a) $\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(E,F)^2, \quad \mathrm{Mat}(\varphi+\psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) + \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$

(b) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^2, \quad \mathrm{App}(A+B, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}) + \mathrm{App}(B, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$

2. Multiplication par un scalaire

(a) $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F), \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \mathrm{Mat}(\lambda\,\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \lambda\,\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$

(b) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \mathrm{App}(\lambda\,A, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \lambda\,\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$

3. Composée d'applications linéaires et produit matriciel
Soit G un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $m \in \mathbf{N}^*$ et soit $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_m)$ une base de G.

(a) $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,F), \quad \forall \psi \in \mathcal{L}(F,G), \quad \mathrm{Mat}(\psi \circ \varphi, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$

(b) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}), \quad \mathrm{App}(B \times A, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \mathrm{App}(B, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \circ \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$

4. Isomorphisme et application inversible
On suppose ici que $p = n$, i.e. que E et F ont même dimension. La matrice $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ est donc carrée.

(a) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$\varphi \text{ isomorphisme} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \text{ inversible.}$$

De plus, si φ est un isomorphisme, on a :

$$\mathrm{Mat}(\varphi^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E}) = (\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}))^{-1}.$$

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On a :

$$A \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \text{ isomorphisme.}$$

De plus, si A est inversible, on a :

$$\mathrm{App}(A^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E}) = (\mathrm{App}(A, \mathcal{E}, \mathcal{F}))^{-1}.$$

8.8 Rang d'une matrice et matrices $J_{n,p}(r)$

C3. 187. *Notation.* —

— E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbf{N}^*$.
— F désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.
— L'entier r désigne un entier naturel.

C3. 188. *Lemme (Invariance du rang par composition avec un automorphisme).* — Soient E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Si ψ est un automorphisme de E, alors $\mathrm{Rg}\,(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Rg}\,(\varphi)$.
2. Si ψ est un automorphisme de F, alors $\mathrm{Rg}\,(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Rg}\,(\varphi)$.

C3. 189. *Lemme (Une application linéaire de rang r peut être représentée par une matrice $J_{n,p}(r)$).* — Soit E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, de dimensions respectives p et n. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$, on note $J_{n,p}(r)$ la matrice de format $n \times p$ décrite par blocs comme suit.

$$J_{n,p}(r) := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe une base $\mathcal{E}$ de E et une base $\mathcal{F}$ de F telle que

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = J_{n,p}\left(\mathrm{Rg}\left(\varphi\right)\right).$$

En particulier, $\mathrm{Rg}\left(\varphi\right) \leqslant \min(n,p)$.

C3. 190. Théorème (Rang d'une matrice et classes d'équivalences des matrices $J_{n,p}(r)$). — *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*. Soit* $r \in \mathbf{N}$.

$$\mathrm{Rg}\left(A\right) = r \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}) \quad A = P\, J_{n,p}(r)\, Q.$$

C3. 191. Théorème (Propriété du rang d'une matrice). —

1. *Majoration du rang*
   Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*,* $\mathrm{Rg}\left(A\right) \leqslant n$ *et* $\mathrm{Rg}\left(A\right) \leqslant p$.
2. *Rang de la transposée*
   Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*,* $\mathrm{Rg}\left(A\right) = \mathrm{Rg}\left(A^\top\right)$.
3. *Critère d'inversibilité pour une matrice carrée*
   Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*,* A *est inversible si et seulement si* $\mathrm{Rg}\left(A\right) = n$.

9 Une sélection d'exercices

9.1 Sous-espaces vectoriels

C3. 192. *Exercice.* — Soit $(E,+,.)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in E$. Démontrer

$$\lambda.x = 0_E \quad \Longrightarrow \quad (\lambda = 0_{\mathbf{K}} \text{ ou } x = 0_E).$$

C3. 193. *Exercice.* —

1. L'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x+y+z=1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?
2. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y = x^2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$?

