M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Chapitre 8
Réduction des endomorphismes et des matrices

David BLOTTIÈRE

Table des matières

1 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrices carrée

1.1 Définition des éléments propres d'un endomorphisme

C8. 1. Définition (Valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathbf{K}$.*

1. *Le scalaire λ est une valeur propre de u si :*

$$\exists\, x \in E \setminus \{0_E\} \quad u(x) = \lambda.x.$$

2. *Si λ est une valeur propre de u, alors tout vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ vérifiant $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

C8. 2. *Remarque (Des vecteurs propres).* —

1. Le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre.
2. Un vecteur propre n'est jamais unique. En effet soit λ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors tout vecteur $y := k.x$, avec $k \in \mathbf{K}^*$, est vecteur propre associé à la valeur propre λ.

C8. 3. *Exercice (Existence d'une valeur propre vs. existence d'une droite stable).* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que s'il existe une droite vectorielle D de E stable par u, alors u possède une valeur propre.
2. Étudier la réciproque.

C8. 4. Proposition (Critère pour être valeur propre via l'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :*

$$\lambda \text{ est valeur propre de } u \qquad \Longleftrightarrow \qquad u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ n'est pas injectif.}$$

C8. 5. Définition (Spectre d'un endomorphisme). — *Le spectre de $u \in \mathcal{L}(E)$, noté $\mathrm{Spec}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.*

C8. 6. Définition (Sous-espace propre associé à une valeur propre). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, noté $E_\lambda(u)$, est défini par :*

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &:= \{x \in E \;:\; u(x) = \lambda x\} \\ &= \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)\,. \end{aligned}$$

C8. 7. *Remarque (Des espaces propres).* —

1. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet, $E_\lambda(u)$ est le noyau d'un endomorphisme de E.
2. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.
3. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ n'est jamais réduit au singleton vecteur nul. Par conséquent, si $E_\lambda(u)$ est de dimension finie, alors :
$$\dim\left(E_\lambda(u)\right) \geq 1.$$

C8. 8. *Exercice (Condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit valeur propre).* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit valeur propre de u.
2. Supposons $0 \in \operatorname{Spec}(u)$. Reconnaître le sous-espace propre $E_0(u)$.

1.2 Détermination des éléments propres d'endomorphismes usuels

C8. 9. *Exercice (Éléments propres d'une homothétie).* — Soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. On pose $u := \lambda\,\mathrm{id}_E$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

C8. 10. *Exercice (Éléments propres d'un endomorphisme nilpotent est $\{0_{\mathbf{K}}\}$).* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, i.e. qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

C8. 11. *Exercice (Éléments propres de l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$).* — Déterminer les éléments propres de :
$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array} \right.$$

C8. 12. *Exercice (Éléments propres de l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$).* — Déterminer les éléments propres de :
$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f'. \end{array} \right.$$

1.3 Définition des éléments propres d'une matrice carrée

C8. 13. Définition (Éléments propres d'une matrice carrée). — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *Un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est appelé valeur propre de M si :*

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}, \qquad MX = \lambda X.$$

2. *Si λ est valeur propre de M, alors tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}$ vérifiant $MX = \lambda X$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
3. *L'ensemble des valeurs propres de M dans $\mathbf{K}$ est appelé spectre de M et est noté $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$.*
4. *Si $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de M, le sous-espace vectoriel :*

$$\begin{array}{rcl} E_\lambda(M) & := & \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \;:\; MX = \lambda X\} \\ & = & \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n)\,. \end{array}$$

est appelé sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.

C8. 14. *Remarque (Extension du corps des scalaires pour le spectre d'une matrice carrée).* — Quand on parle du spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, il convient de préciser le corps dans lequel on travaille.
En effet, si $\mathbf{L}$ est un sur-corps de $\mathbf{K}$, alors on peut également considérer M comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{L})$. On peut donc considérer les deux ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M) & := & \left\{\lambda \in \mathbf{K} \;:\; \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}, \quad MX = \lambda X\right\} \\ \mathrm{Spec}_{\mathbf{L}}(M) & := & \left\{\lambda \in \mathbf{L} \;:\; \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{L}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{L})}\right\}, \quad MX = \lambda X\right\}. \end{array}$$

Clairement

$$\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M) \subset \mathrm{Spec}_{\mathbf{L}}(M)$$

mais il n'y a pas nécessairement égalité (cf. exercice suivant). C'est pourquoi, comme ci-dessus, on précisera le corps des scalaires considéré, en l'indiquant en indice du symbole Spec.

C8. 15. *Exercice.* — Calculer $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(M)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(M)$, où $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4 Les sous-espaces propres sont en somme directe

C8. 16. Théorème (Les sous-espaces propres sont en somme directe). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit r un nombre entier supérieur ou égal à 2, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres deux-à-deux distinctes de u. Alors les $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$ sont en somme directe, i.e. :*

$$\sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}.$$

C8. 17. *Remarque (Nombre maximal de valeurs propres deux-à-deux distinctes en dimension finie).* —

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit r un nombre entier supérieur ou égal à 2, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres deux-à-deux distinctes de u, soit $x_1 \in E_{\lambda_1} \setminus \{0_E\}, \ldots, x_r \in E_{\lambda_r} \setminus \{0_E\}$. Alors la famille $(x_1, \ldots, x_r)$ est libre.
2. En particulier, si E est de dimension finie n, alors u possède au plus n valeurs propres deux-à-deux distinctes.

1.5 Éléments propres d'un endomorphisme vs. éléments propres d'une matrice

C8. 18. Proposition (Éléments propres d'un endomorphisme versus éléments propres d'une matrice). — *Supposons ici E de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M := \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.*

1. $\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$
2. *Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$. Alors :*

$$\forall\, x \in E \quad x \in E_\lambda(u) \Longleftrightarrow \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in E_\lambda(M).$$

C8. 19. *Remarque.* — D'après la précédente proposition, les éléments propres d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ coïncide avec les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$:

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ M & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

qui lui est canoniquement associé.

2 Sous-espaces stables

2.1 Motivation pour l'étude des sous-espaces stables

C8. 20. *Remarque (Faire apparaître des zéros dans une matrice représentant un endormorphisme).* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe F est un sous-espace vectoriel non trivial de E qui est stable par u. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, que l'on complète en une base $\widehat{\mathcal{B}} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Alors la matrice de u dans la base $\widehat{\mathcal{B}}$ aura la description par blocs suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\widehat{\mathcal{B}}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_F) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

où u_F est l'endomorphisme induit par u sur F. Prenons comme *définition grossière* de la réduction d'un endormorphisme, la détermination de bases de l'espace dans lesquelles la matrice de l'endormorphisme contient autant de 0 que faire ce peut. Alors la recherche de sous-espaces stables présente un intérêt certain dans l'étude de la réduction d'un endomorphisme.

C8. 21. *Exercice (Un endomorphisme stabilisant toute droite est une homothétie).* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ stabilisant toute droite de E.

1. Démontrer : pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
2. Soient x, y deux vecteurs liés de $E \setminus \{0_E\}$. Démontrer : $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Soient x, y deux vecteurs libres de $E \setminus \{0_E\}$. En considérant le vecteur $x + y$, démontrer : $\lambda_x = \lambda_y$.
4. En déduire que u est une homothétie.

C8. 22. *Exercice (Sous-espaces stables d'une rotation plane).* — Soit $\theta \in [0\,;2\pi[$. Soit $r_\theta \in \mathcal{L}(()\,\mathbf{R}^2)$ défini par :

$$r_\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\ \cos(\theta)x - \sin(\theta)y\ ,\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y\ )\,. \end{array} \right.$$

1. Interpréter r_θ géométriquement.
2. On suppose ici que θ n'est ni égal à 0, ni égal à π.
   (a) Soit (x_0, y_0) un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$. Démontrer que $r_\theta(x_0, y_0) \notin \mathrm{Vect}\,(()\,(x_0, y_0))$.
   (b) En déduire que les sous-espaces de $\mathbf{R}^2$ stables par r_θ sont $\mathbf{R}^2$ lui-même et $\{(0,0)\}$.
3. On suppose à présent que $\theta = 0$. Expliciter r_θ dans ce cas, puis indiquer les sous-espaces stables de r_θ.
4. On suppose à présent que $\theta = \pi$. Expliciter r_θ dans ce cas, puis indiquer les sous-espaces stables de r_θ.

2.2 Stabilité d'un sous-espace propre et endormorphisme induit

C8. 23. Proposition (Stabilité d'un sous-espace propre et endomorphisme induit sur un sous-espace propre). — *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Soit* $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$.

