M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°2
Polynômes en une indéterminée

David BLOTTIÈRE

Les polynômes à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ s'écrivent d'une unique manière sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ où n est un entier naturel et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbf{K}$. L'objet X est appelé indéterminée. Dans un premier temps, on donne une construction de l'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, en expliquant soigneusement qui est l'indéterminée X. Un polynôme est ontologiquement la suite de ses coefficients et ne doit pas être confondu avec la fonction polynomiale qu'on lui associe canoniquement. On construit des opérations (multiplication par un scalaire, addition, multiplication) sur $\mathbf{K}[X]$ et on établit avec rigueur quelques unes de leurs propriétés, grâce à des manipulations sur des sommes finies qui sont intéressantes par ailleurs. On dispose d'une notion de degré, de coefficient dominant et de division euclidienne qui s'avèrent être précieux dans l'étude de $\mathbf{K}[X]$. Un des résultats essentiels est le théorème de d'Alembert-Gauß : tout polynôme à coefficients complexes de degré au moins 1 possède une racine complexe. Au cours de l'année, nous verrons que nous pouvons pratiquer l'arithmétique dans $\mathbf{K}[X]$ de manière analogue à ce que nous connaissons dans $\mathbf{Z}$ et que les polynômes permettent d'étudier la réduction des matrices, e.g. de savoir si une matrice carrée à coefficients dans $\mathbf{K}$ est semblable à une matrice diagonale.

R2.1. *Notation.* — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

R2.2. *Construction de* $\mathbf{K}[X]$. — La construction décrite ci-dessous repose sur l'idée suivante : un polynôme peut être identifié avec la suite de ses coefficients.

On note $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ le sous-ensemble de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, formé des suites d'éléments de $\mathbf{K}$, qui sont nulles à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\mathbf{K}^{(\mathbf{N})} := \{(a_k)_{k\in\mathbf{N}} \ : \ \exists\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, k \geqslant n \quad a_k = 0\} \ .$$

Il est parfois commode d'écrire un élément $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ sous la forme $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Si A est un élément de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ alors on définit, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $[A]_k$ comme étant le terme d'indice k de la suite A. Ainsi, si $A = (a_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $[A]_k = a_k$.

Soient $A \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ et $B \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$. On leur associe deux éléments de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $A + B$ et $A \times B$, définis par, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$[A + B]_k := [A]_k + [B]_k \qquad \text{et} \qquad [A \times B]_k = \sum_{i=0}^{k} [A]_i\, [B]_{k-i} \ .$$

Si de plus $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit l'élément $\lambda.A$ de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ par, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$[\lambda.A]_k := \lambda\, [A]_k \ .$$

On démontre que les suites $\lambda.A$, $A + B$ et $A \times B$ sont nulles à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\lambda.A \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \tag{1}$$
$$A + B \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \tag{2}$$
$$A \times B \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \ . \tag{3}$$

Pour une démonstration des propriétés (1)–(3), on pourra visionner la vidéo [YouTube] (14 minutes).

Ainsi, pouvons nous considérer trois opérations définies sur $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$:

$$. \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} & \to & \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \\ (\lambda, A) & \mapsto & \lambda.A \end{array} \right. \qquad \text{(multiplication par un scalaire)}$$

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} & \to & \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \\ (A, B) & \mapsto & A + B \end{array} \right. \qquad \text{(addition)}$$

$$\times \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} & \to & \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \\ (A, B) & \mapsto & A \times B \end{array} \right. \qquad \text{(multiplication)}$$

telles que $\left(\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, ., +\right)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\left(\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, +, \times\right)$ un anneau commutatif et

$$\forall\, (\lambda, A, B) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \qquad \lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B) \ .$$

On dit alors que $\left(\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}, ., +, \times\right)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre commutative (nous reviendrons sur cette structure dans l'année). En particulier, la multiplication $\times$ est associative, i.e. :

$$\forall\, (A, B, C) \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \qquad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \tag{4}$$

et commutative, i.e. :

$$\forall (A, B) \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \times \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \qquad A \times B = B \times A \,. \tag{5}$$

Pour une démonstration des propriétés (4) et (5), on pourra visionner la vidéo [YouTube] (25 minutes).

On distingue plusieurs éléments remarquables dans $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$:
- la suite nulle $0_{\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}} = (0, \ldots, 0, \ldots)$ qui est le neutre de l'addition $+$;
- la suite $1_{\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}} = (\delta_{0,k})_{k\in\mathbf{N}} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ qui est le neutre de la multiplication $\times$;
- l'élément $X = (\delta_{1,k})_{k\in\mathbf{N}} = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ qui va nous permettre d'écrire sous une forme commode tous les éléments de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$.

