15. PROBABILITES

§ 1 ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

C15.1. NOTATION (ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE) L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathscr{P}(E)$.

C15.2. REMARQUE Si E est un ensemble et A est un objet, alors $\boxed{A \in \mathscr{P}(E) \text{ si et seulement si } A \subset E}$.

C15.3. REMARQUE Soit E un ensemble. Comme $\emptyset$ et E sont des parties de E, on a $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

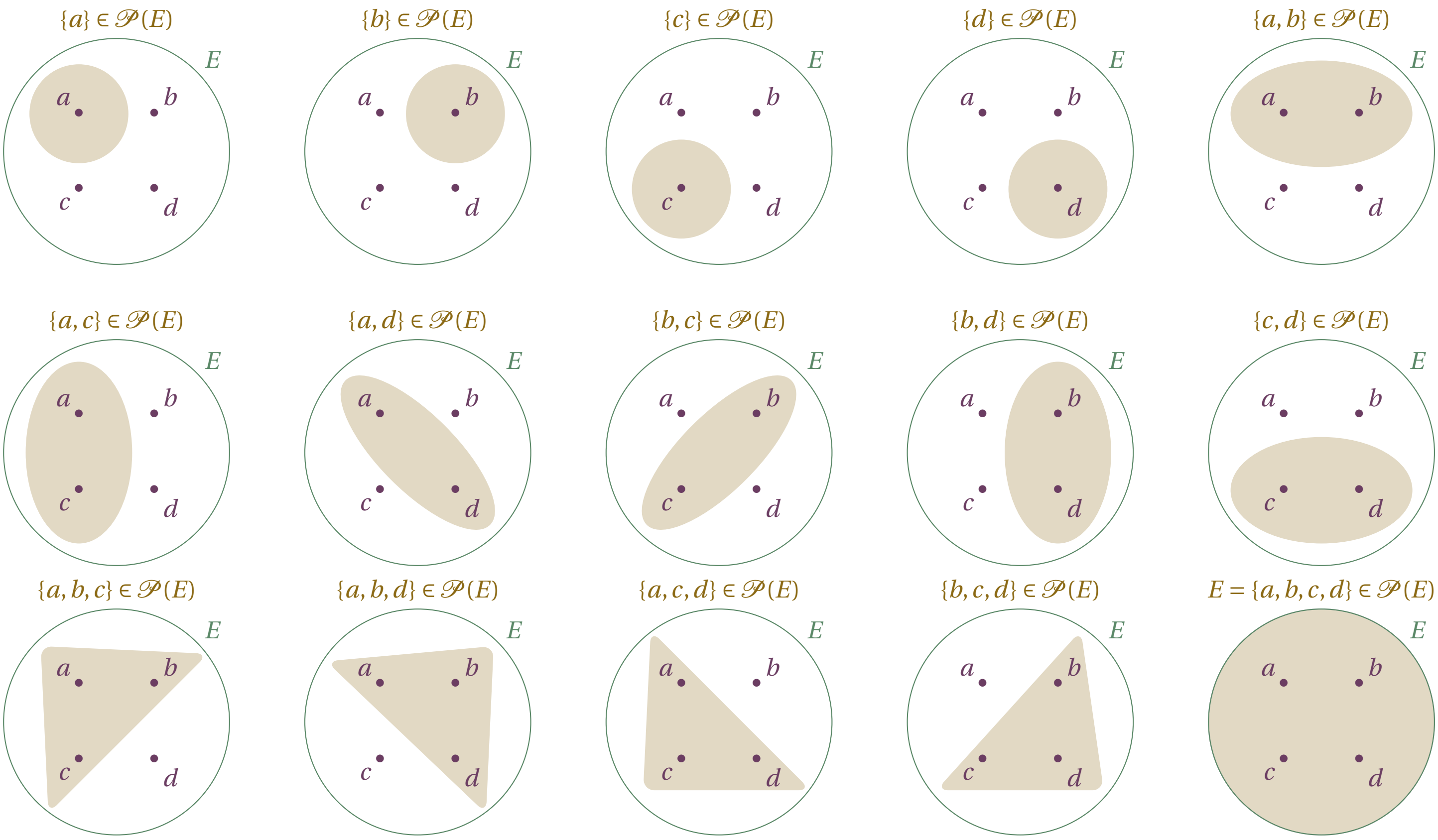
C15.4. EXEMPLES Si E est un ensemble et A est un objet, alors $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

C15.5. EXEMPLES $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

C15.6. EXEMPLES $\mathscr{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

C15.7. EXEMPLES $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

C15.8. EXEMPLE Soit $E = \{a,b,c,d\}$ un ensemble de cardinal 4. Nous représentons ci-dessous toutes les parties de E non vides.



Ainsi $\mathscr{P}(\{a,b,c,d\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$.

§ 2 TRIBU ET ESPACE PROBABILISABLE

C15.9. DÉFINITION (TRIBU SUR UN ENSEMBLE) Soit Ω un ensemble. Une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est appelée **tribu sur Ω** si :

(a) $\mathscr{A}$ contient l'ensemble vide, i.e. $\emptyset \in \mathscr{A}$.

(b) $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire, i.e. pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} := \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$.

(c) $\mathscr{A}$ est stable par réunion dénombrable, i.e. pour tout $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

C15.10. Définition (Espace probabilisable) Un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé **espace probabilisable**, si Ω est un ensemble et si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω.

C15.11. Propriétés élémentaires d'une tribu Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur un ensemble Ω.

(a) $\Omega \in \mathscr{A}$

(b) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

(c) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, alors $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{A}$.

(d) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{A}$.

(e) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.

(f) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$.

C15.12. Exemple (Tribu pleine) Pour tout ensemble Ω, l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée tribu pleine.

C15.13. Exemple (Tribu minimale) Pour tout ensemble Ω, l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée tribu pleine.

C15.14. Exemple (Tribu engendrée par une partie) Soit Ω un ensemble et soit A une partie de Ω. L'ensemble $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée tribu engendrée par A.

C15.15. Vocabulaire des probabilités Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

(a) L'ensemble Ω est appelé l'**univers**.

(b) Un élément A de $\mathscr{A}$ est appelé **événement**.

(c) L'événement $\emptyset$ est appelé **événement impossible**.

(d) Les événements de la forme $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, i.e. les singletons appartenant à $\mathscr{A}$, sont appelés **événements élémentaires**.

(e) Étant donné un événement A son complémentaire $\overline{A}$ est appelé **événement contraire de A**.

(f) Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B$ est l'événement impossible, i.e. si $A \cap B = \emptyset$.

C15.16. Exercice Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements. Démontrer que les deux parties de Ω suivantes

$$\limsup A_n := \{\omega \in \Omega \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geqslant n,\ \omega \in A_p\} \qquad \text{et} \qquad \liminf A_n := \{\omega \in \Omega \,:\, \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant n,\ \omega \in A_p\}$$

sont des événements.

Indication | Commencer par exprimer $\limsup A_n$ à l'aide des ensembles $\bigcup_{p\geqslant n} A_p$ et $\liminf A_n$ à l'aide des ensembles $\bigcap_{p\geqslant n} A_p$.

C15.17. Tribu sur un univers au plus dénombrable Si Ω est un ensemble au plus dénombrable (i.e. fini ou dénombrable) alors nous le munirons toujours de la tribu pleine $\mathscr{P}(\Omega)$ pour obtenir l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

C15.18. Univers, tribu et modélisation Considérons une expérience aléatoire, i.e. une expérience dont le résultat dépend du hasard. L'univers Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles. La tribu $\mathscr{A}$ sera l'ensemble des parties de Ω dont les probabilités nous intéressent.

C15.19. Exemple de modélisation (1ère partie) Nous lancés un dé icosaédrique dont les faces son numérotées de 1 à 20. L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$ qui est de cardinal 20. Nous le munissons de la tribu pleine $\mathscr{P}(\Omega)$ (cf. C15.17) qui comporte $2^{20} = 1\,048\,576$ éléments. L'ensemble

$$A := \text{« on a obtenu un nombre pair »} = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$$

est un événement. L'ensemble

$$B := \text{« on a obtenu le nombre 7 »} = \{7\}$$

est un événement élémentaire. Les événements A et B sont incompatibles.

§ 3 PROBABILITÉ ET ESPACE PROBABILISÉ

C15.20. DÉFINITION (PROBABILITÉ SUR UN ESPACE PROBABILISABLE) Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ est appelée **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si

(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(b) pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux-à-deux incompatibles, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

La propriété (b) se nomme **σ-additivité**.

C15.21. DÉFINITION (ESPACE PROBABILISÉ) Une **espace probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble, $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

C15.22. LIEN AVEC LA NOTION DE PROBABILITÉ VUE EN MPSI Soit Ω un ensemble fini, que l'on munit de sa tribu pleine $\mathscr{P}(\Omega)$. Soit $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ une application telle que

(a') $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(b') pour toute couple (A, B) d'événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Ce type d'application était appelée « probabilité » en MPSI. Cette application $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, au sens de la définition C15.20.