1. *Le sous-espace propre* $E_\lambda(u)$ *est stable par* u.
2. *L'endomorphisme induit par* u *sur* $E_\lambda(u)$ *:*

$$u_{E_\lambda(u)} \left| \begin{array}{ccc} E_\lambda(u) & \longrightarrow & E_\lambda(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

   est l'homothétie de $E_\lambda(u)$*, de rapport* λ*, i.e. :* $u_{E_\lambda(u)} = \lambda\,\mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$.

3. *En particulier, si* $E_\lambda(u)$ *est de dimension finie et si* $\mathcal{B}$ *est une base de* $E_\lambda(u)$*, alors :*

$$\mathit{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u_{E_\lambda(u)}\right) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

C8. 24. Proposition (Éléments propres d'un endomorphisme induit). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel stable par u. On rappelle que l'endomorphisme induit par u sur F est :*

$$u_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) . \end{array} \right.$$

1. $\operatorname{Spec}(u_F) \subset \operatorname{Spec}(u)$

2. $\forall \lambda \in \operatorname{Spec}(u_F), \quad E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F.$

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(u_F)$. Alors il existe $x \in F \setminus \{0\}$ tel que $u_F(x) = \lambda x$, i.e. tel que $u(x) = \lambda x$. Comme un vecteur non nul de F est également un vecteur non nul de E, $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$.
2. Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(u_F)$.
   $\boxed{\subset}$ Soit $x \in E_\lambda(u_F)$. Alors $x \in F$ et $u_F(x) = \lambda x$, d'où $u(x) = \lambda x$.
   Comme $x \in E$ et $u(x) = \lambda x$, il vient : $x \in E_\lambda(u)$. Ainsi $x \in E_\lambda(u) \cap F$.
   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in E_\lambda(u) \cap F$. Alors $u(x) = \lambda x$. Or $x \in F$ donc $u(x) = u_F(x)$.
   Comme $x \in F$ et $u_F(x) = \lambda x$, il vient : $x \in E_\lambda(u_F)$.

Q.E.D.

2.3 Endomorphismes qui commutent et sous-espaces stables

C8. 25. *Exercice (Endomorphismes qui commutent et stabilité des sous-espaces propres).* — Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Démontrer que v stabilise $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$.
2. Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$. Démontrer que v stabilise $E_\lambda(u)$.

C8. 26. *Exercice (Éléments propres d'un projecteur non trivial)).* — Soit p un projecteur de E tel que $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u \neq \mathrm{id}_E$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Déterminer les éléments propres de p.
2. Démontrer que p et u commutent si et seulement si u stabilise $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$.

3 Polynôme caractéristique

C8. 27. *Notation.* — Dans cette partie, n désigne un nombre entier naturel non nul et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

3.1 Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée

C8. 28. Proposition-Définition (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée). — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'application χ_M définie par :*

$$\chi_M \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(\lambda I_n - M) \end{array} \right.$$

est une application polynomiale. Le polynôme qui lui est associé, qui est (abusivement) également noté χ_M, est appelé polynôme caractéristique de la matrice M.

3.2 Polynôme caractéristique de deux matrices semblables

C8. 29. Proposition (Polynôme caractéristique de deux matrices semblables). — *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors :*

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_A = \chi_B.$$

C8. 30. *Exemple (Le polynôme caractéristique ne détermine pas la classe de similitude).* —

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui est semblable à la matrice identité I_n. Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que :
$$M = P I_n P^{-1} = I_n.$$
Donc l'unique matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ qui est semblable à I_n est la matrice I_n elle-même.
2. Comme :
$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \qquad \det(\lambda I_n - I_n) = \det((\lambda - 1) I_n) = (\lambda - 1)^n \ \det(I_n) = (\lambda - 1)^n$$
le polynôme caractéristique de la matrice I_n est $\chi_{I_n} = (X-1)^n$.
3. Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie par :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. La matrice $\lambda I_n - M$ étant triangulaire supérieure, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux, tous égaux à $(\lambda - 1)$. On en déduit :
$$\det(\lambda I_n - M) = (\lambda - 1)^n$$
et par suite $\chi_M = (X-1)^n$.

4. De 1, 2 et 3, nous déduisons que les matrices I_n et M ont le même polynôme caractéristique, mais qu'elles ne sont pas semblables. La réciproque de l'implication de la proposition précédente est donc fausse.

3.3 Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme

C8. 31. *Remarque (Rappel sur le déterminant d'un endormorphisme).* — Soit φ un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors d'après le théorème de changement de bases :

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}\ \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)\ \left(P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}\right)^{-1}$$

où $P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} := \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_E)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\det\left(\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi)\right) & = & \det\left(P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}\ \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)\ \left(P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}\right)^{-1}\right) & \\
& = & \det\left(P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}\right)\ \det\left(\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)\right)\ \det\left(\left(P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}\right)^{-1}\right) & [\ \textbf{multiplicativité du déterminant}\ ] \\
& = & \det\left(\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)\right) & \left[\textbf{si } A \textbf{ est inversible, } \det(A)\neq 0 \textbf{ et } \det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}\right].
\end{array}$$

En d'autre termes, le déterminant de la matrice d'un endormorphisme dans une base de E ne dépend pas du choix de la base de E. Cette observation donne de la consistance à la définition suivante.
Le déterminant de φ est le scalaire $\det(\varphi)$ défini par :

$$\det(\varphi) := \det\left(\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right)$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

C8. 32. Définition (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application χ_u définie par :*

$$\chi_u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(\lambda\,\mathrm{id}_E - u) \end{array}\right.$$

est une application polynomiale. Le polynôme qui lui est associé, qui est (abusivement) également noté χ_u, est appelé polynôme caractéristique de l'endomorphisme u.

C8. 33. *Remarque.* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, vaut :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\qquad \chi_u(\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{id}_E - u) := \det\left(\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda\,\mathrm{id}_E - u)\right) = \det\left(\lambda I_n - \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right) = \chi_{\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}(\lambda)$$

et donc, comme $\mathbf{K}$ est infini, $\chi_u = \chi_{\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}$.

C8. 34. *Remarque (Extension du corps des scalaires pour le spectre d'un endomorphisme).* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il est possible que χ_u possède des racines dans un sur-corps strict $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$. Dans ce cas, ces racines ne sont pas des valeurs propres de u à proprement parler, mais ce sont des valeurs propres de la matrice M de u dans une base de E, où M est vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{L})$.

3.4 Degré et coefficients remarquables du polynôme caractéristique

C8. 35. Théorème (Degré et coefficients remarquables du polynôme caractéristique). — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *χ_M est un polynôme de degré n.*
2. *Le coefficient de degré n est 1, i.e. χ_M est unitaire.*
3. *Le coefficient de degré $n-1$ de χ_M est $-\operatorname{Tr}(M)$.*
4. *Le coefficient de degré 0 de χ_M est $(-1)^n \det(M)$.*

C8. 36. *Exercice.* — Traduire les résultats précédents pour un endomorphisme de E.

C8. 37. *Remarque (Deux conséquences du Théorème précédent).* —

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Alors :
$$\chi_M = X^2 - \operatorname{Tr}(M)\ X + \det(M).$$
2. Le théorème précédent et le résultat sur le polynôme caractéristique de deux matrices semblables livrent une nouvelle démonstration du fait que la trace et le déterminant sont des invariants de similitude.

3.5 Valeurs propres versus racines du polynôme caractéristique

C8. 38. Théorème (Valeurs propres versus racines du polynôme caractéristique). —

1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les valeurs propres de M dans $\mathbf{K}$ sont les racines de χ_M dans $\mathbf{K}$.*
2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u dans $\mathbf{K}$ sont les racines de χ_u dans $\mathbf{K}$.*

C8. 39. *Exercice (Valeurs propres de deux matrices semblables).* — Soient A et B deux matrices semblables. Que dire de leurs spectres $\operatorname{Spec}_{\mathbf{K}}(A)$ et $\operatorname{Spec}_{\mathbf{K}}(B)$?

C8. 40. Proposition (Nombre de valeurs propres en dimension finie). —

1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u possède au plus n valeurs propres deux-à-deux distinctes, où $n = \dim(E)$.*
2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors M possède au plus n valeurs propres deux-à-deux distinctes.*

C8. 41. *Remarque (Méthode pratique de calcul des valeurs propres).* — Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée, il suffit de déterminer les racines de son polynôme caractéristique.

C8. 42. *Exercice.* — Déterminer les éléments propres des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

C8. 43. *Exercice (Valeurs propres d'un endormorphisme remarquable du plan).* — Soit l'application linéaire

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y,x)\,. \end{array} \right.$$

1. Donner une interprétation géométrique de u et la matrice M de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Déterminer $\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(M)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(M)$.