Dans ce qui précède $\delta_{?,!}$ désigne le symbole de Kronecker.

Si $n \in \mathbf{N}$ et si $A \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$, alors on pose :

$$A^n := \begin{cases} 1_{\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}} & \text{si } n = 0 \\ A \times \ldots \times A \ (n \text{ fois}) & \text{si } n \geqslant 1 \,. \end{cases}$$

On vérifie que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad X^n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbf{N}} = \Big(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{terme d'indice } n}, 0, \ldots, 0, \ldots\Big) \,. \tag{6}$$

Pour une démonstration de la propriété (6), on pourra visionner la vidéo [YouTube] (12 minutes).

Considérons à présent un élément

$$A = (a_k)_{k\in\mathbf{N}} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \,.$$

D'après les définitions des opérations . et $+$ sur $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$:

$$A = a_0.(1, 0, \ldots, 0, \ldots) + a_1.(0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) + a_n.\Big(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{terme d'indice } n}, 0, \ldots, 0, \ldots\Big) \,.$$

En appliquant à présent (6), il vient :

$$A = a_0.X^0 + a_1.X + \ldots + a_n.X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k.X^k$$

somme finie que l'on convient d'écrire plutôt $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.X^k$. Le symbole $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}$ jouit des mêmes propriétés de linéarité que le symbole de sommation usuel et ne met en jeu aucune convergence (il s'agit d'une somme finie).

Nous avons donc démontré que tout élément A de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ s'écrit sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.X^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Cette écriture est par ailleurs unique, car les coefficients qui apparaissent sont précisément les termes de la suite d'éléments de $\mathbf{K}$ nulle à partir d'un certain rang. A. Pour cette raison, on choisit de désigner $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ par $\mathbf{K}[X]$.

Conclusion. un élement A de $\mathbf{K}[X]$, appelé polynôme en une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{K}$, s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.X^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Les opérations sur $\mathbf{K}[X]$ se réécrivent alors, de manière habituelle, comme suit :

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times \mathbf{K}[X] & \to & \mathbf{K}[X] \\ (\lambda, A) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda.[A]_k \; X^k \end{array} \right. \qquad \text{(multiplication par un scalaire)}$$

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] & \to & \mathbf{K}[X] \\ (A, B) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} ([A]_k + [B]_k) \; X^k \end{array} \right. \qquad \text{(addition)}$$

$$\times \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] & \to & \mathbf{K}[X] \\ (A, B) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} [A]_i \; [B]_{k-i} \right) \; X^k \end{array} \right. \qquad \text{(multiplication)}$$

et $(\mathbf{K}[X], ., +, \times)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre commutative.

R2. 3. *Travail sur le cours.* — Après avoir étudié la construction exposée dans la première section, on étudiera avec le plus grand soin le polycopié de cours sur les polynômes [PDF]. Il faudra être en mesure :

- d'énoncer précisément et formellement les définitions ;
- d'énoncer et de démontrer les propositions et théorèmes ;
- de résoudre les exemples d'applications directes.

La $\mathbf{K}$-algèbre commutative $\mathbf{K}[X]$ est munie de 3 outils :

- une application « degré » :

$$\deg \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{N} \cup \{-\infty\} \\ A & \longmapsto & \begin{cases} -\infty & \text{si } A = 0 \\ \max\{k \in \mathbf{N} \ : \ [A]_k \neq 0\} & \text{sinon .} \end{cases} \end{array} \right.$$

- une application « coefficient dominant » :

$$\mathrm{dom} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{K}^* \\ A & \longmapsto & [A]_{\deg(A)} \end{array} \right.$$

- une division euclidienne : pour tout $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$ il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X]$ tel que

$$A = BQ + R \quad \textbf{et} \quad \deg(R) < \deg(B) \ .$$

qui sont des précieux dans l'étude des polynômes. Soulignons que l'on dispose également d'un algorithme pour effectuer la division euclidienne d'un polynôme par un polynôme non nul.

L'anneau commutatif $\mathbf{K}[X]$ présente des analogies fortes avec l'anneau $\mathbf{Z}$. Par exemple, les éléments irréductibles de $\mathbf{K}[X]$ sont des analogues des nombres premiers, comme nous le verrons dans le cours d'arithmétique sur les polynômes.

Ce travail sur le cours est fondamental.

R2. 4. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. Pour tout $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X]$, $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$.