C15.23. EXERCICE Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit $\omega \in \Omega$. Posons :

$$\mathbb{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A\,. \end{cases} \end{array} \right. .$$

Démontrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Indication

Il s'agit de vérifier que l'application $\mathbb{P}$ satisfait les conditions (a) et (b) de la définition C15.20.
(a) L'élément ω appartient à Ω...
(b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements deux-à-deux incompatibles. L'élément ω appartient donc à au plus un des événements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On distingue deux cas.

- Cas où ω appartient à aucun des événements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Cas où ω appartient à unique événement A_{n_0} de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans chacun des deux cas calculer $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n)$.

C15.24. PROPOSITION (UN MODE DE DÉFINITION D'UNE PROBABILITÉ DANS LE CAS OÙ L'UNIVERS EST DÉNOMBRABLE) Soit Ω un ensemble dénombrable.

1. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Alors la famille $(\mathbb{P}(\{\omega\})_{\omega\in\Omega} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^{\Omega}$ est sommable, de somme 1.
2. Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^{\Omega}$ une famille sommable, de somme 1. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega.$$

C15.25. EXERCICE Soit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n := e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$. La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme 1. D'après C15.24, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$. Calculer $\mathbb{P}(\{2n+1 \,:\, n \in \mathbb{N}\})$.

Indication

Comme $\{2n+1 \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{2n+1\}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\{2n+1\})$ converge et $\mathbb{P}(\{2n+1 \,:\, n \in \mathbb{N}\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2n+1\})$.

C15.26. EXERCICE Soit $p \in]0,1[$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n := p(1-p)^{n-1}$. La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, de somme 1. D'après C15.24, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$. Calculer $\mathbb{P}\left(\{2n \,:\, n \in \mathbb{N}^*\}\right)$.

Indication — Comme $\{2n\ :\ n\in\mathbb{N}^*\}=\bigsqcup_{n=1}^{+\infty}\{2n\}$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(\{2n\})$ converge et $\mathbb{P}\left(\{2n\ :\ n\in\mathbb{N}^*\}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{2n\})$.

§ 4 Propriétés élémentaires des probabilités

C15.27. Proposition (Probabilité du vide, d'une réunion finie d'événements incompatibles, du contraire) Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) $\mathbb{P}(\varnothing)=0$

(b) Si $A_1,\dots,A_p$ sont des événements deux-à-deux incompatibles, alors $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{p}A_k\right)=\sum_{k=1}^{p}\mathbb{P}(A_k)$.

(c) Si A est un événement , alors $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathbb{P}(A)$.

La propriété (b) se nomme **additivité**.

C15.28. Proposition (Croissance d'une probabilité) Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B des événements.

$$A\subset B\quad\Longrightarrow\quad\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{P}(B).$$

C15.29. Proposition (Probabilité d'une réunion finie d'événements) Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Si A et B sont des événements, alors

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\leqslant\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)\,.$$

(b) Soient $n\geqslant 2$ un entier et $A_1,\dots,A_n$ des événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)\,.$$

C15.30. Théorème (Limite monotone) Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements croissante pour l'inclusion (pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n\subset A_{n+1}$). Alors

$$\mathbb{P}(A_n)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right).$$

(b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements décroissante pour l'inclusion (pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_{n+1}\subset A_n$). Alors

$$\mathbb{P}(A_n)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right).$$

C15.31. Corollaire (Probabilité d'une union/intersection dénombrable) Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}A_k\right)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k\right).$$

(b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{k}A_k\right)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_k\right).$$

C15.32. Proposition (Majoration de la probabilité d'une réunion dénombrable d'événements) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

en posant $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ dans le cas où la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ (à termes positifs) diverge.

C15.33. Exercice Un joueur lance indéfiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins un Pile ?

Indication

On souhaite calculer la probabilité de l'événement

$$A := \text{« le joueur a obtenu au mois un Pile lors de tous ses lancers »}.$$

Exprimer l'événement A à l'aide des événements

$$F_n := \text{« le joueur a obtenu Face au } n\text{-ième lancer »}$$

définis pour un entier naturel non nul n puis appliquer C15.31 et en supposant les lancers indépendants (hypothèse additionnelle que nous imposons).

C15.34. Construire des espaces probabilisés peut s'avérer fort délicat Nous avons défini un cadre formel pour étudier les probabilités : les espaces probabilisés généraux $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Lorsque nous considérons une expérience aléatoire, comme dans l'exercice C15.33, et que nous souhaitons calculer des probabilités, nous devons, tout d'abord définir un espace probabilisé.
Dans l'exercice C15.33, il est raisonnable de poser $\Omega := \{\text{Pile}, \text{Face}\}^{\mathbb{N}^*}$ (ensemble infini, non dénombrable). Un élément $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Ω représentera la liste des résultats obtenus lors de tous ses lancers. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, ω_n égalera Pile si le jouer à obtenu Pile au n-lancer et vaudra Face sinon.
Il est souhaitable que

- (C1) la tribu $\mathscr{A}$ à placer sur Ω contienne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la partie $A_n := \{(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}^*} : \omega_1 = \ldots = \omega_n = \text{Pile}\}$ de Ω ;
- (C2) la probabilité $\mathbb{P}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Mais construire une tribu $\mathscr{A}$ et une probabilité $\mathbb{P}$ satisfaisant les deux conditions précédentes est loin d'être élémentaire (et est hors programme). C'est pourquoi, nous serons parfois amener à supposer l'existence d'un espace probabilisé modélisant une expérience aléatoire donnée, sans analyser plus avant la problématique de l'existence.

C15.35. Exercice (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n := \bigcup_{k\geqslant n} A_k$. Montrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Que dire de la suite $(\mathbb{P}(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Montrer que $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que dire de $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$?

(c) Notons A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tel qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\omega \in A_n$. Montrer que A est un événement, puis que $\mathbb{P}(A) = 0$.

Indication

(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$. Commencer par étudier la monotonie et le caractère borné de la suite numérique $(\mathbb{P}(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$...
(b) C15.32, C15.31 et propriété remarquable du reste d'une série convergente.
(c) Démontrer l'identité $A = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant n, \omega \in A_k\}$ et en déduire une écriture de A à l'aide des ensemble B_n.

C15.36. Définition (Événement négligeable, événement presque sûr) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Un événement A est dit **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$.

(b) Un événement A est dit **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

C15.37. Reformulation du lemme de Borel-Cantelli Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Dans l'exercice C15.35, nous avons démontré que l'événement

$$A := \{\omega \in \Omega \,:\, \text{il existe une infinité d'entiers } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \omega \in A_n\}$$

est négligeable. Donc l'événement nous avons démontré que l'événement

$$\overline{A} := \{\omega \in \Omega \,:\, \omega \text{ appartient à un nombre fini des événements } A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$$

est presque sûr.

C15.38. Propriété (des événements négligeables et des événements presque sûrs) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements négligeables. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est négligeable.

(b) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements presque sûrs. Alors $\bigcap_{i\in I} A_i$ est presque sûr.

§ 5 Probabilités conditionnelles

C15.39. Définition (Probabilité conditionnnelle) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Soient B un événement **non négligeable** et A un événement quelconque. La **probabilité conditionnelle de A sachant B** notée :

$$\mathbb{P}(A\,|\,B) \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{P}_B(A)$$

est définie par :

$$\mathbb{P}(A\,|\,B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(b) Soient B un événement **négligeable** et A un événement quelconque. On pose $\mathbb{P}(A\,|\,B) := 0$ par convention.

C15.40. Exercice (Probabilité conditionnelle et modélisation) On lancé un dé non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note A l'événement « le dé a amené le chiffre 6 ».

(a) Que vaut $\mathbb{P}(A)$?

(b) On suppose désormais que l'événement $B :=$ « le dé a amené un nombre pair » est réalisé. En quoi cette information modifie-t-elle la probabilité de l'événement A ?

(c) Justifier, sur cet exemple, la définition C15.39 de probabilité conditionnelle.

C15.41. Propriété (Une probabilité conditionnelle est une probabilité) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement non négligeable. Alors l'application

$$\mathbb{P}_B \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

C15.42. Théorème (Formule des probabilités composées) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soient A, B des événements. Alors
$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B\,|\,A).$$
2. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Alors
$$\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2\,|\,A_1) \times \mathbb{P}(A_3\,|\,A_1\cap A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{n-1}\,|\,A_1\cap\ldots\cap A_{n-2}) \times \mathbb{P}(A_n\,|\,A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

C15.43. Exercice Une urne contient une boule rouge et une boule noire. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne, en ajoutant une boule de la même couleur. On poursuit indéfiniment le procédé. Montrer qu'une boule rouge sera presque sûrement tirée.

Indication

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note R_k l'événement « la boule rouge a été tirée lors du k-ième tirage » de sorte que

$$\text{« la boule noire apparaîtra lors des tirages »} \quad = \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k\,.$$

Il s'agit de démontrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k\right) = 1$ ou encore que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{R_k}\right) = 0$.