3.6 Polynôme caractéristique et valeurs propres d'une matrice triangulaire

C8. 44. Proposition (Polynôme caractéristique et valeurs propres d'une matrice triangulaire). — *Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $t_{1,1}, \ldots, t_{n,n}$. Alors :*

$$\chi_T(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - t_{i,i}).$$

En particulier les valeurs propres de T sont ses coefficients diagonaux.

C8. 45. *Exercice.* — Soit l'application linéaire

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + P' \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.
2. En déduire les éléments propres de φ.

3.7 Propriété de divisibilité pour le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

C8. 46. Proposition (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit). — *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u *et soit* u_F *l'endomorphisme de* F *induit par* u. *Alors :*

$$\chi_{u_F} \text{ divise } \chi_u.$$

2. *Supposons qu'il existe un nombre entier* $r \geq 2$, *des sous-espaces vectoriels* $E_1, \ldots, E_r$ *tous stables par* u *tels que* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$. *Alors :*

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} \chi_{u_{|E_i}^{|E_i}}.$$

3.8 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

C8. 47. Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre). —

1. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et soit* $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. *On appelle multiplicité de la valeur propre* λ, *et on note* m_λ, *son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de* χ_u.
2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *et soit* $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$. *On appelle multiplicité de la valeur propre* λ, *et on note* m_λ, *son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de* χ_M.

C8. 48. Proposition (Multiplicité d'une valeur propre vs. dimension du s.e.p.). — *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et soit* $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. *Alors*

$$\dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$$

où m_λ *est la multiplicité de la valeur propre* λ.

C8. 49. *Exercice.* — Traduire le résultat précédent pour une matrice carrée.

3.9 Matrices compagnon, polynôme caractéristique d'une matrice inversible et d'un produit

C8. 50. *Exercice (Matrice compagnon).* — Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbf{K}[X]$. Définissons la matrice compagnon de P par :

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon de P.

C8. 51. *Remarque (Des matrices compagnons).* — Posons

$$\Pi_n := \{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ P \text{ est unitaire, de degré } n\}.$$

D'après l'exercice précédent, l'application

$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \Pi_n \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right.$$

qui est bien définie, admet pour inverse à droite l'application

$$C \left| \begin{array}{ccc} \Pi_n & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ P & \longmapsto & C(P) \end{array} \right.$$

i.e. pour tout $P \in \Pi_n$:

$$\chi \circ C(P) = \chi_{C(P)} = P = \mathrm{id}_{\Pi_n}(P).$$

L'application χ est donc surjective.

C8. 52. *Exercice (Polynôme caractéristique de l'inverse d'une matrice inversible).* — Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

1. Quel lien existe-t-il entre χ_M et $\chi_{M^{-1}}$?
2. En déduire un lien entre les valeurs propres de M et celle de M^{-1}.
3. Que dire des sous-espaces propres de M et de ceux de M^{-1} ?

C8. 53. *Exercice (Polynôme caractéristique d'un produit de deux matrices carrées de même format).* — Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Calculer $\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{pmatrix}$
2. Qu'en déduire pour χ_{AB} et χ_{BA} ?

4 Diagonalisabilité

4.1 Définitions d'une matrice carrée (resp. d'un endomorphisme) diagonalisable sur $\mathbf{K}$

C8. 54. Définition (Matrice carrée diagonalisable sur $\mathbf{K}$). — *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e. s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que :*

$$M = PDP^{-1}.$$

C8. 55. *Exercice (Matrice possédant une unique valeur propre).* — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que M possède une unique valeur propre dans $\mathbf{K}$. Démontrer l'équivalence :

$$M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K} \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = \lambda I_n.$$

C8. 56. *Remarque (Le polynôme caractéristique d'une matrice diagonalisable est scindé sur $\mathbf{K}$).* — Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable sur $\mathbf{K}$, alors elle a le même polynôme caractéristique qu'une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Son polynôme caractéristique χ_M est donc scindé sur $\mathbf{K}$. Cette observation livre la condition nécessaire (non suffisante, cf. exercice suivant) de diagonalisabilité suivante.

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_M \text{ est scindé sur } \mathbf{K}.$$

C8. 57. *Exercice (Matrice à polynôme caractéristique scindé sur $\mathbf{R}$, non diagonalisable).* — Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Démontrer que χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$, mais que M n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{K}$.

C8. 58. *Remarque (Diagonalisabilité d'une matrice et dépendance en le corps de base).* — Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut être non diagonalisable sur $\mathbf{K}$, mais diagonalisable sur un sur-corps $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$.

Par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ non scindé sur $\mathbf{R}$) mais M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ puisque :

$$M = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

C8. 59. Définition (Endomorphisme diagonalisable). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous soit vérifiée.*

(DE1) *$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale.*

(DE2) *Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, e_k est un vecteur propre de u.*

C8. 60. *Remarque (De la diagonalisabilité d'un endomorphisme).* —

1. Diagonaliser un endomorphisme de E revient à chercher une base de E constituée de vecteurs propres pour u.
2. Soit $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E. Du théorème de changement de base, il découle :

$$u \text{ est diagonalisable} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonalisable.}$$

3. En particulier $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.

C8. 61. *Exercice (Diagonalisabilité des projecteurs et des symétries).* —

1. Soit p un projecteur de E, i.e. soit p un endormorphisme de E tel que $p \circ p = p$. On suppose que p est non trivial, i.e. : $p \neq \mathrm{id}_E$ et $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Déterminer les éléments propres de p et en déduire que p est diagonalisable.
2. Soit s une symétrie de E, i.e. soit s un endormorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. On suppose que s est non triviale, i.e. : $s \neq \mathrm{id}_E$ et $s \neq -\mathrm{id}_E$.
   Déterminer les éléments propres de s et en déduire que s est diagonalisable.

4.2 Caractérisation de la diagonalisabilité via les dimensions des sous-espaces propres

C8. 62. Théorème (Caractérisation de la diagonalisabilité via une décomposition de E en somme de s.e.p.). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u. Alors :*

$$u \textit{ est diagonalisable} \quad \Longleftrightarrow \quad E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(u).$$

C8. 63. *Remarque.* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. On note p_k le projecteur de E sur $E_{\lambda_k}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leq \ell \leq r \\ \ell \neq k}} E_{\lambda_\ell}(u)$, i.e. :

$$p_k \left| \begin{array}{ccc} E = \bigoplus_{\ell=1}^{r} E_{\lambda_\ell}(u) & \longrightarrow & E \\ x = \sum_{\ell=1}^{r} \underbrace{x_\ell}_{\in E_{\lambda_\ell}(u)} & \longmapsto & x_k\,. \end{array} \right.$$

Alors $u = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k p_k$.

C8. 64. Corollaire (Caractérisation de diagonalisabilité via la somme des dimensions des s.e.p.). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u. Alors :*

$$u \text{ est diagonalisable} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} \dim(E_{\lambda_k}(u)) = n$$

où $n = \dim(E)$.

4.3 Condition suffisante (non nécessaire) de la diagonalisabilité via le nombre de valeurs propres

C8. 65. Corollaire (Condition suffisante de la diagonalisabilité via le nombre de valeurs propres). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$u \text{ possède } n \text{ valeurs propres deux-à-deux distinctes} \quad \Longrightarrow \quad u \text{ est diagonalisable}$$

où $n = \dim(E)$.

C8. 66. *Remarque (La réciproque de l'implication du précédent corollaire est fausse).* — Si E est de dimension $n \geq 2$, alors id_E est diagonalisable (sa matrice dans toute base de E est I_n, qui est diagonale) mais $\mathrm{Spec}(\mathrm{id}_E) = \{1\}$. Ceci fournit un contre-exemple à la réciproque du précédent corollaire.

C8. 67. *Exercice.* — Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{Tr}\,(M)^2 > 4\ \det(M)$. Démontrer que M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

4.4 Caractérisation de la diagonalisabilité via le polynôme caractéristique et les ordres de multiplicité

C8. 68. Corollaire (Caractérisation de la diagonalisabilité via le polynôme caractéristique et les ordres de multiplicité). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u, et $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_r}$ leurs multiplicités respectives. Alors :*

$$u \text{ est diagonalisable} \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbf{K} \\ \text{et} \\ \text{pour tout } k \in [\![1, r]\!],\ \dim(E_{\lambda_k}) = m_{\lambda_k}. \end{array} \right.$$

C8. 69. *Exercice (Étude de la diagonalisabilité de matrice dans un cas basique).* — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

4.5 Trace, déterminant et valeurs propres d'un endomorphisme diagonalisable

C8. 70. Proposition (Trace, déterminant et valeurs propres d'un endomorphisme diagonalisable). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Alors :*

1. $\mathrm{Tr}\,(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k \lambda_k$
2. $\det(u) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k}$.