C3. 194. *Exercice.* — Démontrer que les ensembles

$$\mathcal{S}_c = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \ : \ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge } \} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_0 = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \ : \ u_n \longrightarrow 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

C3. 195. *Exercice.* — Démontrer que $\{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ P(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

C3. 196. *Exercice.* — Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

(A) $F_1 := \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1\right\}$

(B) $F_2 := \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ : \ (u_n) \ \text{ est bornée}\right\}$

(C) $F_3 := \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ : \ (u_n^2) \ \text{ converge }\right\}$

C3. 197. *Exercice.* — Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

(A) $F_1 := \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ : \ f \text{ est } 2\pi - \text{périodique}\right\}$

(B) $F_2 := \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ : \ f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 1\right\}$

(C) $F_3 := \left\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \ : \ f \text{ est non bornée }\right\}$

C3. 198. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel non trivial de E. Démontrer que $F^c \cup \{0_E\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

9.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

C3. 199. *Exercice.* — Soit $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

C3. 200. *Exercice.* — Soit $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soient F, G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

C3. 201. *Exercice.* — L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Si F, G, H sont trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E tels que $F + G = F + H$, alors $G = H$.

C3. 202. *Exercice.* — Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Justifier : $F \subset G \Longleftrightarrow F + G = G$.
2. Démontrer : $F \cap G = F + G \Longrightarrow F = G$.

C3. 203. *Exercice.* — Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

A-t-on nécessairement égalité ?

9.3 Familles remarquables

C3. 204. *Exercice.* — Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ sont elles libres ? génératrices ?

1. $\mathcal{E} := (e_1, e_2, e_3)$, où $e_1 = (1, 0, 1),\ e_2 = (1, 1, 1),\ e_3 = (1, 0, 0)$
2. $\mathcal{F} := (f_1, f_2, f_3)$, où $f_1 = (1, 1, 0),\ f_2 = (1, 0, 1),\ f_3 = (2, 0, 1)$
3. $\mathcal{G} := (g_1, g_2, g_3, g_4)$, où $g_1 = (-1, 0, 1),\ g_2 = (1, -1, 1),\ g_3 = (1, 0, 0),\ g_4 = (2, 3, 4)$

C3. 205. *Exercice.* — Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Posons

$$f_1 := e_1 \quad , \quad f_2 := e_1 + e_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad f_n := e_1 + \ldots + e_n.$$

La famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est-elle libre ?

C3. 206. *Exercice.* — Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Posons

$$f_1 := e_1 + e_2 \quad , \quad f_2 := e_2 + e_3 \quad , \quad \ldots \quad , \quad f_{n-1} := e_{n-1} + e_n \quad , \quad f_n := e_n + e_1.$$

A quelle condition la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est-elle libre ?

C3. 207. *Exercice.* — Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E.

1. Démontrer que si f est injective, alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.
2. La réciproque est-elle vraie ?

C3. 208. *Exercice.* — Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe p vecteurs non nuls $x_1, \ldots, x_p$ et p scalaires deux-à-deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(x_i) = \lambda_i x_i$. Démontrer que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

C3. 209. *Exercice.* — Pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne :

$$E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{\ell,j})_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n}.$$

Démontrer que $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

C3. 210. *Exercice (CCINP).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Démontrer que $\mathcal{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Soit $D \in \mathcal{D}_n$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont deux-à-deux distincts. Démontrer que la famille $(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{D}_n$.

C3. 211. *Exercice.* — Posons $P_0 := 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n := \prod_{i=0}^{n-1}(X-i)$. Démontrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$.

C3. 212. *Exercice.* — Soit $n \in \mathbf{N}$, soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré n et soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des complexes distincts. On définit

$$P_k = P(X + x_k)$$

pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Prouver que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

C3. 213. *Exercice.* — Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux-à-deux distincts. Posons

$$e_k \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{a_k}. \end{array} \right.$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est-elle libre ?

C3. 214. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, notons e_n et c_n les fonctions définies par

$$\left| \begin{array}{cccc} e_n & : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & & x & \longmapsto & e^{inx} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{cccc} c_n & : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos(nx). \end{array} \right.$$

Démontrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est libre dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, puis que la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

C3. 215. *Exercice.* — Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons f_k la fonction définie par

$$\left| \begin{array}{ccccc} f_k & : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos^k(x). \end{array} \right.$$

La famille $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$? Qu'en déduire pour le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

C3. 216. *Exercice (X).* — Notons $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que la famille $(\ln(p_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

C3. 217. *Exercice (CCINP).* — Pour tout $a \in \mathbf{R}$, notons f_a la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x-a|\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

C3. 218. *Exercice.* — Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. On suppose α transcendant, i.e. que pour tout polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$, $P \neq 0 \Longrightarrow P(\alpha) \neq 0$. Démontrer que la famille $(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.
2. On ne suppose plus α transcendant, mais on suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\alpha^k \in \mathbf{Q}$. Posons
$$n := \min\left\{k \in \mathbf{N}^* \ : \ \alpha^k \in \mathbf{Q}\right\}.$$
Montrer que la famille $(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$ est libre dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

9.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

C3. 219. *Exercice.* — Déterminer une base et un supplémentaire dans E des sous-espaces vectoriels suivants.