Calculer, $\mathbb{P}\left(\overline{R_1}\right)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\overline{R_n} \,|\, \overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{n-1}}\right)$. Appliquer ensuite C15.42 et C15.31.

C15.44. Définition (Système complet d'événements) Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements, où I est un ensemble au plus dénombrable, est appelée **système complet d'événements** si

(a) les A_i sont deux-à-deux incompatibles, i.e. pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;

(b) la réunion de tous les A_i est Ω, i.e. $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

C15.45. Deux exemples fondamentaux de systèmes complets d'événements

(a) Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit A un événement. Alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.

(b) Soit Ω un ensemble dénombrable, que l'on munit de sa tribu pleine $\mathscr{P}(\Omega)$. Alors $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événements.

C15.46. Théorème (Formule des probabilités totales) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B

(a) la famille $(\mathbb{P}(B \,|\, A_i)\, \mathbb{P}(A_i))_{i \in I}$ est sommable;

(b) $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \,|\, A_i)\, \mathbb{P}(A_i)\,.$

C15.47. Exercice On lance un dé non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. Si le dé a amené le chiffre k, alors on lance k fois une pièce équilibrée. Quelle la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile?

Indication

On note B l'événement « on a obtenu au moins une fois Pile » et, pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, A_k l'événement « le dé a amené le chiffre k ». Appliquer la formule des probabilités totales C15.46 relativement au système complet d'événements $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ pour calculer $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$.

C15.48. Exercice Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient un 6, il tire une boule de l'urne. Sinon, on ajoute une boule noire dans l'urne et on rejoue à nouveau. Quelle est la probabilité que la boule rouge soit tirée?

Indication

On note B l'événement « la boule rouge est tirée » et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k l'événement « le joueur a tiré dans l'urne après k lancers du dé ». On note en outre A_∞ l'événement « le joueur n'a jamais tiré dans l'urne ». Appliquer la formule des probabilités totales C15.46 relativement au système complet d'événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant \infty}$ pour calculer $\mathbb{P}(B)$.

C15.49. Proposition (Formule de Bayes) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Soient A, B des événements, tout deux non négligeables. Alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)\,\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(b) Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements, formé d'événements tous non négligeables. Pour tout événement B non négligeable, pour tout $i \in I$

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j\in J} \mathbb{P}\left(B \mid A_j\right)\mathbb{P}(A_j)}.$$

C15.50. Exercice Vous êtes directeur de cabinet du Ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si elle a une réponse positive au test et commenter.

Indication

On note M l'événement « La personne est malade » et T l'événement « le test est positif ». Appliquer la formule de Bayes C15.49 pour calculer $\mathbb{P}(M \mid T)$ en considérant le système complet d'événements $\left(M, \overline{M}\right)$.

§ 6 Événements indépendants

C15.51. Définition (Couples d'événements indépendants) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. **Deux événements A, B sont dits indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

C15.52. Proposition (Propriétés élémentaires portant sur l'indépendance de deux événements) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A, B deux événements indépendants, avec B non négligeable.

(a) $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$

(b) Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

(c) Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ dont indépendants.

C15.53. Définition (Événements mutuellement indépendants) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'événements. On dit que **les événements A_i sont mutuellement indépendants** si pour tout ensemble fini $J \subset I$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

C15.54. Exercice On considére l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et les événements A, B, C définis respectivement par

$A :=$ « le premier chiffre est pair » $\quad B :=$ « le deuxiéme chiffre est impair » $\quad C :=$ « la somme des chiffres est paire » .

Démontrer que les événements A, B, C sont deux-à-deux indépendants, mais **pas** mutuellement indépendants.

Indication

Soit D_1 (resp. D_2) la variable aléatoire égale au chiffre obtenu lors du premier (resp. deuxième) lancer de dé. Comme les deux lancers sont supposés indépendants (hypothèse additionnelle), pour tout $(i, j) \in [\![1,6]\!]^2$, les événements $(D_1 = i)$ et $(D_2 = j)$ sont indépendants.
(a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(D_1 = i)$, $\mathbb{P}(D_2 = j)$ et $\mathbb{P}((D_1 = i) \cap (D_2 = j))$ pour tout $(i, j) \in [\![1,6]\!]^2$.
(b) Exprimer les événements A, B, C, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$ et $A\cap B\cap C$ à l'aide des événements $(D_1 = i)$ et $(D_2 = j)$, puis calculer leurs probabilités.
(c) Vérifier $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

C15.55. Proposition (Sous famille d'événements mutuellement indépendants) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Pour tout $J \subset I$, la famille $(A_j)_{j\in J}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

C15.56. Proposition (Événements mutuellement indépendants et événements contraires) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Pour tout $i \in I$, notons

$$A_{i,0} = A_i \qquad \text{et} \qquad A_{i,1} = \overline{A_i}\,.$$

Pour toute famille $(\varepsilon_i)_{i\in I} \in \{0,1\}^I$, la famille $\left(A_{i,\varepsilon_i}\right)_{i\in I}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

C15.57. Reformulation de la proposition C15.56 Si dans une famille d'événements mutuellement indépendants, on remplace certains des événements par leurs événements contraires alors la mutuelle indépendance est préservée.

C15.58. Exercice On considère une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ lors d'un lancer. On lance indéfiniment cette pièce. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir Pile pour la première fois au n-ième lancer.

Indication

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement

$$T_n := \text{« on a obtenu Pile pour la première fois lors du } n\text{-ième lancer »}\,.$$

On introduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement

$$F_k := \text{« on a obtenu Face au } k\text{-ième lancer »}\,.$$

Les lancers étant indépendants (hypothèse additionnelle), la famille $(F_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.
Exprimer T_n à l'aide des événements F_k, puis calculer $\mathbb{P}(T_n)$.

§ 7 Variable aléatoire discrète et loi d'une telle

C15.59. Définition (Variable aléatoire discrète) Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un ensemble. Une application $X : \Omega \longrightarrow E$ est appelée **variable aléatoire discrète** si

(a) l'ensemble $X(\Omega) := \{X(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\}$ est au plus dénombrable (i.e. fini ou dénombrable) ;

(b) pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.

C15.60. Théorème (Loi d'une variable aléatoire discrète) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble, soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète. Pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, la partie de Ω définie par

$$(X \in A) := X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \in A\}$$

est un événement ; on peut donc poser

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right).$$

1. L'application

$$\mathbb{P}_X \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_X(A) \end{array} \right.$$

   est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$, appelée **loi de X**.

2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, on pose :

$$(X = x) := X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) = x\}.$$

   La famille $((X = x)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements canoniquement associé à X**.

3. La probabilité $\mathbb{P}_X$ est entièrement déterminée par la donnée des valeurs $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}_X(\{x\})$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

C15.61. Problématique L'étude d'une variable aléatoire discrète consiste essentiellement à déterminer sa loi. Souvent, l'espace probabilisé de départ $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ n'apparaîtra que de manière implicite, et ne sera pas au cœur de l'étude.

C15.62. Proposition (Événements définis à l'aide d'une variable aléatoire discrète réelle) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. Alors, pour tout $x \in X(\Omega)$ les quatre parties suivantes de Ω

$$(X \geqslant x) := X^{-1}([x;+\infty[) \qquad (X > x) := X^{-1}(]x;+\infty[) \qquad (X \leqslant x) := X^{-1}(]-\infty;x]) \qquad (X < x) := X^{-1}(]-\infty;x[)$$

sont des événements, i.e. appartiennent à la tribu $\mathscr{A}$.

C15.63. Proposition (Image d'une variable aléatoire discrète) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble, soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète. Soient F un ensemble et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. l'application $f \circ X : \Omega \longrightarrow F$, notée aussi $f(X)$, est une variable aléatoire discrète ;
2. la loi de $f(X)$ est entiérement déterminée par la loi de X, précisément

$$\forall A \in \mathscr{P}(f(X(\Omega))), \quad \mathbb{P}_{f(X)}(A) = \mathbb{P}_X\left(f^{-1}(A)\right).$$

C15.64. Généralisation de la proposition C15.63 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, respectivement à valeurs dans $E_1, \ldots, E_n$. Soient F un ensemble et $f : X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \longrightarrow F$ une application. Alors l'application

$$f(X_1, \ldots, X_n) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ \omega & \longmapsto & f(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète.

C15.65. Exercice (Deux lancers d'un dé non truqué à 4 faces – Partie 1) On lance un dé non truqué à 4 faces numérotées de 1 à 4. Soit D_1 (resp. D_2) la variable aléatoire égale au résultat obtenu lors du premier (resp. deuxième) lancer.

(a) Déterminer les lois des variables aléatoires D_1 et D_2.
(b) Soit $(i, j) \in D_1(\Omega) \times D_2(\Omega)$. Que vaut la probabilité $\mathbb{P}((D_1 = i) \cap (D_2 = j))$?
(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $S := D_1 + D_2$.
(d) Déterminer la loi de la variable aléatoire $M := \max(D_1, D_2)$.