C8. 71. *Exercice.* — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Démontrer :

$$\det(M) > 0 \qquad \textbf{et} \qquad \sqrt[n]{\det(M)} \leq \frac{1}{n}\ \mathrm{Tr}\,(M)\,.$$

4.6 Quelques exercices sur la diagonalisabilité

C8. 72. *Exercice (Étude de la diagonalisabilité d'endomorphismes dans des cas basiques).* —

1. L'endormorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-il diagonalisable ?
2. Soit $n \in \mathbf{N}_{\geq 3}$. L'endormorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

est-il diagonalisable ?

C8. 73. *Exercice (Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable).* — Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que u est diagonalisable.
2. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.
3. En déduire la forme explicite de A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

C8. 74. *Exercice (Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).* — Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose M et N semblables sur $\mathbf{C}$, i.e. qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que : $M = PNP^{-1}$. Démontrer que M et N semblables sur $\mathbf{R}$, i.e. qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que : $M = QNQ^{-1}$.

C8. 75. *Exercice (Matrices à coefficients réels diagonalisables sur $\mathbf{C}$).* — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose M diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux ont un format 1×1 ou 2×2.

5 Trigonalisabilité

5.1 Définition d'une matrice carrée trigonalisable

C8. 76. DÉFINITION (MATRICE TRIGONALISABLE. — *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite trigonalisable sur $\mathbf{K}$ si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe une matrice triangulaire supérieure $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que :*

$$M = PUP^{-1}.$$

C8. 77. *Remarque (Une matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure).* —

1. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire supérieure :

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

   Soit f l'endormorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ est U. Alors :

$$\begin{array}{rcccccccccc} f(e_n) & = & u_{n,n}\, e_n & + & u_{n-1,n}\, e_{n-1} & + & \dots & + & u_{2,n}\, e_2 & + & u_{1,n}\, e_1 \\ f(e_{n-1}) & = & & & u_{n-1,n-1}\, e_{n-1} & + & \dots & + & u_{2,n-1}\, e_2 & + & u_{2,n-1}\, e_1 \\ & \vdots & & & & & & & & & \\ f(e_2) & = & & & & & & & u_{2,2}\, e_2 & + & u_{1,2}\, e_1 \\ f(e_1) & = & & & & & & & & & u_{1,1}\, e_1. \end{array}$$

Ainsi, si on pose $\mathcal{B}_1 := (e_n, e_{n-1}, \dots, e_2, e_1)$:

$$L := \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) \begin{pmatrix} u_{n,n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_{n-1,n} & u_{n-1,n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & u_{2,2} & 0 \\ u_{1,n} & u_{1,n-1} & \dots & u_{1,2} & u_{1,1} \end{pmatrix}.$$

La matrice L est triangulaire inférieure. Comme elle représente, elle aussi, l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$, les matrices U et L sont semblables. Plus concrètement, par théorème de changement de base :

$$\underbrace{\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)}_{U} = \underbrace{P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1}}_{\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}} \underbrace{\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)}_{L} \left(P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1}$$

2. La démarche exposée en **1**. permet de démontrer également qu'une matrice triangulaire inférieure quelconque est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
3. Ainsi, dans la précédente définition, substituer « inférieure » à « supérieure » conduit à la même notion de trigonalisabilité.
4. Si M est une matrice carrée, alors M est semblable à sa transposée (résultat délicat à établir), ce qui donne une autre justification de **3**.

C8. 78. *Remarque (Le polynôme caractéristique d'une matrice trigonalisable est scindé sur* $\mathbf{K}$*).* — Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable sur $\mathbf{K}$, alors elle a le même polynôme caractéristique qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Son polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$. Cette observation livre la condition nécessaire de trigonalisabilité suivante.

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{K} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_M \text{ est scindé sur } \mathbf{K}.$$

Nous verrons, plus loin, que cette condition nécessaire est en fait suffisante.

C8. 79. *Remarque (Trigonalisabilité et dépendance en le corps de base).* — Si $\mathbf{L}$ est un sur-corps de $\mathbf{K}$, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut-être trigonalisable sur $\mathbf{L}$, sans être trigonalisable sur $\mathbf{K}$. Par exemple, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbf{R}$ (son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ non scindé sur $\mathbf{R}$) mais M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ (elle est de format 2×2 et possède 2 valeurs propres distinctes sur $\mathbf{C}$), donc *a fortiori* trigonalisable sur $\mathbf{C}$.

5.2 Définition d'un endomorphisme trigonalisable

C8. 80. Définition (Endomorphisme trigonalisable). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.*

C8. 81. *Exercice (Substituer « triangulaire inférieure » à « triangulaire supérieure »).* — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ de u dans la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire inférieure.

C8. 82. *Remarque.* —

1. Trigonaliser un endomorphisme de E revient à chercher une base de E dans laquelle la matrice de E est triangulaire supérieure.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E. Grâce au théorème de changement de base, on établit :
$$u \text{ est trigonalisable} \quad \iff \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{K}.$$
3. En particulier $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est trigonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé est trigonalisable.

5.3 Caractérisation de la trigonalisabilité via le polynôme caractéristique

C8. 83. Théorème (Caractérisation de la trigonalisabilité via le polynôme caractéristique). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$u \textit{ est trigonalisable} \quad \iff \quad \chi_u \textit{ est scindé sur } \mathbf{K}.$$

C8. 84. Corollaire (Toute matrice carrée à coefficients complexes est trigonalisable sur C). — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Alors M est trigonalisable sur $\mathbf{C}$.*

Démonstration. Ce résultat est fruit de la combinaison du précédent théorème avec celui de d'Alembert Gauß, qui stipule que tout polynôme à coefficients complexes, non constant, est scindé sur $\mathbf{C}$. Q.E.D.

5.4 Trace, déterminant et valeurs propres d'une matrice carrée à coefficients complexes

C8. 85. Proposition (Trace, déterminant et valeurs propres d'une matrice à coefficients complexes). — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de M et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Alors :*

$$\operatorname{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{r} m_k \lambda_k \qquad \textit{et} \qquad \det(M) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k}.$$

5.5 Trigonalisation d'une matrice de « petit » format

C8. 86. *Remarque (Méthode pour trigonaliser une matrice 2×2 trigonalisable).* — Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ une matrice trigonalisable. On suppose que M n'est pas diagonale, sinon, il n'y a pas lieu de chercher à la réduire.
D'après le critère de trigonalisabilité via le polynôme caractéristique, le polynôme χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$.

- *1er cas : χ_M possède deux racines distinctes λ_1, λ_2 dans $\mathbf{K}$: $\chi_M = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.*

  Dans ce cas, M est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ et les deux sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(M)$ et $E_{\lambda_2}(M)$ sont de dimension 1. On détermine une base (X_1) de $E_{\lambda_1}(M)$ et une base (X_2) de $E_{\lambda_2}(M)$ (en résolvant un système linéaire, par exemple). Si on pose P la matrice 2×2 dont la première colonne est X_1, et la deuxième X_2, alors P est inversible et, d'après le théorème de changement de base :

  $$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- *2ème cas : χ_M possède une unique racine λ_0 dans $\mathbf{K}$: $\chi_M = (X - \lambda_0)^2$*

  Si $E_0(M)$ est de dimension 2, alors M est diagonalisable avec une unique valeur propre. Elle est donc diagonale ($M = \lambda_0 I_2$), ce qui est exclu. Donc $\dim(E_0(M)) = 1$.
  On détermine une base (X_0) de $E_{\lambda_0}(M)$ (en résolvant un système linéaire, par exemple). On choisit un vecteur X de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{K})$ qui n'est pas colinéaire à X_0 et on forme la matrice P de format 2×2 dont la première colonne est X_0 et dont la deuxième est X. Alors P est inversible et d'après le théorème de changement de base :

  $$M = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$$

  où α et β sont des scalaires de $\mathbf{K}$ que l'on détermine en calculant les coordonnées de MX dans la base (X_0, X). Notons que comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, il vient $\beta = \lambda_0$. Ainsi :

  $$M = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & \alpha \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

C8. 87. *Exercice (Trigonalisation en format 2×2 et application à la résolution d'un système différentiel).* —

1. Démontrer que $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbf{R}$, puis la trigonaliser.
2. Déterminer les couples de fonctions $(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})^2$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & 3x & - & y \\ y' & = & x & + & y. \end{array} \right.$$

C8. 88. *Exercice (Trigonalisation en format 3×3).* — Démontrer que $A := \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbf{R}$, puis la trigonaliser.