Vraie.
Si $A = 0$ ou $B = 0$ alors $AB = 0$ et l'identité à démontrer s'écrit $-\infty = -\infty$. Elle est donc vraie.

Supposons donc que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et introduisons les degrés respectifs $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}$ de A et B.
Soit $n > a + b$.

$$[AB]_n := \sum_{k=0}^{n} [A]_k [B]_{n-k} = \sum_{k=0}^{a} [A]_k [B]_{n-k} + \sum_{k=a+1}^{n} [A]_k [B]_{n-k} \ .$$

Pour tout $k \geqslant a + 1$, $[A]_k = 0$ et donc la deuxième somme est nulle. Si $k \leqslant a$, alors $n - k > b$ et donc $[B]_{n-k} = 0$. La première somme est donc nulle également. Ainsi, pour tout $n > a + b$, $[AB]_n = 0$.
Nous observons

$$[AB]_{a+b} := \sum_{k=0}^{a+b} [A]_k [B]_{a+b-k} = \sum_{k=0}^{a-1} [A]_k [B]_{a+b-k} + [A]_a [B]_b + \sum_{k=a+1}^{a+b} [A]_k [B]_{a+b-k} \ .$$

Si $k \leqslant a-1$ alors $a+b-k \geqslant b+1$ et donc $[B]_{a+b-k} = 0$. Ainsi $\sum_{k=0}^{a-1} [A]_k [B]_{a+b-k} = 0$. Si $k \geqslant a+1$ alors $[A]_k = 0$ et donc $\sum_{k=a+1}^{a+b} [A]_k [B]_{a+b-k} = 0$. Nous en déduisons $[AB]_{a+b} = [A]_a [B]_b \neq 0$.
D'après ce qui précède $AB \neq 0$ et

$$\deg(AB) = \max\{k \in \mathbf{N} \ : \ [AB]_k \neq 0\} = a + b = \deg(A) + \deg(B) \ .$$

Remarque. Nous avons également établi

$$\mathrm{dom}(AB) = \mathrm{dom}(A) \ \mathrm{dom}(B) \ .$$

2. Pour tout $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X]$, $\deg(A + B) = \max(\deg(A), \deg(B))$.

Faux. Un contre-exemple est donné par $A = X^2 + X + 1$ et $B = -X^2 + 1$.

Remarques.

(a) Il est cependant vrai que pour tout $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X]$

$$\deg(A + B) \leqslant \max(\deg(A), \deg(B)) \ .$$

En effet, pour tout $k > \max(\deg(A), \deg(B))$,

$$[A + B]_k = [A]_k + [B]_k = 0 + 0 = 0$$

car $k > \deg(A)$ et $k > \deg(B)$.

(b) On peut également démontrer que pour tout $(A, B) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X]$

$$\deg(A) \neq \deg(B) \quad \Longrightarrow \quad \deg(A + B) = \max(\deg(A), \deg(B)) \ .$$

3. Pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$ où $P' := \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\,[P]_k\,X^{k-1}$ est le polynôme dérivé de P.

Faux. Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est un polynôme constant non nul (i.e. un polynôme de degré 0), alors $P' = 0$ et :

$$-\infty = \deg(P') \neq \deg(P) - 1 = -1 \ .$$

Remarque. Il est cependant vrai que, pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

4. Le polynôme $X^2 + X + 1$ divise le polynôme $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Vrai. En posant la division euclidienne de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ par $X^2 + X + 1$ on obtient un reste nul et un quotient égal à $X^3 + 1$.

5. Un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle.

Vrai. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de degré n impair. Quitte à diviser P par son coefficient dominant, nous pouvons supposer P unitaire, i.e. de coefficient dominant égal à 1. Soit f la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & P(x) \ . \end{array} \right.$$

Étant polynomiale, elle est continue sur l'intervalle $\mathbf{R}$. De plus comme P est de degré impair et unitaire

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \ .$$

D'après la définition de la limite, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \geqslant b \quad f(x) \geqslant 0$$

et

$$\forall x \leqslant a \quad f(x) \leqslant 0 \ .$$

Ainsi $f(a)f(b) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x_0 (entre a et b) tel que $f(x_0) = 0$. Le polynôme P possède donc une racine réelle.