Indication

(a) Déterminer l'ensemble $D_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire D_1. Donner ensuite, pour tout $i \in D_1(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}(D_1 = i)$ en justifiant. Que dire des lois de D_1 et de D_2 ?
(b) Les deux lancers de dé sont implicitement supposés indépendants.
(c) Déterminer l'ensemble $S(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire S. Il reste à calculer, pour tout $s \in S(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(S = s)$. Pour ce faire, exprimer tout d'abord, pour tout $s \in S(\Omega)$, l'événement $(S = s)$ à l'aide des événements $(D_1 = i)$ et $(D_2 = j)$ où $(i, j) \in D_1(\Omega) \times D_2(\Omega)$.
(d) Procéder comme en (c).

§ 8 Couple de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales

C15.66. Définition (Loi conjointe, loi marginale) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires discrètes.

1. La loi de la variable aléatoire discrète

$$Z \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est appelée **loi conjointe** de X et Y.
2. Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales** de Z.

C15.67. Exercice (Deux lancers d'un dé non truqué à 4 faces – Partie 2) On lance un dé non truqué à 4 faces numérotées de 1 à 4. Soit D_1 (resp. D_2) la variable aléatoire égale au résultat obtenu lors du premier (resp. deuxième) lancer. On définit deux nouvelles variables aléatoires en posant $S := D_1 + D_2$ et $M := \max(D_1, D_2)$. On souhaite calculer la loi du couple (M, S) et observer un éventuel lien entre la loi de ce couple et ses lois marginales (i.e. les lois de M et S). Dans l'exercice C15.65, nous avons établi

(a) $D_1 \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$ et $D_2 \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$;
(b) pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,6 \rrbracket^2$, les événements $(D_1 = i)$ et $(D_2 = j)$ sont indépendants ;
(c) $S(\Omega) = \llbracket 2,8 \rrbracket$;
(d) $M(\Omega) = \llbracket 1,4 \rrbracket$.

La variable aléatoire (M,S) prend ses valeurs dans $\llbracket 1,4 \rrbracket \times \llbracket 2,8 \rrbracket$. Calculer, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,4 \rrbracket \times \llbracket 2,8 \rrbracket$, $\mathbb{P}((M,S) = (i,j))$ **en utilisant uniquement les lois de** D_1 **et** D_2, puis reporter les valeurs obtenues dans le tableau ci-dessous.

valeurs de j / valeurs de i	2	3	4	5	6	7	8	somme des valeurs sur les lignes
1								
2								
3								
4								
somme des valeurs sur les colonnes								

Qu'observe-t-on dans la dernière ligne (resp. colonne) ?

Indication — Soit $(i,j) \in \llbracket 1,4 \rrbracket \times \llbracket 2,8 \rrbracket$. Pour calculer la probabilité $\mathbb{P}((M,S) = (i,j))$ commencer par exprimer l'événement $(M,S) = (i,j)$ à l'aide des événements $(D_1 = i)$ et $(D_2 = j)$ où $(i,j) \in \llbracket 1,4 \rrbracket^2$.

C15.68. Proposition (La loi conjointe détermine les lois marginales) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires discrètes, posons $Z = (X,Y)$.

(a) Pour tout $i \in X(\Omega)$, la famille $\big(\mathbb{P}(Z = (i,j))\big)_{j \in Y(\Omega)}$ est sommable et

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Z = (i,j)) .$$

(b) Pour tout $j \in Y(\Omega)$, la famille $\big(\mathbb{P}(Z = (i,j))\big)_{i \in X(\Omega)}$ est sommable et

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(Z = (i,j)) .$$

La loi de Z détermine donc entièrement les lois de X et Y.

C15.69. Attention Les lois marginales ne déterminent pas nécessairement la loi conjointe.

C15.70. Définition (Loi conditionnelle de Y sachant $(X \in A)$) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \longrightarrow F$ deux variables aléatoires discrètes, soit $A \subset X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X \in A) > 0$. La **loi conditionnelle de** Y **sachant** $(X \in A)$ est la loi de Y pour la probabilité $\mathbb{P}_{(X \in A)}$, i.e. :

$$\forall B \subset Y(\Omega), \qquad \mathbb{P}(Y \in B \mid X \in A) = \frac{\mathbb{P}(Y \in B, X \in A)}{\mathbb{P}(X \in A)} .$$

C15.71. Définition (Loi conjointe de n variables aléatoires) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient

$$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1, \ldots, ..., X_n : \Omega \longrightarrow E_n$$

des variables aléatoires discrètes.

(a) La loi de la variable aléatoire discrète $Z = (X_1, ..., X_n)$ est appelée **loi conjointe des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$**.

(b) Les lois des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont appelées **lois marginales de Z**.

C15.72. Dans la situation de la définition C15.71, les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe.

§ 9 Indépendance de variables aléatoires

§ 9.1 Indépendance de deux variables aléatoires

C15.73. Définition (Couple de variables aléatoires indépendantes) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes** si pour tout $A \in X(\Omega)$ et tout $B \in Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

C15.74. Propriété (Indépendance et loi conditionnelle) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Si X et Y sont indépendantes, pour tout $A \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X \in A) > 0$, la loi de Y sachant $X \in A$ est égale à la loi de Y.

C15.75. Propriété (Critère fondamental d'indépendance) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\, \mathbb{P}(Y = y).$$

C15.76. Propriété (Indépendance et images) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, soient f, g des fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \quad \Longrightarrow \quad f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont indépendantes.}$$

§ 9.2 Indépendance d'un nombre fini de variables aléatoires

C15.77. Définition (Familles finies de variables aléatoires indépendantes) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que n variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $A_1 \subset X_1(\Omega), \ldots, A_n \subset X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

C15.78. Théorème (Indépendance par paquets ou lemme des coalitions) Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes. Soit $m \in [\![1, n-1]\!]$, soient deux applications

$$f : X_1(\Omega) \times \ldots \times X_m(\Omega) \longrightarrow E \qquad \text{et} \qquad g : X_{m+1}(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \longrightarrow F.$$

Alors les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_m)$, $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

§ 9.3 Indépendance d'un nombre infini de variables aléatoires

C15.79. Définition (Familles infinies de variables aléatoires indépendantes) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit I un ensemble. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si pour toute partie J finie de I, la famille $(X_i)_{i \in J}$ est constituée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

C15.80. Théorème (Existence d'une suite infinie de variables aléatoires indépendantes) Soit E un ensemble dénombrable, soit $\mathscr{L}$ une probabilité sur $(E, \mathscr{P}(E))$. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et à valeurs dans E, mutuellement indépendantes et de même loi $\mathscr{L}$.

C15.81. Remarque C'est souvent ce théorème que nous appliquerons pour obtenir un cadre théorique, dans les situations où nous répèterons indéfiniment un jeu (e.g. lancer d'une pièce, lancer d'un dé).

§ 10 Loi uniforme dans le cas fini

C15.82. Définition (Loi uniforme) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble, soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega)$ est fini.
On dit que **X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(X(\Omega))$**, si toutes les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, sont égales ou, ce qui revient au même, si

$$\forall\, x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(X(\Omega))}.$$

C15.83. Reconnaissance d'une situation de loi uniforme Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit E un ensemble. Une variable aléatoire discrète $X : \Omega \longrightarrow E$ suit une loi uniforme si et seulement si toutes les valeurs de la variable aléatoire X possèdent la même probabilité. Si tel est le cas, alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(X(\Omega))$.

C15.84. Situations de loi uniforme

(a) On lance un dé équilibré, à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note X_1 la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. Alors $X_1(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et, comme le dé est équilibré, toutes les valeurs de X_1 ont la même probabilité d'apparaître. Donc $X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 6]\!])$ et

$$\forall\, x \in [\![1, 6]\!] \quad \mathbb{P}(X_1 = x) = \frac{1}{6}.$$

(b) On dispose 100 boules numérotées de 0 à 99, indiscernables au toucher dans une urne. On en tire une et on note N le chiffre obtenu. Alors $N(\Omega) = [\![0, 99]\!]$ et, comme les boules sont indiscernables au toucher, toutes les valeurs de N ont la même probabilité d'apparaître. Donc $N \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, 99]\!])$. On a donc

$$\forall\, x \in [\![0, 99]\!] \quad \mathbb{P}(N = x) = \frac{1}{100}.$$

§ 11 Loi de Bernoulli

C15.85. Définition (Loi de Bernoulli de paramètre p) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. On dit que **X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, où $p \in [0, 1]$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$**, si

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \qquad \text{et} \qquad P(X = 1) = p\,.$$

C15.86. Terminologie liée à une loi de Bernoulli Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète telle que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$.

(a) L'événement $(X = 1)$ est appelé « succès » et l'événement $(X = 0)$ est appelé « échec ».

(b) Le paramètre p de la loi de X est donc la probabilité d'avoir un succès.

C15.87. Reconnaissance d'une situation de loi de Bernoulli Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire discrète $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli si et seulement si son ensemble de valeurs $X(\Omega)$ est $\{0, 1\}$. Si tel est le cas, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, où $p := \mathbb{P}(X = 1)$.