6 Polynômes d'endomorphismes

6.1 Définition d'un polynôme d'endomorphisme

C8. 89. DÉFINITION (POLYNÔME D'ENDOMORPHISME). — *Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, *soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors :*

$$P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$$

où les puissances de u *sont prises relativement au produit de composition (en particulier* $u^0 = \mathrm{id}_E$*), est un endormorphisme de* E*, appelé polynôme de l'endomorphisme* u.

6.2 Le morphisme de K-algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathrm{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$

C8. 90. THÉORÈME (MORPHISME DE K-ALGÈBRES $P \mapsto P(u)$ DE $\mathbf{K}[X]$ DANS $\mathcal{L}(E)$). — *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *L'application*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbf{K}$*-algèbres, i.e. :*

1. φ *est linéaire.*
2. *Pour tout* $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Démonstration. 1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ et soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$. Posons $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$, où $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbf{N}}$ sont des familles de scalaires presque nulles.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(u) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda a_i + \mu b_i) u^i \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda a_i u^i + \mu b_i u^i \\ &= \lambda \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i u^i \right) + \mu \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i u^i \right) \qquad \text{[linéarité de } \Sigma \text{ pour des sommes finies]} \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q) \end{aligned}$$

2. Soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$. Posons $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$, où $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbf{N}}$ sont des familles

de scalaires presque nulles.

$$\begin{aligned}
(P\times Q)(u) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i} a_j\, b_{i-j}\, u^i \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=j}^{+\infty} a_j\, b_{i-j}\, u^i && \left[\text{Deux manières de sommer sur } \left\{(i,j)\in\mathbf{N}^2 \ :\ j\leq i\right\}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=j}^{+\infty} a_j\, b_{i-j}\, u^j\circ u^{i-j} && [\text{si } i\geq j, \text{ alors } i-j\geq 0] \\
&= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j u^j\right)\circ\left(\sum_{i=j}^{+\infty} b_{i-j}\, u^{i-j}\right) && \left[\text{pour tout } j\geq 0,\ u^j \text{ est linéaire}\right] \\
&= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j u^j\right)\circ\left(\sum_{i'=0}^{+\infty} b_{i'}\, u^{i'}\right) && [\text{chanrgement d'indice } i'=i-j] \\
&= P(u)\circ Q(u)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

C8. 91. Corollaire (Deux polynômes d'un même endomorphisme commutent). — *Soit* $u\in\mathcal{L}(E)$. *Soit* $(P,Q)\in\mathbf{K}[X]^2$. *Alors :*

$$P(u)\circ Q(u) = Q(u)\circ P(u).$$

Démonstration. $P(u)\circ Q(u) = (P\times Q)(u) \underset{\times \text{ comm. dans } \mathbf{K}[X]}{=} (Q\times P)(u) = Q(u)\circ P(u)$ Q.E.D.

C8. 92. *Exercice (Versions matricielles des deux résultats précédents).* — Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\in\mathbf{K}[X]$, on pose :

$$P(M) := \sum_{k=0}^{n} a_k M^k.$$

Soit $(P,Q)\in\mathbf{K}[X]^2$. Justifier les assertions suivantes.

1. $\forall (P,Q)\in\mathbf{K}[X]^2,\quad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\quad (\lambda P+\mu Q)(M) = \lambda P(M)+\mu Q(M)$
2. $\forall (P,Q)\in\mathbf{K}[X]^2,\quad (P\times Q)(M) = P(M)\times Q(M)$
3. $\forall (P,Q)\in\mathbf{K}[X]^2,\quad P(M)\times Q(M) = Q(M)\circ P(M)$

6.3 Définition d'un polynôme annulateur et lien avec le spectre

C8. 93. Définition (Polynôme annulateur). —

1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit annulateur de M si $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.*

C8. 94. Théorème (Valeurs propres et polynômes d'endomorphismes). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $P \in \mathbf{K}[X]$.*

1. *Pour tout $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$, pour tout $x \in E_\lambda(u)$:*

$$P(u)(x) = P(\lambda).x$$

   et donc $P(\lambda) \in \operatorname{Spec}(P(u))$.

2. *Si $P(u) = 0$, alors les valeurs propres de u sont des racines de P. i.e. $\operatorname{Spec}(u) \subset \operatorname{Spec}_{\mathbf{K}}(P)$. Cette inclusion n'est pas nécessairement une égalité ensembliste, cf. remarque suivante.*

C8. 95. *Remarque (Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas nécessairement valeur propre).* — Si P est un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, une racine de P n'est pas nécessairement une valeur propre de u. En effet le polynôme $(X-1)(X-2022)$ annule id_E, mais 2022 n'est pas une valeur propre de id_E.

6.4 Théorème de Cayley-Hamilton

C8. 96. Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton). —

1. *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

   En d'autres termes, le polynôme caractéristique de u annule u.

2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors :*

$$\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}.$$

   En d'autres termes, le polynôme caractéristique de M annule M.

6.5 Polynôme minimal

C8. 97. Proposition (Idéal annulateur). —

1. *Soit* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Posons*

$$\mathrm{Ann}(u) := \left\{ P \in \mathbf{K}[X] \ : \ P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \right\}.$$

Alors $\mathrm{Ann}(u)$ *est un idéal non nul de* $\mathbf{K}[X]$.

2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$*. Posons*

$$\mathrm{Ann}(M) := \left\{ P \in \mathbf{K}[X] \ : \ P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})} \right\}.$$

Alors $\mathrm{Ann}(M)$ *est un idéal non nul de* $\mathbf{K}[X]$.

Démonstration. On ne démontre le résultat que dans le cas des endomorphismes. Dans le cas des matrices, la démonstration s'adapte *mutatis mutandis.*

- D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u \in \mathrm{Ann}(u)$ donc
- Soient $(P, Q) \in \mathrm{Ann}(u)^2$.

$$(P - Q)(u) = \varphi(P - Q) \underset{\varphi \text{ est un morphisme de } \mathbf{K}\text{-algèbres}}{=} \varphi(P) - \varphi(Q) = P(u) - Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} - 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Donc $P - Q \in \mathrm{Ann}(u)$.

- Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et soit $Q \in \mathrm{Ann}(u)$.

$$(P \times Q)(u) \underset{\varphi \text{ est un morphisme de } \mathbf{K}\text{-algèbres}}{=} P(u) \circ Q(u) = P(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Donc $P \times Q \in \mathrm{Ann}(u)$.

Q.E.D.

C8. 98. Définition (Polynôme minimal). —

1. *Soit* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. L'unique générateur unitaire de l'idéal non nul* $\mathrm{Ann}(u)$ *de* $\mathbf{K}[X]$ *est appelé polynôme minimal de* u*, et est noté* μ_u*. On a donc, par définition :*

$$\mathrm{Ann}(u) = \mu_u \mathbf{K}[X].$$

μ_u *est le polynôme annulateur de* u *qui est non nul, unitaire, de degré minimal.*

2. *L'unique générateur unitaire de l'idéal non nul* $\mathrm{Ann}(M)$ *de* $\mathbf{K}[X]$ *est appelé polynôme minimal de* M*, et est noté* μ_M*. On a donc, par définition :*

$$\mathrm{Ann}(M) = \mu_M \mathbf{K}[X].$$

μ_M *est le polynôme annulateur de* M *qui est non nul, unitaire, de degré minimal.*

C8. 99. *Exercice (Idéal annulateur d'un endomorphisme vs. idéal annulateur d'une matrice).* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit M la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E. Alors $\mu_u = \mu_M$.

C8. 100. *Remarque (Reformulation du théorème de Cayley-Hamilton).* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors le théorème de Cayley-Hamilton se reformule comme suit :

$$\mu_u \text{ divise } \chi_u.$$

C8. 101. *Exercice (La sous-$\mathbf{K}$-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par un endomorphisme).* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$\mathbf{K}[u] := \operatorname{Vect}\left(\left(u^k\right)_{k \in \mathbf{N}}\right).$$

1. Montrer que $\mathbf{K}[u]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, i.e. que $\mathbf{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui est stable pour le produit de composition.
2. Posons $d := \deg(\mu_u)$. Démontrer que $(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbf{K}[u]$.