6. Si A et B sont polynômes de $\mathbf{C}[X]$ sans racine commune dans $\mathbf{C}$, alors ils sont premiers entre eux.

Vrai. Raisonnons par contraposée. Supposons donc que A et B ne sont pas premiers entre eux et démontrons qu'ils ont une racine commune dans $\mathbf{C}$. Comme A et B ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD, noté D, est un polynôme unitaire de degré supérieur ou égal à 1. Comme D divise A et B, il existe $Q_A \in \mathbf{C}[X]$ et $Q_B \in \mathbf{C}[X]$ tels que $A = Q_A D$ et $B = Q_B D$. Comme le polynôme D n'est pas constant, il possède une racine α dans $\mathbf{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauß. Ainsi

$$A(\alpha) = Q_A(\alpha)D(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad B(\alpha) = Q_B(\alpha)D(\alpha) = 0 \ .$$

Le nombre complexe α est donc une racine commune à A et B.

7. Si A et B sont polynômes de $\mathbf{R}[X]$ sans racine commune dans $\mathbf{R}$, alors ils sont premiers entre eux.

Faux. Un contre-exemple est donné par $A = (X^2+1)X$ et $B = (X^2+1)(X+1)$.

R2. 5. *Formule des comités.* — On établit une formule mettant en jeu les coefficients binomiaux, au moyen des polynômes. Au cours de l'année nous proposerons une démonstration alternative, de manière combinatoire (i.e. par comptage).

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(propriété de symétrie des coefficients binomiaux)} \ .$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{n-k} := \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

d'où l'égalité demandée.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. En considérant un coefficient du polynôme $(X+1)^{2n} = (X+1)^n\,(X+1)^n$, démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \text{(formule des comités)} \ .$$

- D'après la formule du binôme de Newton :

$$(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$$

et donc :

$$(\star) \qquad \left[(X+1)^{2n}\right]_n = \binom{2n}{n} .$$

- D'après la formule du binôme de Newton :

$$A := (X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$$

et donc, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$(\star\star) \qquad [A]_k = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} .$$

Par définition de la multiplication dans $\mathbf{K}[X]$:

$$(\star\star\star) \qquad \left[(X+1)^{2n}\right]_n = [A \times A]_n = \sum_{k=0}^{n} [A]_k \, [A]_{n-k} \underset{(\star\star)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \underset{(Q1)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

- L'identité demandée découle de $(\star)$ et $(\star\star\star)$.

R2. 6. *Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ à l'aide de cotangentes [E3A PSI 2016]. —* Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

On écrit :

$$u = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

On distingue alors trois cas.

- Si $\theta \in [0, \pi[$ alors $\cos(\theta/2) > 0$. On a alors $|u| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \frac{\theta}{2}$.
- Si $\theta = \pi$ alors $u = 0$. Le module est nul et la notion argument non définie.
- Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$ alors $\cos(\theta/2) < 0$. On a alors $|u| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \pi + \frac{\theta}{2}$.

2. On note P_n le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par :

$$P_n(X) = \frac{1}{2i} \left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} \right) .$$

(a) Étude des cas $n = 1$ et $n = 2$

i. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

Le calcul donne :

$$P_1 = 3X^2 - 1 \ \text{ et } \ P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1.$$

ii. Vérifier que $P_1 \in \mathbf{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbf{R}_4[X]$. Sont-il irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$?

Il est immédiat que P_1 est de degré 2 et P_2 de degré 4. A fortiori, on a $P_1 \in \mathbf{R}_2[X]$ et $P_2 \in \mathbf{R}_4[X]$.
Les irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ étant les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle (ou encore à discriminant négatif), ni P_1 (qui admet $\frac{1}{\sqrt{3}}$ comme racine) ni P_2 (qui est de degré 4) ne sont irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

(b) Cas général

i. Montrer que $P_n \in \mathbf{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

P_n est différence de deux polynômes de degré $2n+1$ et est donc dans $\mathbf{C}_{2n+1}[X]$. Le coefficient de X^{2n+1} dans P_n est :

$$\frac{1}{2i}(1-1) = 0$$

et donc $P \in \mathbf{C}_{2n}[X]$. Le coefficient de X^{2n} dans P_n est :

$$\frac{1}{2i}\left((2n+1)i - (2n+1)(-i)\right) = 2n+1 \neq 0$$

Ainsi, P_n est de degré $2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.

ii. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner l'expression des racines N-ièmes de l'unité.

Les racines N-ièmes de l'unité sont les complexes :

$$e^{\frac{2ik\pi}{N}} \ \text{ pour } \ k = 0, \dots, N-1.$$

iii. Calculer $P_n(i)$.

On a :

$$P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n.$$

iv. Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.