C15.88. Proposition (Probabilité de l'échec pour une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(p)$) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète telle que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, où $p \in [0,1]$. Alors $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

C15.89. Exemples de situations de loi de Bernoulli

(a) On lance une pièce qui donne deux fois plus de Pile que de Face. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient Face et 0 sinon. Alors X suite une loi de Bernoulli, puis qu'elle a pour valeurs 0 et 1. Son paramètre est

$$p = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\text{« } \textit{on a obtenu Face} \text{ »}) = \frac{1}{3}.$$

(b) On lance un dé équilibré, dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient un chiffre multiple de 3 et 0 sinon. Alors X suite une loi de Bernoulli, puis qu'elle a pour valeurs 0 et 1. Son paramètre est :

$$p = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{3,6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

C15.90. Propriété (Loi de Bernoulli et indicatrice d'un événement) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A un événement. Alors la fonction indicatrice de A

$$\mathbb{1}_A \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p := \mathbb{P}(A)$.

C15.91. Deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi, sans être pour autant égales Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Alors les variables aléatoires X et $1-X$ ont la même loi, mais ne sont pas égales.

C15.92. Exercice Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, notons :

$$T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* \,:\, X_n(\omega) = 1\} & \text{si l'ensemble } \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, X_n(\omega) = 1\} \text{ est non vide} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que l'application T est une variable aléatoire discrète.

Indication

(a) Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et remarquer qu'il est dénombrable.
(b) Exprimer $T^{-1}(\{k\}) = 1$ comme un événement lié à la variable aléatoire X_1.
(c) Soit $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. En remarquant que

$$T^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \,:\, X_1(\omega) = \ldots = X_{k-1}(\omega) = 0 \text{ et } X_k(\omega = 1)\}$$

écrire $T^{-1}(\{k\})$ comme une réunion finie d'événements liés aux variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k$.
(d) En remarquant que

$$T^{-1}(\{+\infty\}) = \left\{\omega \in \Omega \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\omega) = 0\right\}$$

écrire $T^{-1}(\{k\})$ comme une réunion finie d'événements liés aux variables aléatoires X_k où $k \in \mathbb{N}^*$.

§ 12 Loi binomiale

C15.93. Heuristique pour la loi binomiale

Contexte.
On considére une expérience de Bernoulli, i.e. une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues : 0 (échec) et 1 (succès). La probabilité de succès est notée p (et donc $p \in [0,1]$).
On fixe un entier naturel non nul n et on répète n fois cette expérience de Bernoulli de manière indépendante.

Définition de la variable aléatoire X.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Ensemble des valeurs prises par X.
L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Calcul de $\mathbb{P}(X = k)$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'événement $(X = k)$ correspond à l'obtention de k succès lors des n répétitions indépendantes de l'expérience de Bernoulli. Ainsi

$$(X = k) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n \ : \ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\right\}$$

où x_i représente le résultat de la i-ème répétition de l'expérience de Bernoulli. Comme l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \ : \ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\} & \longrightarrow & \mathscr{P}_k([\![1, n]\!]) \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & \{i \in [\![1, n]\!] \ : \ x_i = 1\} \end{array} \right.$$

est bijective

$$(\star) \qquad \mathrm{Card}(X = k) = \binom{n}{k}.$$

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (X = k)$, alors

$$\mathbb{P}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \mathbb{P}(\text{« } 1^{\text{ère}} \text{ répétition donne } x_1 \text{ »}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\text{« } n^{\text{ème}} \text{ répétition donne } x_n \text{ »})$$

car les répétitions sont indépendantes. Ensuite puisqu'il y a k fois le chiffre 1 et donc $(n - k)$ le chiffre 0 dans le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on a

$$\mathbb{P}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \mathbb{P}(\text{« } 1^{\text{ère}} \text{ répétition donne } x_1 \text{ »}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\text{« } n^{\text{ème}} \text{ répétition donne } x_n \text{ »}) = p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

On a donc établi que

$$(\star\star) \qquad \forall \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (X = k) \quad \mathbb{P}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

De $(\star)$ et $\star\star)$, on déduit que

$$\forall \, k \in [\![0, n]\!] \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

C15.94. Définition (Loi binomiale de paramètre (n, p)) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. On dit que **X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$**, si

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall \, k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

C15.95. Remarque Si $p \in [0, 1]$, alors la loi binomiale $\mathscr{B}(1, p)$ est simplement la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

C15.96. Remarque On conserve les notations de la définition C15.94. Comme $((X = k))_{k \in [\![1, n]\!]}$ est un système complet d'événements, $\bigsqcup_{k=0}^{n} (X = k) = \Omega$. Ainsi, par additivité d'une probabilité

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} (X = k)\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

et donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k} = 1$. On retrouve ainsi un cas particulier de la formule du binôme de Newton, car $(p + (1 - p))^n = 1$.

C15.97. Exercice Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, suivant la loi $\mathscr{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $S = X_1 + \ldots + X_n$.

Indication

(a) Déterminer l'ensemble $S(\Omega)$ des valeurs prises par S.
(b) Soit $k \in S(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}(S = k)$ en s'aidant de l'heuristique C15.93.
NB. Le résultat peut aussi être efficacement établi à l'aide des fonctions génératrices qui seront introduites plus loin.

C15.98. Reconnaissance d'une situation de loi binomiale Si l'on répète n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 et 1) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (i.e. de 1) obtenus, alors, d'après l'heuristique C15.93, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ où p est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli.

C15.99. Exemples de situations de loi binomiale

(a) On lance une pièce équilibrée 100 fois et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de Face obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$ car X compte le nombre de succès dans 100 répétitions d'une expérience de Bernoulli de manière indépendante. L'expérience de Bernoulli consiste en un lancer de la pièce (qui est équilibrée) avec comme résultat 1 si la pièce donne Face et 0 sinon.

$$\forall\, k \in [\![0,100]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{100}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} = \binom{100}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

(b) Dans une urne, on place une boule rouge et cinq boules noires. On effectue une suite de 10 tirages avec remise et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues. On répète donc 10 fois, de manière indépendante (car la boule tirée est remise), une expérience de Bernoulli. Celle-ci consiste à tirer une boule dans l'urne et à prendre comme issue 1 si la boule tirée est rouge et 0 sinon. La variable X compte le nombre de succès. Les boules ayant toutes la même probabilité d'être tirées (hypothèse additionnelle), la probabilité d'avoir un succès lors d'un tirage est $\frac{1}{6}$.

La variable X suit donc la loi $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$ et on a :

$$\forall\, k \in [\![0,10]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}.$$

§ 13 Loi de Poisson

C15.100. Définition (Loi de Poisson) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. On dit que **X suit la loi de Poisson de paramètre λ, où $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$**, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

C15.101. Théorème (Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$. Supposons que

$$n p_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \lambda > 0.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

C15.102. Exercice (Somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes) Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Supposons $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$, où $\lambda, \mu > 0$. Démontrer $X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

Indication

On note $S := X + Y$.
(a) Déterminer l'ensemble $S(\Omega)$ des valeurs prises par S.
(b) Soit $n \in S(\Omega)$. Pour calculer $\mathbb{P}(S=n)$, commencer par remarquer que l'on a

$$(S=n) = (X+Y=n) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \left((X=k) \cap (Y=n-k)\right)$$

puisque les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.
NB. Le résultat peut aussi être efficacement établi à l'aide des fonctions génératrices qui seront introduites plus loin.

C15.103. Pas de reconnaissance d'une situation de loi Poisson Il n'y a pas de situation type où l'on peut reconnaître la loi de Poisson. La loi de Poisson peut être vue comme une « loi limite » (cf. théoréme C15.101).

§ 14 Loi géométrique

C15.104. Définition (Loi géométrique) Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. On dit que **X suit la loi géométrique de paramètre p, où $p \in]0,1[$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$**, si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

C15.105. Reconnaissance d'une situation de loi géométrique Si l'on répète indéfiniment une expérience de Bernoulli (i.e. une expérience aléatoire ayant deux issues : 0 pour un échec et 1 pour un succès) de manière indépendante et si X est la variable aléatoire égale au rang du premier succès, alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$ est la probabilité de succès lors d'une réalisation de l'expérience de Bernoulli.

C15.106. Version formelle d'une reconnaissance d'une situation de loi géométrique Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, où $p \in]0,1[$. Posons

$$T := \min\left\{n \in \mathbb{N}^* \ :\ X_n = 1\right\} \text{ si l'ensemble } \left\{n \in \mathbb{N}^* \ :\ X_n = 1\right\} \text{ est non vide et } +\infty \text{ sinon.}$$

La variable aléatoire T, à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, représente le rang du premier succès d'une suite infinie d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. On vérifie aisément que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_1 = \ldots = X_{n-1} = 0 \text{ et } X_n = 1) = (1-p)^{n-1} p\,.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} (T = n)}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} (T = n)\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p = 0\,.$$

Nous pouvons donc considérer que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

C15.107. Théorème (Absence de mémoire pour une loi géométrique)

(a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$. Alors

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbb{P}\left(X > n + k \,|\, X > n\right) = \mathbb{P}(X > k).$$

(b) Réciproquement, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathbb{P}\left(X > n + k \,|\, X > n\right) = \mathbb{P}(X > k)$$

alors X suit une loi géométrique.