1. $F_1 := \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x + y + z + t = 0\}$, $E = \mathbf{R}^4$
2. $F_2 := \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ \left\{\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array}\right.\right\}$, $E = \mathbf{R}^4$
3. $F_3 := \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ \left\{\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \\ x+t=0 \end{array}\right.\right\}$, $E = \mathbf{R}^4$

C3. 220. *Exercice.* — Soient $E_1 = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2\}$ avec $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1, 0)$, $w_1 = (0, 6, -1, 4)$ et $w_2 = (3, 3, 1, 5)$.

1. Caractériser $E_1 \cap E_2$.
2. Donner une base de $E_1 + E_2$.
3. Définir un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

C3. 221. *Exercice.* — Notons P (respectivement I) l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ paires (respectivement impaires). Démontrer que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = P \oplus I$.

C3. 222. *Exercice.* — Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non constant. Soit

$$F = A\mathbf{K}[X] := \{AP \ : \ P \in K[X]\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{K}[X]$.

C3. 223. *Exercice.* — Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels deux-à-deux distincts.

1. Démontrer que

$$F := \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \ : \ f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n) = 0\}$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2. Donner un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

C3. 224. *Exercice (X).* — On suppose E de dimension finie.

1. Soit $p \in \mathbf{N}^*$, soient p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ tous distincts de E. Montrer que $E \neq F_1 \cup \ldots \cup F_p$.
2. Supposons les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de même dimension. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

9.5 Sommes directes

C3. 225. *Exercice.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ notons

$$F_k := \{P \in \mathbf{R}_n[X] \ : \ \forall \ell \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}, \ P(\ell) = 0\}.$$

Démontrer que $\mathbf{R}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{n} F_k$.

C3. 226. *Exercice.* — Soient $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ deux familles de sous-espaces vectoriels tels que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \qquad E_i \subset F_i \qquad \text{et} \qquad \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = F_i$.

C3. 227. *Exercice.* — Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels.

1. Démontrer que
$$f\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i).$$
2. Supposons que f est injective et que $\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Démontrer que
$$\sum_{i=1}^{n} f(E_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} f(E_i).$$

C3. 228. *Exercice.* — Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe p sous-espaces vectoriels non triviaux $E_1, \ldots, E_p$ et p scalaires deux-à-deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que
$$\forall\, i \in [\![1, p]\!] \quad \forall\, x \in E_i \qquad f(x) = \lambda_i x.$$
Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

C3. 229. *Exercice.* — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p \in \mathbf{N}^*$.

1. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k tel que
$$\operatorname{Ker}\left(u^k\right) = \operatorname{Ker}\left(u^{k-1}\right) \,\oplus\, F_k.$$
2. Démontrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.
3. Démontrer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe de la question 2 est triangulaire supérieure. Que valent les coefficients diagonaux ?

C3. 230. *Exercice (CCINP).* — Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels tels que
$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \qquad \text{et} \qquad F' \subset G.$$
Démontrer que $F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$.

9.6 Sous-espaces vectoriels engendrés

C3. 231. *Exercice.* — Caractériser les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants à l'aide d'une équation cartésienne et déterminer une base de chacun d'entre eux.

(A) $F_1 := \mathrm{Vect}\left(\{(1,1,1,1)\}\right)$
(B) $F_2 := \mathrm{Vect}\left(\{(1,1,1,1),(1,1,1,-1)\}\right)$
(C) $F_3 := \mathrm{Vect}\left(\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,0,0,1)\}\right)$

C3. 232. *Exercice.* — Soient A et B deux parties d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Démontrer

$$\mathrm{Vect}\,(A) + \mathrm{Vect}\,(B) = \mathrm{Vect}\,(A \cup B)$$

et en déduire une nouvelle démonstration d'un résultat du cours.

9.7 Dimension finie

C3. 233. *Exercice.* — Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :

(A) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x+y+z+t=0\}$
(B) $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x+y+z+t = x-y+2z-3t = 0\}$

C3. 234. *Exercice.* — $\mathbf{C}$ est-il un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 ?

C3. 235. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Démontrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $2n$.