C8. 102. *Exercice (Calculs de polynômes minimaux).* —

1. Déterminer le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}_{\geq 3}$. Déterminer le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6.6 Lemme des noyaux et lemme des noyaux généralisés

C8. 103. Théorème (Lemme des noyaux). — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P \wedge Q = 1$. Alors :*

$$\operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u)).$$

Démonstration. Par Bézout, il existe $S, T \in \mathbf{K}[X]$ tels que $SP + TQ = 1$. Par suite :

$$(\star) \qquad S(u) \circ P(u) + T(u) \circ Q(u) = \mathrm{id}_E.$$

- Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(Q(u))$ de E sont en somme directe. En effet, si $x \in \operatorname{Ker}(()\, P(u)) \cap \operatorname{Ker}(()\, Q(u))$, alors d'après $(\star)$

$$x = S(u) \circ P(u)(x) + T(u) \circ Q(u)(x) = 0.$$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker}((PQ)(u))$. Alors d'après $(\star)$, $x = S(u) \circ P(u)(x) + T(u) \circ Q(u)(x)$..
Le vecteur $S(u) \circ P(u)(x)$ est dans $\operatorname{Ker}(()\, Q(u))$. En effet

$$Q(u)(S(u) \circ P(u)(x)) = Q(u) \circ S(u) \circ P(u)(x) = S(u) \circ P(u) \circ Q(u)(x) = S(u) \circ (PQ)(u)(x) = S(u)(0) = 0.$$

De même, on démontre $T(u) \circ Q(u)(x)$ est dans $\operatorname{Ker}(P(u))$.
Donc x s'écrit comme d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(()\, P(u))$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(Q(u))$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$. Alors

$$(PQ)(u)(x) = P(u) \circ Q(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x) = Q(u)(0) = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}((PQ)(u))$. De même, $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}((PQ)(u))$. Par minimalité de la somme de deux sous-espaces vectoriels de E, il vient $\operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}((PQ)(u))$.

Q.E.D.

C8. 104. **Corollaire (Lemme des noyaux généralisés).** — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et soient $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ deux-à-deux premiers entre eux. Alors :*

$$\operatorname{Ker}((P_1 \ldots P_r)(u)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_k(u)).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur l'entier r.

- Initialisation à $n = 2$: cf. lemme des noyaux.
- Hérédité : Soit r un nombre entier supérieur ou égal à 2 fixé. Supposons la propriété vrai pour r polynômes deux-à-deux premiers entre eux. Soient $P_1, \ldots, P_r, P_{r+1}$ des polynômes deux-à-deux premiers entre eux.
  Les polynômes $P_1 \ldots P_r$ et P_{r+1} sont premiers entre eux. Pour le voir il suffit de multiplier membre à membre des relations de Bézout pour $(P_1, P_{r+1}), (P_2, P_{r+1}), \ldots, (P_r, P_{r+1})$ et de remarquer que l'on obtient ainsi une relation de Bézout pour $(P_1 P_2 \ldots P_r, P_{r+1})$.
  D'après le lemme des noyaux :

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) \oplus \operatorname{Ker}(P_{r+1})(u)) = \operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r+1} P_k\right)(u)\right).$$

  En appliquant l'hypothèse de récurrence à $P_1, \ldots, P_r$, nous obtenons

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_k(u)).$$

  En rassemblant les deux dernières identités, il vient

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r+1} P_k\right)(u)\right) = \left(\bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_k(u))\right) \oplus \operatorname{Ker}(P_{r+1}(u)) = \bigoplus_{k=1}^{r+1} \operatorname{Ker}(P_k(u)).$$

- Conclusion : Nous avons établi, par récurrence, la propriété pour tout nombre entier r supérieur ou égal à 2.

Q.E.D.

C8. 105. *Exercice.* — Trouver tous les endomorphismes u de $\mathbf{R}^n$ tels que $u^3 - 4u^2 + 4u = 0$ et $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

6.7 Caractérisations algébriques de la diagonalisabilité, de la trigonalisabilité, de la nilpotence

C8. 106. Théorème (Caractérisation algébrique de la diagonalisabilité). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est diagonalisable.*
2. *Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
3. *Le polynôme minimal μ_u de u est scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$.*

C8. 107. Théorème (Caractérisation algébrique de la trigonalisabilité). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est trigonalisable.*
2. *Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé sur $\mathbf{K}$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
3. *Le polynôme minimal μ_u de u est scindé sur $\mathbf{K}$.*

C8. 108. Théorème (Caractérisation algébrique de la nilpotence). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle que n désigne la dimension de E, supposée finie non nulle. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est nilpotent.*
2. *u est trigonalisable sur $\mathbf{K}$ et son unique valeur propre est 0.*
3. *$\mu_u = X^d$ où $d \in [\![1, n]\!]$.*
4. *$\chi_u = X^n$.*

C8. 109. *Exercice.* — Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ tel que $u^p = \mathrm{id}_E$, où $p \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

6.8 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

C8. 110. CorolLaire (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note $v := u_F$ l'endomorphisme de F l'induit par u. Alors*

$$\mu_v \text{ divise } \mu_u$$

et donc en particulier, si u est diagonalisable alors v l'est également.

6.9 Un pas vers la réduction de Jordan

C8. 111. Théorème (Endomorphisme de polynôme minimal scindé – un pas vers la réduction de Jordan). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons μ_u scindé sur $\mathbf{K}$. Alors il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_r$ de E et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que :*

1. *les sous-espaces $E_1, \ldots, E_r$ sont stables par u ;*
2. $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$;
3. *pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $u_{|E_k}^{|E_k} - \lambda_k id_{E_k}$ est nilpotent.*

7 Une sélection d'exercices

C8. 112. *Exercice (CCINP).* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}$, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Démontrer que la famille $(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^n)$ est liée . En déduire l'existence d'un polynôme non nul annulateur de f.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, soit P un polynôme annulateur de f. Démontrer que $P(\lambda) = 0$.

C8. 113. *Exercice (CCINP).* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Démontrer que :
$$\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2,\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$
2. (a) Démontrer que :
$$\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2,\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$
   (b) Démontrer que pour tout couple $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$:
$$P(u) = 0 \implies (PQ)(u) = 0.$$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, et en déduire que le polynôme $R(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

C8. 114. *Exercice (CCINP).* —

1. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Rappeler la définition d'une valeur propre et démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$:
$$\lambda \in \mathrm{Spec}(u) \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0.$$
   En déduire que u possède au plus n valeurs propres distinctes.
2. Trouver un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ ayant 0 et 1 comme valeurs propres.

C8. 115. *Exercice (CCINP).* — Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$, où $a, b, c \in \mathbf{R}$.

1. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$?
2. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$?

C8. 116. *Exercice (CCINP).* — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbf{R}$.

1. Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

C8. 117. *Exercice (CCINP).* — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$. Posons $B = aI_3 + bA + cA^2$. Déduire de la question 1 les éléments propres de B.

C8. 118. *Exercice (CCINP).* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E. L'endomorphisme f est-il diagonalisable (discuter en fonction du vecteur v) ?

C8. 119. *Exercice (CCINP).* —

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

C8. 120. *Exercice (CCINP).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, D_n désigne le déterminant de A.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$, puis déterminer D_n en fonction de n.
2. Jusfifier que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?

C8. 121. *Exercice (CCINP).* — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $\lambda = 2$ est valeur propre de A et que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
2. Vérifier que A possède deux autres valeurs propres -2 et 4 avec comme vecteurs propres respectivement associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. On considère les suites $(a_n)_{n \in n\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par leurs premiers termes a_0, b_0, c_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -3a_n + b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = -a_n + b_n + 3c_n \end{cases}$$

   On suppose que $a_0 = 2$, $b_0 = 2$ et $c_0 = 0$. Calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

C8. 122. *Exercice (CCINP).* —

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de A, puis une base de vecteurs propres associés.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers la base de vecteurs, puis son inverse P^{-1}.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2y + z \\ z' = 3z \end{cases}$.
   Résoudre ce système en utilisant la question **1**.

C8. 123. *Exercice (CCINP).* — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
3. En déduire une méthode de résolution su système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

C8. 124. *Exercice.* — Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbf{R}$? Si oui, les diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

C8. 125. *Exercice.* — À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbf{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? La diagonaliser lorsque c'est le cas.

C8. 126. *Exercice.* — Démontrer que les matrices suivantes sont diagonalisables dans $M_3(\mathbf{C})$ et les diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

C8. 127. *Exercice.* —

1. Démontrer que la matrice $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$, mais pas dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
2. Démontrer qu'elle est semblable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$) à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C8. 128. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Démontrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$. Démontrer que λ est une valeur propre de u.

C8. 129. *Exercice (CCINP).* — Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Posons :

$$\left| \begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ & & M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$$

Déterminer les éléments propres de φ.