C15.108. Interprétation de la propriété d'absence de mémoire pour une loi géométrique C15.107 On dit que la loi géométrique n'a pas de mémoire car le temps d'attente du premier succès d'une suite infinie d'épreuves de Bernoulli ne dépend pas du temps déjà écoulé : si l'on n'a obtenu que des échecs après n tentatives, le temps d'attente, après ces n lancers, avant l'apparition du premier succès ne dépend pas de n.

C15.109. Exercice Minimum de deux variables géométriques indépendantes Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$. Démontrer que la variable $\min(X, Y)$ suit une loi géométrique.

Indication

On note $Z := \min(X, Y)$.
(a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z.
(b) Soit $n \in S(\Omega)$. Pour calculer $\mathbb{P}(S = n)$, commencer par remarquer que l'on a

$$(Z = n) = (\min(X, Y) = n) = \left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} ((X = n) \cap (Y = k))\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} ((X = k) \cap (Y = n))\right) \sqcup ((X = n) \cap (Y = n))$$

puisque les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

§ 15 Espérance

Dans toute cette partie, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Toutes les variables aléatoires considérées ici seront définies sur cet espace probabilisé.

C15.110. Définition (Espérance) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs complexes.

(a) On dit que **X possède une espérance**, ou que X est d'espérance finie, si la famille $(x\,\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.

(b) Si X possède une espérance, la somme de la famille sommable $(x\,\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est appelée **espérance de X et notée $\mathbf{E}(X)$**, i.e.

$$\mathbf{E}(X) := \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)\,.$$

C15.111. De l'espérance pour une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est fini Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs complexes telle que $X(\Omega)$ est fini de cardinal $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) La famille $(x\,\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et donc X admet une espérance.

(b) Considérons une bijection $\varphi\colon [\![1,n]\!] \longrightarrow X(\Omega)$ et posons, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $x_k := \varphi(k)$. Ainsi $x_1,\dots,x_n$ est une liste exhaustive et sans répétition des éléments de $X(\Omega)$. On a

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbb{P}(X=x_i)\,.$$

C15.112. De l'espérance pour une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est dénombrable Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs complexes telle que $X(\Omega)$ est dénombrable. Considérons une bijection $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow X(\Omega)$ et posons, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $x_k := \varphi(k)$. Ainsi $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ est une liste exhaustive et sans répétition des éléments de $X(\Omega)$. Les deux propriétés suivantes découlent du théorème de commutative convergence.

(a) La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n\,\mathbb{P}(X=x_n)$ est absolument convergente.

(b) Si X possède une espérance, alors

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\,\mathbb{P}(X=x_n)\,.$$

C15.113. Convention Soit X une variable aléatoire discrète. Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ et que la famille $(x\,\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ n'est pas sommable, on pose $\mathbf{E}(X) := +\infty$.

C15.114. Théorème (de domination pour l'espérance) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs complexes. Alors

$$\left(\begin{array}{c} |X|\leqslant Y \\ Y \text{ possède une espérance}\end{array}\right) \implies X \text{ possède une espérance}\,.$$

C15.115. Proposition (Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle) Soit X une variable aléatoire discrète.

(a) Si X est constante égale à a, alors X possède une espérance et $\mathbf{E}(X)=a$.

(b) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, où $p\in]0,1[$, alors X admet une espérance et $\mathbf{E}(X)=p$.

(c) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, où $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$, alors X admet une espérance et $\mathbf{E}(X)=np$.

(d) Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, où $\lambda>0$, alors X admet une espérance et $\mathbf{E}(X)=\lambda$.

(e) Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, où $p\in]0,1[$, alors X admet une espérance et $\mathbf{E}(X)=\dfrac{1}{p}$.

C15.116. Exercice Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs complexes. Supposons que X est bornée. Démontrer que X possède une espérance.

Indication | Comme X est bornée, il existe un réel M tel que $|X|\leqslant M$. Combiner ensuite C15.114 et C15.115.

C15.117. DÉFINITION (VARIABLE ALÉATOIRE CENTRÉE) Une variable aléatoire discrète X à valeurs complexes est dite **centrée** si elle possède une espérance et si $\mathbf{E}(X) = 0$.

C15.118. THÉORÈME (DE TRANSFERT) Soient X une variable aléatoire discrète et une application $f\colon X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$.

(a) La variable $f(X)$ possède une espérance si et seulement si la famille $(f(x)\,\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable;

(b) Si $f(X)$ possède une espérance alors

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X = x).$$

C15.119. PROPOSITION (POSITIVITÉ DE L'ESPÉRANCE) Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles positives, d'espérance finie.

(a) $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$;

(b) Si de plus $\mathbf{E}(X) = 0$, alors X est nulle presque sûrement, i.e. $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

C15.120. THÉORÈME (LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE)

(a) L'ensemble $\ell^1(\Omega,\mathscr{A},P)$ des variables aléatoires complexes possédant une espérance est un sous-espace vectoriel de $\Omega^{\mathbb{C}}$.

(b) L'application

$$\mathbf{E} \left| \begin{array}{ccc} \ell^1(\Omega,\mathscr{A},P) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ X & \longmapsto & \mathbf{E}(X) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire.

C15.121. EXERCICE (CENTRAGE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE D'ESPÉRANCE FINIE) Soit X une variable aléatoire à valeurs complexes possédant une espérance.

(a) Justifier que la variable aléatoire $aX + b$ possède une espérance et démontrer que $\mathbf{E}(aX + b) = a\,\mathbf{E}(X) + b$.

(b) Démonter que la variable aléatoire $X - \mathbf{E}(X)$ possède une espérance et qu'elle est centrée.

Indication
(a) Combiner C15.115 et C15.120.
(b) Appliquer le résultat établi en (a).

C15.122. THÉORÈME (INÉGALITÉ DE MARKOV) Soient X une variable aléatoire discrète **à valeurs réelles positives** possédant une espérance et $a \geqslant 0$.

$$a\,\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbf{E}(X).$$

C15.123. EXERCICE Soit X une variable aléatoire complexe possédant une espérance et $\varepsilon > 0$. Démontrer les trois inégalités suivantes.

(a) $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(|X|)}{\varepsilon}$

(b) $\mathbb{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(|X - \mathbf{E}(X)|)}{\varepsilon}$.

(c) $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}\left(\left|X^2\right|\right)}{\varepsilon^2}$.

Indication
Pour établir (a), (b) et (c), appliquer l'inégalité de Markov C15.122 en spécifiant X et a de manière pertinente.

C15.124. THÉORÈME (ESPÉRANCE DU PRODUIT DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes. On suppose que X et Y sont **indépendantes** et qu'elles possèdent une espérance. Alors XY admet une espérance et

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y).$$

§ 16 Moments, covariance, variance et écart-type

Dans toute cette partie, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Toutes les variables aléatoires considérées ici seront définies sur cet espace probabilisé.

§ 16.1 Moments d'une variable aléatoire

C15.125. Définition (Moments d'une variable aléatoire) Soit X une variable aléatoire discrète complexe, soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) On dit que **X possède un moment d'ordre n**, si la variable aléatoire X^n possède une espérance.

(b) Si tel est le cas, cette espérance est notée m_n et appelée **moment de X d'ordre n**

$$m_n = \mathbf{E}(X^n) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^n \, \mathbb{P}(X = x).$$

C15.126. Remarque (Une variable aléatoire fini possède des moments de tous ordres) Soit X une variable aléatoire à valeurs complexes telle que $X(\Omega)$ est fini. Alors X possède des moments de tous ordres. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^n prend un nombre fini de valeurs et donc possède une espérance.

C15.127. Proposition (Une variable aléatoire possédant un moment d'ordre 2 possède une espérance) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs complexes possédant un moment d'ordre 2. Alors X possède une espérance.

C15.128. Exercice Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leqslant m$. Si X possède un moment d'ordre m, alors elle possède un moment d'ordre n.

Indication

(a) Soit $\omega \in \Omega$. En distinguant les cas $|X(\omega)| \leqslant 1$ et $|X(\omega)| > 1$, démontrer que $|X(\omega)^n| \leqslant 1 + |X(\omega)^m|$.
(b) Déduire alors le résultat de l'inégalité $|X^n| \leqslant 1 + |X^m|$ en justifiant soigneusement à l'aide de résultats précédemment établis.

C15.129. Proposition (L'espace vectoriel $\ell^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$) L'ensemble $\ell^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ des variables aléatoires complexes possédant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de $\ell^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

C15.130. Lemme

(a) L'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \ell^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \times \ell^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \langle X, Y \rangle := \mathbf{E}(XY) \end{array} \right.$$

est bien définie, bilinéaire, symétrique, positive.