C3. 236. *Exercice.* — Démontrer que $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

C3. 237. *Exercice.* — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriel de même dimension. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun, i.e. qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que

$$F \oplus H = E = G \oplus H.$$

C3. 238. *Exercice (ENS).* — Supposons E de dimension finie n. Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Posons

$$E^G := \{x \in E \ : \ \forall g \in G,\ g(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes par tous les éléments de G. Montrer que :

$$\dim(E^G) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}\left(()\, g\right).$$

9.8 Applications linéaires

C3. 239. *Exercice.* — Dans chacun des cas suivants, dire si l'application est linéaire. Si c'est le cas, déterminer une base de son image et de son noyau.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+1,y) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2,y) \end{array} \right.$$

$$f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+|y| \end{array} \right. \qquad f_4 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+2y, 2x+y) \end{array} \right.$$

$$f_5 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z, y-z) \end{array} \right.$$

C3. 240. *Exercice.* — Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P'(t)P(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

$$f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

C3. 241. *Exercice.* — Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et H_1, H_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer

$$f\left(H_1 + H_2\right) = f\left(H_1\right) + f\left(H_2\right).$$

C3. 242. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ soit liée. Démontrer que f est une homothétie, i.e. qu'il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda\,\mathrm{id}_E$.

C3. 243. *Exercice (CCINP).* — Supposons E de dimension finie n, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Démontrer que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la famille $(e_1 + e_i, e_2, e_3, \dots, e_n)$ est une base de E.
2. Déterminer les endomorphismes de E dont la matrice est diagonale dans toute base de E.

C3. 244. *Exercice.* — Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et m, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, soit $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F.

1. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $u_{i,j} \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que
$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad u_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k}\, f_j.$$
2. Démontrer que la famille $(u_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathcal{L}(E, F)$. Qu'en déduire pour $\mathcal{L}(E, F)$?

C3. 245. *Exercice.* — On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & E_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & E_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & E_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & E_5 \arrow[d, "h_5"] \\
F_1 \arrow[r, "g_1"] & F_2 \arrow[r, "g_2"] & F_3 \arrow[r, "g_3"] & F_4 \arrow[r, "g_4"] & F_5
\end{tikzcd}$$

formé de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et d'applications linéaires. On suppose que le diagramme est commutatif, i.e.

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1 \quad ; \quad h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2 \quad ; \quad h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3 \quad ; \quad h_5 \circ f_4 = g_4 \circ h_4$$

et que les deux lignes sont exactes, i.e.

$$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Im}(f_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Im}(f_3)$$

$$\mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(g_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_3) = \mathrm{Im}(g_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_4) = \mathrm{Im}(g_3).$$

Montrer que :
$$h_1, h_2, h_4, h_5 \text{ isomorphismes} \quad \Longrightarrow \quad h_3 \text{ isomorphisme.}$$

C3. 246. *Exercice (CCINP).* — Supposons E de dimension finie n sur $\mathbf{R}$.

1. Préciser l'élément neutre de $\mathcal{L}(E)$ pour la loi $\circ$, et l'élément neutre de $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ pour la loi $\times$.
2. Étant donnée une base $\mathcal{B}$ de E, notons $\varphi : u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
   (a) Démontrer que φ est un isomorphisme d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Démontrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^p$.

9.9 Formes linéaires et hyperplans

C3. 247. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On rappelle que le dual de E est $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$. Les élements du dual de E sont donc les formes linéaires sur E.
Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$. Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $E = \mathrm{Ker}\,(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}\,(a)$.

C3. 248. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E. Démontrer que φ et ψ sont colinéaires si et seulement si elles ont même noyau.
2. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ et ψ des formes linéaires sur E. Démontrer

$$\psi \in \mathrm{Vect}\,(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\,(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}\,(\psi)\,.$$

C3. 249. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Démontrer que F peut s'obtenir comme une intersection finie d'hyperplans. Quel est le nombre minimal d'hyperplans nécessaire pour obtenir F ?

C3. 250. *Exercice.* — Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E admettant un supplémentaire commun.

1. Démontrer qu'ils sont isomorphes.
2. Réciproquement, deux sous-espaces vectoriels isomorphes ont-ils nécessairement un supplémentaire commun ?

C3. 251. *Exercice.* — Soient $a_0, \dots, a_n$ des scalaires deux-à-deux distincts. Notons $f_0, \dots, f_n$ les formes linéaires sur $\mathbf{K}_n[X]$ définies par

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X] \qquad f_i(P) = P(a_i).$$

Démontrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]^*$ et trouver sa base antéduale.