C8. 130. *Exercice (CCINP).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Posons :

$$\left| \begin{array}{cccc} \Phi_A & : & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ & & M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

1. Déterminer les valeurs propres de Φ_A en fonction des valeurs propres de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres de Φ_A en fonctions des sous-espaces propres de A.

C8. 131. *Exercice.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $J^2 = -I_n$.

1. Démontrer que J est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(J) = \{i, -i\}$.
2. Démontrer que les multiplicités de i et $-i$ sont égales.
3. En déduire que n est pair. On pose $n = 2p$ dans la suite.
4. Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} iI_p & 0 \\ 0 & -iI_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à la matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire que J est semblable à J_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

C8. 132. *Exercice (CCINP).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Quel est le rang de U ? Démontrer que 0 est valeur propre de multiplicité au-moins $n - 1$.
2. Démontrer que n est valeur propre de U, et trouver le sous-espace propre correspondant. Quel est le polynôme caractéristique de U ?
3. Diagonaliser U (on pourra commencer par trouver une base du noyau de U).
4. Retrouver le polynôme caractéristique de U par un calcul direct de déterminant.

C8. 133. *Exercice (CCINP).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Posons $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$.

1. Supposons A diagonalisable. Monter que B est diagonalisable.
2. Dans la suite, on ne supppose plus A diagonalisable.
   (a) Démontrer que $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$. En déduire la dimension de $E_0(B)$ en fonction de celle de $E_0(A)$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B) \setminus \{0\}$, soit $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}$ tel que $BY = \lambda Y$.
      i. Démontrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $Y = \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$.
      ii. Démontrer que $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A)$, et déterminer la dimension de $E_\lambda(A)$ en fonction de celle de $E_\lambda(B)$.

(c) En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

C8. 134. *Exercice.* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonalisable.

1. Démontrer que l'application :
$$\left| \begin{array}{ccccc} f_A & : & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ & & M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$
est diagonalisable.
2. Démontrer que l'application
$$\left| \begin{array}{ccccc} g_A & : & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ & & M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$$
est diagonalisable.

C8. 135. *Exercice (CCINP).* — Notons u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les droites de $\mathbf{R}^3$ stables par u.

C8. 136. *Exercice (CCINP).* — On rappelle que $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$, notons u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^3$ stables par u.
2. Déterminer le commutant de A.

C8. 137. *Exercice (CCINP).* — Démontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont-elles semblables ?

C8. 138. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que $\{0_E\}$ et E soient les seuls sous-espaces stables par u.

1. Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Démontrer que la matrice de u dans cette base ne dépend pas de x.

C8. 139. *Exercice (CCINP).* — Soit $n \geq 2$, posons

$$\left| \begin{array}{cccc} g & : & \mathbf{R}_n[X] & \to & \mathbf{R}_n[X] \\ & & P & \mapsto & n^2XP - (X^2+X)P' - X^3P''. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. L'endomorphisme g est-il injectif ? diagonalisable ?

C8. 140. *Exercice (CCINP).* — Pour tout $z \in \mathbf{C}$, posons $A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A(z)$ est diagonalisable, sauf pour une valeur particulière de z que l'on précisera.
2. Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. Démontrer qu'il existe un unique complexe z tel que $e^{i\theta}$ soit valeur propre de $A(z)$. Déterminer cette valeur $z(\theta)$ et déterminer son module.

C8. 141. *Exercice (TPE).* — Discuter de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité en fonction du pramètre réel a de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

C8. 142. *Exercice (TPE).* — Déterminer les valeurs propres de la matrice de taille n, dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux des dernières lignes et colonnes qui valent 1.

C8. 143. *Exercice (CCINP).* — Démontrer qu'un matrice de de taille supérieure ou égale à 2 et de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

C8. 144. *Exercice (CCINP).* — Soient $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ telles que $B^2 = A$.

1. Si A est diagonalisable, la matrice B est-elle diagonalisable ?
2. Si A est diagonalisable et inversible, la matrice B est-elle diagonalisable ?

C8. 145. *Exercice (CCINP).* — Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{R}$.

C8. 146. *Exercice (CCINP).* — Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $m_{i,i-1} = 1$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $m_{1,n} = 1$, les autres coefficients étant nuls.

1. Démontrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines n-ièmes de l'unité.
2. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $A = a_0 I_n + a_1 M + \ldots + a_{n-1} M^{n-1}$. Démontrer que :

$$\det(A) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(a_0 + a_1 \omega + \ldots + a_{n-1} \omega^{n-1}\right).$$

C8. 147. *Exercice (CCINP).* — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $v \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E et

$$\left| \begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & & u & \mapsto & \frac{1}{2}(u \circ v - v \circ u). \end{array} \right.$$

1. Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de Φ.
3. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

C8. 148. *Exercice (TPE).* — Posons :

$$\left| \begin{array}{ccccc} f & : & \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R}[X] \\ & & P & \mapsto & (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P \end{array} \right.$$

Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$, et déterminer ses éléments propres.

C8. 149. *Exercice (CCINP).* — Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.
2. Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes commutant deux-à-deux. Démontrer que les u_i ont un vecteur propre commun.

C8. 150. *Exercice (CCINP).* — Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

C8. 151. *Exercice (CCINP).* — Déterminer toutes les matrices commutant avec $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbf{R}$.

C8. 152. *Exercice (CCINP).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 1$. Démontrer que $A^2 = A$.

C8. 153. *Exercice (ENSAM).* — Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$. Notons A sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Démontrer que la droite engendrée par un vecteur u non nul est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Démontrer que le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par f si et seulement si le vecteur ${}^t(a, b, c)$ est un vecteur propre de ${}^tA$.
3. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.
   - (A) f admet une unique droite stable.
   - (B) f admet un unique plan stable.
   - (C) Le polynôme caractéristique de f admet une unique racine réelle de multiplicité 1 ou 3, et l'espace propre correspondant est une droite.
4. Déterminer les sous-espaces stables de f quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C8. 154. *Exercice (CCINP).* — Soit $A \in GL_5(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A^3 + A^2 - 2A = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

C8. 155. *Exercice (CCINP).* — Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $f^4 = f^2$ et $\{-1, 1\} \subset \mathrm{Spec}(f)$. Démontrer que f est diagonalisable.

C8. 156. *Exercice (CCINP).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme

$$\left| \begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ & & M & \mapsto & \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A. \end{array} \right.$$

C8. 157. *Exercice (CCINP).* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$.
2. Posons

$$\left| \begin{array}{ccccc} \varphi & : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & & w & \mapsto & w \circ v - v \circ w. \end{array} \right.$$

   Démontrer que φ est linéaire. Combien de valeurs propres a-t-elle au maximum ?

3. Démontrer que u est nilpotent.

C8. 158. *Exercice (CCINP).* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = id$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^{k-1}$.
2. En déduire que u est nilpotent.
3. Conclure.

C8. 159. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbf{K}[X]$. Notons μ le polynôme minimal de u. Démontrer que :

$$P(u) \in GL(E) \iff P \wedge \mu = 1.$$

C8. 160. *Exercice.* — Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $AB = P(A)$, $P(0) \neq 0$. Démontrer que A est inversible et que A et B commutent.

C8. 161. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u \circ v = v \circ u$ et v soit nilpotent. Cet exercice a pour but de montrer que $\det(u + v) = \det(u)$.

1. Établir le résultat voulu lorsque $n = 1$.
2. Donner l'allure de la matrice de u, v et $u + v$ dans une base adaptée à $\operatorname{Im}(v)$.
3. Conclure par récurrence sur la dimension de l'espace.

C8. 162. *Exercice (Centrale).* —

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Soit $P = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ un polynôme de degré n, unitaire, de racines $\lambda_k \in \mathbf{C}$. Supposons que $P \in \mathbf{Z}[X]$. Démontrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k^p)$ est à coefficients entiers.

C8. 163. *Exercice (Centrale).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$. Notons P_A et P_B leurs polynômes caractéristiques respectifs.

1. Supposons que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B) = \emptyset$. Démontrer que P_A et P_B sont premiers entre eux, puis que $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont inversibles.
2. On suppose toujours que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B) = \emptyset$. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $AX = XB$. Démontrer que $X = 0$.
3. On suppose maintenant que A et B ont une valeur propre en commun λ. Démontrer qu'il existe une matrice non nulle $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $AX = XB$.
   Indication : On pourra construire X à l'aide d'un vecteur propre de A et d'un vecteur propre de ${}^tB$.
4. Démontrer que l'équation $AX - XB = Y$ d'inconnue X admet une unique solution pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \cap \mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(B) = \emptyset$.

C8. 164. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Cet exercice a pour but de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de stable par u de dimension 1 ou 2.