(b) Si $X \in \ell^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ vérifie $\langle X, X \rangle = \mathbf{E}\left(X^2\right) = 0$, alors $X = 0$ presque sûrement, i.e. $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, mais l'événement $(X = 0)$ ne coïncide pas nécessairement avec Ω. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est donc **pas définie**.

C15.131. Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles possédant un moment d'ordre 2. Alors XY possède une espérance et

$$|\mathbf{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathbf{E}\left(X^2\right) \, \mathbf{E}\left(Y^2\right)}.$$

C15.132. Exercice (Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles possédant un moment d'ordre 2 telle que $|\mathbf{E}(XY)| = \sqrt{\mathbf{E}\left(X^2\right) \, \mathbf{E}\left(Y^2\right)}$. Démontrer que si Y n'est pas nulle presque sûrement (i.e. $\mathbb{P}(Y = 0) \neq 1$) alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda Y$ presque sûrement, i.e. $\mathbb{P}(X = \lambda Y) = 1$.

Indication

D'après les hypothèses, l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left((tY + X)^2\right) \end{array} \right.$$

est polynomiale de degré 2, de discriminant nul. Elle possède donc une unique racine réelle...

§ 16.2 Covariance de deux variables aléatoires

C15.133. Définition (Covariance de deux variables aléatoires) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre 2. Alors $(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))$ possède une espérance, appelée **covariance de X et Y**

$$\mathbf{Cov}(X, Y) := \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))).$$

C15.134. Proposition (La covariance est une application bilinéaire symétrique positive) L'application

$$\mathbf{Cov} \left| \begin{array}{ccc} \ell^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \times \ell^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (X, Y) & \longmapsto & \mathbf{Cov}(X, Y) \end{array} \right.$$

est bilinéaire symétrique positive.

C15.135. Remarque (La covariance n'est pas définie). Soit $X \in \ell^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbf{Cov}(X, X) = 0$, i.e.

$$\mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) = 0\,.$$

Comme $(X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant 0$ nous en déduisons grâce à C15.119 que $X = E(X)$ presque sûrement, i.e. que $\mathbb{P}(X = \mathbf{E}(X)) = 1$. La variable aléatoire X n'est donc pas nécessairement nulle sur Ω.

C15.136. Proposition (Calcul pratique de la covariance) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes réelles possédant un moment d'ordre 2.

(a) $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

(b) En particulier, si X et Y sont indépendantes, $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

§ 16.3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

C15.137. Définition (Variance et écart-type) Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant un moment d'ordre 2. On définit alors **la variance $\mathbf{V}(X)$ de X** par

$$\mathbf{V}(X) := \mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) \geqslant 0.$$

On note alors $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ **l'écart-type de X**.

C15.138. Proposition (Formule de König-Huyghens) Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant un moment d'ordre 2.

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2\,.$$

C15.139. Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle Soit X une variable aléatoire discrète.

(a) Si X est constante égale à a, alors X possède un moment d'ordre 2 et $\mathbf{V}(X) = 0$.

(b) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$, alors X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbf{V}(X) = p(1 - p)$.

(c) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, alors X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbf{V}(X) = np(1 - p)$.

(d) Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbf{V}(X) = \lambda$.

(e) Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$, alors X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$.

C15.140. Proposition (Effet d'une transformation affine sur la variance) Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant un moment d'ordre 2. Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire $aX + b$ possède un moment d'ordre 2 et

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2\,\mathbf{V}(X).$$

C15.141. DÉFINITION (VARIABLE ALÉATOIRE RÉDUITE) Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On dit que **X est réduite** si elle possède un moment d'ordre 2 et si $\mathbf{V}(X) = 1$.

C15.142. EXERCICE (CENTRAGE ET RÉDUCTION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE D'ESPÉRANCE FINIE) Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles possédant un moment d'ordre 2. Démontrer que la variable aléatoire

$$\frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée et réduite.

Indication — C15.120 et C15.140

C15.143. PROPOSITION (INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV) Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant un moment d'ordre 2. Pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

C15.144. EXERCICE Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\,.$$

Indication —
(a) Commencer par déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire S_n (cf. C15.97).
(b) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (C15.143) en spécialisant X et ε de manière pertinente.

C15.145. PROPOSITION (VARIANCE D'UNE SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES)

(a) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes réelles possédant des moments d'ordre 2.

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathbf{Cov}(X\,,\,Y)$$

(b) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles possédant des moments d'ordre 2.

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) \;+\; 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbf{Cov}\left(X_i\,,\,X_j\right)$$

(c) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles **mutuellement indépendantes** possédant des moments d'ordre 2.

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i)$$

C15.146. EXERCICE Démontrer que si X et Y sont des variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre 2, alors

$$|\mathbf{Cov}(X\,,\,Y)| \leqslant \sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}\,.$$

Indication — Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz C15.131 en spécialisant X et Y de manière pertinente.

§ 17 Loi faible des grands nombres

C15.147. Théorème (Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes de même loi, admettant un moment d'ordre 2. Notons $m := \mathbf{E}(X_1)$ leur espérance commune. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\,.$$

C15.148. Interprétation fréquentielle de la loi faible des grands nombres La loi faible des grands nombres possède une interprétation fréquentielle très simple : si l'on répète un très grand nombre de fois une même expérience aléatoire, on s'attend à ce que le résultat moyen de ces expériences soit proche de l'espérance du résultat de chaque expérience. Ainsi, après un très grand nombre de lancers d'une pièce équilibrée, on s'attend à avoir presque autant de piles que de faces.

§ 18 Fonction génératrice d'une variable aléatoire

Dans toute cette partie, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Toutes les variables aléatoires considérées ici seront définies sur cet espace probabilisé et seront toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

C15.149. Définition (Série génératrice) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle **série génératrice de X** la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n)\, z^n\,.$$

C15.150. Remarque La série génératrice est entièrement déterminée par la loi de X. Deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de même loi ont donc la même série génératrice.

C15.151. Proposition (Rayon de convergence de la série génératrice) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Le rayon de convergence de la série génératrice de X est supérieur ou égal à 1.

(b) De plus, la convergence de la série génératrice est normale sur le disque fermé $\overline{D(0,1)}$.

C15.152. Définition (Fonction génératrice) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) La **fonction génératrice de X, notée $\mathbf{G}_X$**, est définie par

$$\boxed{\mathbf{G}_X : t \longmapsto \mathbf{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n\,.}$$

(b) La fonction $\mathbf{G}_X$ est définie sur un intervalle contenant le segment $[-1,1]$.

(c) La fonction $\mathbf{G}_X$ est continue sur le segment $[-1,1]$.

(d) $\mathbf{G}_X(1) = 1$

C15.153. Proposition (Fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ On note R le rayon de convergence de sa série génératrice.

(a) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, où $p \in]0,1[$, alors $\mathbf{G}_X(t) = (1-p) + pt$ et $R = +\infty$

(b) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, alors $\mathbf{G}_X(t) = (1-p+pt)^n$ et $R = +\infty$

(c) Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors $\mathbf{G}_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $R = +\infty$.

(d) Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, où $p \in]0,1[$, alors $\mathbf{G}_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ et $R = \dfrac{1}{1-p} > 1$.

C15.154. Proposition (La fonction génératrice détermine la loi de la variable aléatoire) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\mathbf{G}_X = \mathbf{G}_Y$. Alors X et Y ont même loi.

C15.155. Remarque (Précision sur la précédente proposition) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\mathbf{G}_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

C15.156. Théorème (Fonctions génératrices, espérance et variance) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si $\mathbf{G}_X$ est dérivable en 1. Si tel est le cas

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{G}'_X(1).$$

(b) La variable aléatoire X possède une variance si et seulement si $\mathbf{G}_X$ est deux fois dérivable en 1. Si tel est le cas :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{G}''_X(1) + \mathbf{G}'_X(1) - \left(\mathbf{G}'_X(1)\right)^2.$$

C15.157. Remarque Grâce au théorème C15.156, on peut retrouver l'espérance et la variance de variables suivant une loi de Bernoulli, une loi binomiale, une loi de Poisson ou une loi géométrique, à partir des fonctions génératrices des lois usuelles C15.153.

C15.158. Exercice Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que le rayon de convergence R de sa série génératrice de Z vérifie $R > 1$. Démontrer que Z possède des moments de tout ordre.

Indication

(a) On pose $Q_0 := 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n := \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$. Démontrer que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $X^n := \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k$.

(c) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série numérique $\sum_{\ell \geqslant 0} Q_k(\ell)\, \mathbb{P}(Z = \ell)$ converge.

(d) Combiner (c) et (d) pour établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X^n possède une espérance.

C15.159. Théorème (Fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\mathbf{G}_{X+Y} = \mathbf{G}_X \times \mathbf{G}_Y.$$

C15.160. Corollaire (Fonction génératrice de la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, **mutuellement indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\mathbf{G}_{X_1+\ldots+X_n} = \mathbf{G}_{X_1} \times \ldots \times \mathbf{G}_{X_n}.$$

C15.161. Remarque Grâce au corollaire C15.160, on peut retrouver la fonction génératrice d'une variable aléatoire binomiale à partir de la fonction génératrice d'une variable de Bernoulli (cf. C15.97).