C3. 252. *Exercice.* — Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts. Démontrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \qquad \int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(a_k\right).$$

9.10 Projecteurs et symétries

C3. 253. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit p un projecteur de E (i.e. un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$).

1. Démontrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.
2. Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$, f est-il un projecteur de E ?

C3. 254. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit s une symétrie de E (i.e. un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$).

1. Démontrer que $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
2. Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, u est-il une symétrie de E ?

C3. 255. *Exercice (CCINP).* — Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection de $\mathbf{R}^3$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$x = \frac{1}{2} y = \frac{1}{3} z.$$

C3. 256. *Exercice (CCINP).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soient $A, B, M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$, soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}^*$ tels que $\lambda \neq \mu$ et

(a) $I_n = A + B$
(b) $M = \lambda A + \mu B$
(c) $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Calculer $M^2 - (\lambda + \mu) M + \lambda \mu I_n$. En déduire que M est inversible, puis exprimer M^{-1}.
2. Démontrer que A et B sont des projecteurs.

9.11 Polynômes annulateurs

C3. 257. *Exercice.* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 4u + 3\,\mathrm{id}_E = 0$.

1. Démontrer que u est inversible est exprimer u^{-1} en fonction de u.
2. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - 3\,\mathrm{id}_E)$.

C3. 258. *Exercice.* — Soient E un $\mathbf{R}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 = -\,\mathrm{id}_E$.

1. Démontrer que pour tout vecteur a non nul, la famille $(a, f(a))$ est libre.
2. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ et p vecteurs $a_1, \ldots, a_p$ tels que
$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}\,(\{a_i, f(a_i)\}) \ .$$
3. Démontrer que E est de dimension paire et trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est « simple ».

9.12 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

C3. 259. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p, i.e. que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ soit libre.
2. Si maintenant on suppose E de dimension finie, comparer l'indice de nilpotence p de f et de la dimension de f.

C3. 260. *Exercice.* — Soit A une matrice nilpotente d'indice p, i.e. telle que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

C3. 261. *Exercice (ENS).* — Supposons E de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Soient n endomorphismes nilpotents $u_1, \ldots, u_n$ de E commutant deux-à-deux. Montrer que $u_1 \circ \ldots \circ u_n = 0$.

9.13 Rang d'un endomorphisme ou d'une matrice

C3. 262. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. L'identité $\mathrm{Rg}\,(f \circ g) = \mathrm{Rg}\,(g \circ f)$ est-elle nécessairement vraie ?

C3. 263. *Exercice (CCINP).* — Supposons E de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que

$$|\mathrm{Rg}\,(u) - \mathrm{Rg}\,(v)| \leqslant \mathrm{Rg}\,(u+v) \leqslant \mathrm{Rg}\,(u) + \mathrm{Rg}\,(v)\,.$$

C3. 264. *Exercice.* — Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Déterminer le rang de f.

C3. 265. *Exercice.* — Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

C3. 266. *Exercice.* — Une matrice de rang r est-elle nécessairement semblable à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

C3. 267. *Exercice.* — Soient $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^2$ vérifiant $B = PAQ$. Notons $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $B = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B})$?

C3. 268. *Exercice.* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^2 = A$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que A soit semblable à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C3. 269. *Exercice (CCINP).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Comparer le rang de A et le rang de sa comatrice.

C3. 270. *Exercice (X).* — Supposons E de dimension finie n et considérons un deuxième $\mathbf{K}$-espace vectoriel F de dimension finie m. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\mathrm{Rg}\,(g) \leqslant \mathrm{Rg}\,(f)$ si et seulement s'il existe $h \in \mathrm{GL}(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$.

9.14 Sous-espaces stables

C3. 271. *Exercice.* — Ici, $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$. Soit

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par D.

9.15 Noyau et image

C3. 272. *Exercice.* — Démontrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leur noyau et leur image. On donnera une base et une équation cartésienne.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+2y, 2x+y) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x+y, x+3y) \end{array} \right.$$

$$f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z) \end{array} \right. \qquad f_4 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z) \end{array} \right.$$

$$f_5 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z, y-z) \end{array} \right. \qquad f_6 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, x+z, y-2z) \end{array} \right.$$

C3. 273. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ tel que

$$P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k . u^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \qquad \text{et} \qquad P'(0) \neq 0.$$

Démontrer que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont en somme directe.