1. Que dire si u possède une valeur propre ? On supposera désormais que ce n'est pas le cas.
2. Notons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E. Démontrer qu'il existe un complexe λ et un vecteur colonne à coefficients complexes Z tels que $MZ = \lambda Z$.
3. Écrivons $\lambda = \alpha + i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et $Z = X + iY$, où X et Y sont des vecteurs colonnes à coefficients réels. Calculer MX et MY en fonction de α, β, X et Y.
4. Conclure.

C8. 165. *Exercice.* — Dans cet exercice, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Soit T une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbf{K}$, soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe des réels $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in]0\,, \varepsilon[$ tels que la matrice :
   $$T + \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$
   soit diagonalisable.
2. Étant donnée une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons $\|\, M \,\| = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ trigonalisable, il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable telle que $\|\, M - N \,\| \leq \varepsilon$.
3. Démontrer que pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice diagonalisable $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\|\, M - N \,\| \leq \varepsilon$.
4. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Supposons donnée une suite $(N_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de matrices diagonalisables telle que $\|\, M - N_n \,\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer que M est trigonalisable.

C8. 166. *Exercice.* — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Posons :

$$|| A || = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, .$$

Démontrer que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(A) \subset [-\, || A || \, , || A ||]$.

C8. 167. *Exercice.* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ tel que $0 < |\lambda| < \varepsilon$, $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$.
2. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons $|| M || = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$. Démontrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbf{C})$, il existe une suite (M_n) de matrices inversibles telle que $|| M - M_n || \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

C8. 168. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que tout endomorphisme de E a au-moins une valeur propre. Est-ce vrai si E n'est pas de dimension finie ?
Indication : On pourra considérer l'endomorphisme φ de $\mathbf{C}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbf{C}[X]$, $\varphi(P) = (X-1)P(X)$.

C8. 169. *Exercice (Centrale).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A et μ_A son polynôme minimal.

1. Caractériser en fonction de χ_A et de μ_A les caractères diagonalisable et trigonalisable de A.
2. On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.
   (a) Démontrer que si χ_A est scindé, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, χ_{A^k} est scindé.
   (b) Démontrer que si χ_{A^2} est scindé à racines réelles positives, alors χ_A est scindé.
   (c) Donner un exemple de matrice A pour laquelle χ_{A^2} est scindé mais pas χ_A.
3. On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
   (a) On suppose que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbf{C})$, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p X = X$. Démontrer que A est diagonalisable.
   (b) On suppose A non diagonalisable. Démontrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $(A - \lambda I_n)^2 X = 0$ et $(A - \lambda I_n) \neq 0$.
   (c) On suppose A inversible et que pour tout $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, la suite $\left(A^k X\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est bornée. Démontrer que A est diagonalisable.

C8. 170. *Exercice (Centrale).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$.

1. On suppose A diagonalisable et inversible.
   (a) Calculer B^2.
   (b) Démontrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(B^2) = 0$.

   (c) Démontrer que B est diagonalisable et inversible.
2. On suppose B diagonalisable et inversible.
   (a) Exprimer B^p en fonction des puissances de A.
   (b) Démontrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(B) = 0$, puis deux polynômes Q et R tels que $P(X) = Q(X^2) + XR(X^2)$.
   (c) Calculer $Q(A)$ et $R(A)$.
   (d) Démontrer que le pgcd de q et de R est scindé à racines simples.
   (e) Démontrer que A est diagonalisable et inversible.
3. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice B est-elle diagonalisable ?

C8. 171. *Exercice (Centrale).* — On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et on pose

$$\left| \begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ & & M & \mapsto & M\,{}^tA - AM. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
2. Démontrer que si X et Y sont des valeurs propres de A, alors $X\ {}^tY$ est une valeur propre de f.
3. Soit λ une valeur propre de f, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ un vecteur propre associé.
   (a) Démontrer que pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, $P(A)B = BP({}^tA - \lambda I_n)$.
   (b) On se donne $Q \in \mathbf{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, λ et les racines de Q pour que $Q({}^tA - \lambda I_n)$ soit inversible.
   (c) Démontrer que λ est différence de deux valeurs propres de A.
4. Exprimer le spectre de f en fonction de celui de A.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de A pour que f soit un automorphisme.
6. Démontrer que si A est diagonalisable, alors f est diagonalisable.
7. Démontrer que f est nilpotente si et seulement si A est nilpotente. Que dire de leurs indices de nilpotence ?

C8. 172. *Exercice (Mines).* — Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ semblables à leur carrés.

C8. 173. *Exercice (Mines).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \ldots = \mathrm{Tr}\left(A^n\right) = 0.$$

C8. 174. *Exercice (Mines).* — Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,j} = j$ pour $i \neq j$ et $a_{i,i} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\chi_A(-k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

C8. 175. *Exercice (Mines).* — Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables. Démontrer que $\dim F \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$. Démontrer que cette borne est optimale.

C8. 176. *Exercice (X).* — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $R_i := \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

1. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Démontrer que A est inversible.
2. Démontrer que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z - a_{i,i}| \leq R_i\}$.
3. On suppose à nouveau que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Démontrer que :
$$|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^{n} \left(|a_{i,i}| - R_i\right).$$
4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} > R_i$. Démontrer que :
$$\det(A) \geq \prod_{i=1}^{n} \left(|a_{i,i}| - R_i\right).$$

C8. 177. *Exercice (ENS).* — Notons S l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telles que :
$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1.$$
Les matrices de S sont appelées ***matrices stochastiques.*** Soit $M \in S$, soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre complexe de A, soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. Démontrer que $|\lambda| \leq 1$. Démontrer que 1 est valeur propre de M.
2. Supposons λ de module 1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} |x_j|$. Démontrer qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j = \lambda x_i$.
3. En déduire que λ est une racine m-ième de l'unité, avec $m \leq n$.

C8. 178. *Exercice (ENS).* — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Notons $\mu_{\mathbb{Q}}$ le polynôme minimal de M en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ et $\mu_{\mathbf{R}}$ le polynôme minimal de M en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $\mu_{\mathbb{Q}} = \mu_{\mathbf{R}}$.

C8. 179. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal μ. Pour tout $x \in E$, notons :

- P_x le polynôme unitaire de degré minimal tel que $P_x(u)(x) = 0$.
- $E_x = \{P(f)(x),\ P \in \mathbf{K}[X]\}$.

1. Soit $x \in E$.
   (a) Démontrer que P_x existe et est unique, et que pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, $P(f)(x) = 0 \Longrightarrow P_x|P$.
   (b) Démontrer que E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\deg(P_x)$.
2. Soit $(x, y) \in E^2$.
   (a) Si $E_x \cap E_y = \{0\}$, montrer que $P_{x+y} = \mathrm{ppcm}(P_x, P_y)$. Généraliser à p vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E.
   (b) Si $P_x \wedge P_y = 1$, montrer que $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$. Généraliser à p vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E.
3. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un facteur irréductible de μ, notons α sa multiplicité dans la décomposition de μ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{K}[X]$. Démontrer qu'il existe $x \in \mathrm{Ker}\,(P)^{\alpha}(f)$ tel que $P_x = P^{\alpha}$.
4. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = \mu$.

C8. 180. *Exercice (X).* —

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0$. Démontrer que A est nilpotente.
2. Soit G un sous-groupe de de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, soit $(M_i)_{1\leq i\leq m} \in G^m$ une base de $\mathrm{Vect}\,(G)$. Posons
$$\left|\begin{array}{cccc} f & : & G & \to & \mathbf{C}^m \\ & & A & \mapsto & (\mathrm{Tr}(AM_i))_{1\leq i\leq m} \end{array}\right. .$$
   Soient $(A, B) \in G^2$ telles que $f(A) = f(B)$. Démontrer que $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.
3. On suppose que toutes les matrices de G sont diagonalisables. Démontrer que f est injective.
4. Supposons que pour toute matrice $M \in G$, il existe $n_M \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^{n_M} = I_n$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que : $\forall M \in G,\ M^N = I_n$. *Ce résultat est un théorème dû à Burnside.*

C8. 181. *Exercice (ENS).* —

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$. Supposons qu'il existe un polynôme complexe P non nul scindé à racines simples de module strictement inférieur à 1 tel que $P(A) = 0$. Démontrer que $A = 0$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \ :\ M^{-1} \in M_n(\mathbf{Z})\}$. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Démontrer que l'application qui à toute matrice $M \in G$ associe la matrice $\overline{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ dont les coefficients sont obtenus en prenant la réduction modulo p des coefficients de M est injective. En déduire qu'il existe $M_n \in \mathbf{N}$ telle que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ soit de cardinal majoré par M_n.