C15.162. Exercice Une urne contient quatre boules numérotées $0, 1, 1, 2$. On effectue n tirages avec remise. On suppose les tirages mutuellement indépendants. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n égale à la somme des numéros obtenus.

Indication

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du k-ième tirage dans l'urne.

(a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_k.

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer, pour tout $\ell \in X_k(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_k = \ell)$.

(c) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer la fonction génératrice $\mathbf{G}_{X_k}$ de la la variable aléatoire X_k.

(d) Déduire de (c) et C15.160 la fonction génératrice de S_n, puis la loi de S_n.

C15.163. Exercice (Formule de Wald) Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi. On suppose toutes ces variables aléatoires mutuellement indépendantes. On note $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ (le nombre de terme de la somme est aléatoire).

(a) Démontrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\, \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_k = n).$$

(b) En déduire

$$\forall t \in [-1, 1], \quad \mathbf{G}_S(t) = \mathbf{G}_N(\mathbf{G}_{X_1}(t)).$$

(c) Supposons que N et X_1 possèdent une espérance. Démontrer que S possède une espérance et que

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\, \mathbf{E}(X_1) \qquad \text{(Formule de Wald).}$$

(d) On lance une pièce équilibrée. Tant que l'on obtient pile, on lance on dé équilibré à six faces. Dès que l'on obtient face, on s'arrête. Déterminer l'espérance du nombre total de points accumulés au cours d'une partie.

Indication

(a) Appliquer la formule des probabilités totales C15.46 relativement au système complet d'événements canoniquement associé à la variable aléatoire N.
(b) Il s'agit de démontrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$

$$\mathbf{G}_S(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = n)\, t^n \underset{(a)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\, \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_k = n)\, t^n = \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\, \left(\mathbf{G}_{X_1}(t)\right)^k$$

en justifiant toutes les convergences en cours de calcul. Pour cela, appliquer le théorème de Fubini et C15.160.
(c) C15.156
(d) Appliquer la formule de Wald (c) en spécialisant les variables aléatoires $N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de manière pertinente et en vérifiant chacune des hypothèses.

§ 19 Une sélection d'exercices

C15.164. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble fini à n éléments.

1. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B, C soient deux-à-deux disjoints et $A \cup B \cup C = E$.

C15.165. Exercice Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche, il gagne deux points, pour chaque boule noire, il perd trois points. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées, et Y la variable aléatoire donnant le nombre de points du joueur.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X, son espérance, sa variance.
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y, son espérance, sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les tirages se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

C15.166. Exercice Une personne effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On suppose que les n appels constituent n expériences aléatoires indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité que le correspondant réponde vaut $p \in]0\,; 1[$. Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants ayant répondu.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La personne rappelle une deuxième fois les $n - X$ correspondants qui n'ont pas répondu au premier appel. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants joints au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = i)$, pour tout $k \in [\![0, i]\!]$.
   (b) Montrer que la loi $Z = X + Y$ suit une loi binomiale donc on déterminera les paramètres.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de la variable Z.

C15.167. EXERCICE

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires finies, mutuellement indépendantes, de même loi, admettant un moment d'ordre 2. On pose $X = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que :
$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}\left(\left| \frac{X}{n} - \mathbf{E}(X_1) \right| \geqslant a \right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X_1)}{na^2}.$$
3. Application : on effectue n tirages successifs et mutuellement indépendants d'une boule, avec remise, dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Donner une valeur de n à partir de laquelle la proportion de boules rouges obtenues est comprise, avec une probabilité de 95%, entre 0.35 et 0.45 ?

C15.168. EXERCICE On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques numérotées de 1 à 3 pouvant chacune contenir n boules. On lance simultanément les n boules. Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. On note X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 2)$ puis donner la loi de X.
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(X)$ quand n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

C15.169. EXERCICE

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés et on le lance n fois. On obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n). Interpréter le résultat.

C15.170. EXERCICE On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon, le tirage se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle B_n l'événement « la boule tirée au n-ème tirage est blanche » et on note $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$$
3. En déduire la valeur de p_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C15.171. EXERCICE Soit $p \in]0\,;1[$ et soient $n, m \in \mathbb{N}$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m, p)$. Montrer que la loi $Z = X + Y$ suit la loi binomiale de paramètre p et de taille $n + m$.

C15.172. EXERCICE Soient X et Y deux variables aléatoires finies indépendantes. Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles toujours indépendantes ?

C15.173. EXERCICE Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

1. Exprimer $\mathbf{E}(X)$ en fonction des $\mathbb{P}(X \geqslant k)$, $k \in \mathbb{N}$.
2. On suppose les variables aléatoires X et Y de loi uniforme. Déterminer l'espérance de $\min(X, Y)$, de $\max(X, Y)$ puis de $|X - Y|$.

C15.174. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ. Déterminer l'espérance et la variance de X.

C15.175. EXERCICE Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On prélève des boules sans remise jusqu'à ce que toutes les boules rouges aient été tirées. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires au tirage de toutes les boules rouges.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

C15.176. EXERCICE Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires finies, mutuellement indépendantes, de même loi. On note m leur espérance et σ^2 leur variance.

1. Calculer l'espérance et la variance de $X = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$.
2. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_i - X)^2$.

C15.177. EXERCICE Soit $p \in \,]0\,;\,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n \leqslant k) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

C15.178. EXERCICE Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. À toute variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, on associe sa fonction caractéristique qui est l'application définie par :

$$\varphi_X \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left(e^{itX}\right). \end{array} \right.$$

1. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire.
   (a) Justifier que la fonction φ_X est bien définie.
   (b) Montrer que φ_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique.
   (c) Calculer $\varphi_X(0), \varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$.
2. Soit $p \in \,]0\,;\,1[$.
   (a) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi $\mathscr{B}(p)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi $\mathscr{B}(n,p)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
3. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer :
$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(t)\, e^{-itn}\,\mathrm{d}t$$
   En déduire que deux variables aléatoires $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $\varphi_X = \varphi_Y$, ont même loi.
4. Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\,\varphi_Y$.

C15.179. EXERCICE Soient $p \in \,]0\,;\,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée au temps $t = 0$. On envoie un rayon laser dans cet enceinte chaque seconde. Le premier rayon est envoyé au temps $t = 1$. La bactérie a une probabilité p d'être touchée par le rayon. Elle meurt quand elle a été touchée r fois. Les tirs de laser sont mutuellement indépendants. Notons X la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

C15.180. EXERCICE Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbb{P}(X = j\,,\; Y = k) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Montrer que 2^{X+Y} possède une espérance et la calculer.

C15.181. EXERCICE Soit $\lambda \in \,]0\,;\,1[$, soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

1. Calculer λ.
2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
3. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

C15.182. Exercice Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. Posons $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$, mutuellement indépendantes, de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leqslant n)$ et $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} X_i$.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

C15.183. Exercice Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^k$$

avec $p \in]0\,;1[$. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer les lois marginales du couple (U, V).
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

C15.184. Exercice Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Montrer que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X, puis l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

C15.185. Exercice Soit $p \in]0\,,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (a) Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
   (b) Déterminer la loi de Y. En déduire que $1 + Y$ suit une loi géométrique, puis déterminer l'espérance de Y.
   (c) Déterminer la loi de X.

C15.186. Exercice Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X possède une espérance si et seulement si la série $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge, et que si tel est le cas :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)\,.$$

C15.187. Exercice Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a\,;b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

1. Montrer que X admet une espérance m et une variance σ^2 et que $m \in [a, b]$.
2. Posons $Y = X - m$ et :

$$t = \sum_{y \geqslant 0} y\, \mathbb{P}(Y = y) \qquad ; \qquad s = \sum_{y \geqslant 0} y^2\, \mathbb{P}(Y = y) \qquad ; \qquad u = \mathbb{P}(Y \geqslant 0)$$

   (a) Démontrer : $t^2 \leqslant su$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Y. En déduire : $t^2 \leqslant \left(\sigma^2 - s\right)(1-u)$.
   (c) En déduire : $t^2 \leqslant \dfrac{\sigma^2}{4}$.
   (d) Conclure que : $\sigma^2 \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

C15.188. **Exercice** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;\,1[$. Déterminer la loi de $X+Y$.

C15.189. **Exercice** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$.

C15.190. **Exercice** Soit $p \in]0\,;\,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre p. Montrer que $X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.
3. En déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p.

C15.191. **Exercice** Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour quelle valeur de n la probabilité $\mathbb{P}(X=n)$ est-elle maximale ?
2. À n fixé, pour quelle valeur de λ la probabilité $\mathbb{P}(X=n)$ est-elle maximale ?

C15.192. **Exercice** Soient X, Y deux variables aléatoires suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Montrer que la variable aléatoire $\max(X,Y)$ a une espérance et la calculer.

C15.193. **Exercice** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant $(X=n)$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0\,;\,1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. Reconnaître la loi de Y.