C3. 274. *Exercice.* —

1. Donner un exemple d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et d'un endomorphisme f de E, qui est non injectif, surjectif.
2. Donner un exemple d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et d'un endomorphisme f de E, qui est injectif, non surjectif.
3. Donner un exemple d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et d'un endomorphisme f de E dont le noyau et l'image ne sont pas en somme directe.

C3. 275. *Exercice.* — Supposons E de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ et considérons deux endomorphismes f, g de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Démontrer les identités suivantes.

1. $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \ker f$
2. $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g)$
3. $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(g)$

C3. 276. *Exercice (CCINP).* — Soit $(f, g) \in \mathcal{L}\,(E)^2$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$ (on ne suppose pas nécessairement E de dimension finie).

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Démontrer que $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g)$.
3. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(g)$.

C3. 277. *Exercice (X).* — Supposons E de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}\,(E)$.

1. Montrer que les suites $\left(\mathrm{Ker}\,\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}\,\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ sont d'abord strictement monotones pour l'inclusion, puis constantes à partir d'un certain rang $p \leqslant n$.
2. Montrer que la suite $\left(\dim \mathrm{Ker}\,\left(u^{k+1}\right) - \dim \mathrm{Ker}\,\left(u^k\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u^p) \oplus \mathrm{Im}\,(u^p)$.
4. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où N est une matrice carrée nilpotente et A une matrice carrée inversible.

9.16 Produit matriciel

C3. 278. *Exercice.* — Soit $(A, B) \in \mathcal{T}_n(\mathbf{K})^2$, où $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ qui sont triangulaires supérieures. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $[AB]_{i,i} = [A]_{i,i} \times [B]_{i,i}$.

C3. 279. *Exercice.* — Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, Déterminer $C_{i,j} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ : \ AE_{i,j} = E_{i,j}A\}$. En déduire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

9.17 Inversibilité et inverse éventuelle d'un endomorphisme ou d'une matrice

C3. 280. *Exercice.* — Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 14 & 7 & -4 \\ 7 & -21 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer son inverse le cas échéant.

C3. 281. *Exercice.* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que A est inversible si et seulement si pour toute matrice colonne $X \in \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nulle, $AX \neq 0$.

C3. 282. *Exercice.* — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonalement dominante, i.e. telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \, .$$

Démontrer que A est inversible.

C3. 283. *Exercice (X).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que $f\left(I_n\right) = 1$ et

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \qquad f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(A) \neq 0$ si et seulement si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

9.18 Puissances d'un endomorphisme ou d'une matrice

C3. 284. *Exercice.* — Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, non nul, tel que $f^3 + f = 0$.

1. Prouver que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.
2. Justifier que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1$.
3. Prouver qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Prouver qu'il existe un endomorphisme f_n de $\mathbf{R}^3$ tel que $\left(f_n\right)^n = f$.

C3. 285. *Exercice (CCINP).* — Pour tout couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, notons $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et posons

$$F := \left\{ M(a, b), \ (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ?
2. Posons

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & M\left(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\right). \end{array} \right.$$

   (a) Démontrer que φ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres.
   (b) Pour tout couple $(a, b) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})^2$ et tout entier naturel n, calculer $M(a, b)^n$.

C3. 286. *Exercice.* — Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

9.19 Trace

C3. 287. *Exercice.* — Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2, \quad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

C3. 288. *Exercice (CCINP).* — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Résoudre, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'équation $X = \operatorname{Tr}(X)\, A + B$.

C3. 289. *Exercice (X).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de trace nulle.

1. Montrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.
2. Montrer qu'il existe deux matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A = BC - CB$.

C3. 290. *Exercice (CCINP).* — Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, notons f_A la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \qquad f_A(M) = \operatorname{Tr}(AM).$$

1. Démontrer que l'application

$$\iota \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^* \\ A & \longmapsto & f_A \end{array} \right.$$

   est linéaire et injective.
2. Démontrer que pour tout forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\varphi = f_A$.
3. Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ telle que

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \qquad \varphi(MN) = \varphi(NM).$$

   Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Tr}$.

9.20 Transposée

C3. 291. *Exercice.* — Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $AB^\top = B^\top\, A^\top$.

9.21 Matrices à coefficients dans $\mathbf{Z}$

C3. 292. *Exercice (CCINP).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ (les coefficients de A et B sont des entiers relatifs).

1. Démontrer que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont des entiers relatifs.
2. Supposons $\det(A)$ et $\det(B)$ premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ telles que $UA + VB = I_n$.

C3. 293. *Exercice (CCINP).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$. Supposons A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\}$.