Soit a une racine de P_n. De $P_n(a) = 0$, on déduit :

$$|a + i| = |a - i|.$$

Les racines de P_n sont à égale distance de i et $-i$, donc sur la médiatrice du segment $[-i, i]$, i.e. l'axe des réels.

v. Soit $a \in \mathbf{C}$. Prouver l'équivalence :

$$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists\, k \in [\![1, 2n]\!],\ a\left(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1\right) = i\left(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1\right).$$

Supposons que a soit racine de P_n. On a alors $a \neq i$ et $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$. Il existe donc $k \in [\![0, 2n+1]\!]$ tel que :

$$\frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

et donc (produit en croix) :

$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1).$$

On remarque alors que $k \neq 0$ car pour $k = 0$ la relation précédente est fausse ($0 \neq i$). Réciproquement, si $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$ avec $k \in [\![1, 2n]\!]$, on a $(a+i) = (a-i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. En élevant à la puissance $2n+1$ on trouve que $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$ et donc que $P_n(a) = 0$.

vi. Déterminer les racines du polynôme P_n. Vérifier alors le résultat de 2.(b).iv.

Les racines de P_n sont donc les

$$a_k = \frac{i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)}{(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1)} = i\frac{2\cos(k\pi/(2n+1))}{2i\sin(k\pi/(2n+1))} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1, \ldots, 2n$. On trouve bien des récines toutes réelles.

Remarque. cotan étant bijective de $]0, \pi[$ dans $\mathbf{R}$ et les $2k\pi/(2n+1)$ étant dans $]0, \pi[$, les a_k sont 2 à 2 distincts. Il y en a $2n$ et P_n est de degré $2n$. On a donc $2n$ racines simples et P_n est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}[X]$.

vii. En développant P_n, démontrer qu'il existe un unique polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que :

$$P_n(X) = Q_n\left(X^2\right).$$

Prouvons d'abord l'existence d'un tel polynôme Q_n. On développe les deux puissances par formule du binôme et on regroupe les termes :

$$2iP_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k i^{2n+1-k}(1-(-1)^{2n+1-k})$$

Les termes d'indice k pairs sont nuls. Il reste donc :

$$2iP_n(X) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} i^{2n+1-2k} = 2i \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

On en déduit que :

$$P_n(X) = Q_n(X^2) \ \text{ avec } \ Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^k.$$

Passons à l'unicité. Soient $Q_{n,1}(X)$ et $Q_{n,2}(X)$ deux polynômes de degré n à coefficients réels tels que $P_n(X) = Q_{n,1}(X^2)$ et $P_n(X) = Q_{n,2}(X^2)$. Soit $x \in \mathbf{R}^+$.

$$Q_{n,1}(x) - Q_{n,2}(x) = P_n(\sqrt{x}) - P_n(\sqrt{x}) = 0.$$

Le polynôme $Q_{n,1}(X) - Q_{n,2}(X)$ possède une infinité de racines. Il est donc nul.

viii. Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.

D'après 2.(a).i et la question précédente :

$$Q_1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right) \ \text{ et } \ Q_2 = 5X^2 - 10X + 1 = 5\left(X - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\left(X - \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right).$$

La factorisation donne les racines.

ix. Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

Si a est racine de P_n alors a^2 est racine de Q_n. En particulier, on a les racines

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1, \dots, n$. Ces racines sont distinctes car les a_k sont distincts et positifs pour ces valeurs de k (les carrés sont donc aussi distincts). Ceci donne n racines distinctes de Q_n qui est de degré n et donc toutes les racines.

3. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

S_n est la somme des racines b_k de Q_n qui est scindé à racines simples et s'écrit (son coefficient dominant est celui de P_n) :

$$Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X-b_k) = (2n+1)\left(X^n - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_1 \dots b_n\right).$$

On voit que l'on a besoin du coefficient de X^{n-1} dans Q_n qui vaut $-\binom{2n+1}{2n-2}$. On a ainsi :

$$S_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

En déduire :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Prouvons d'abord l'inégalité de gauche. Soit la fonction $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}$; $x \mapsto x - \sin(x)$. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f(x) = x - \sin(x) \geqslant f(0) = 0$$

d'où :

$$\sin(x) \leqslant x.$$

Passons à l'inégalité de droite. Soit la fonction $g\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}$; $x \mapsto \tan(x) - x$. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 \geqslant 0.$$

La fonction g est donc croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$g(x) = \tan(x) - x \geqslant g(0) = 0$$

d'où :

$$x \leqslant \tan(x).$$

Ainsi :

$$(\star) \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

Enfin établissons la dernière double inégalité. Comme la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y^2}$ décroît sur $\mathbf{R}^{+*}$, on déduit de $(\star)$:

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

5. Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Pour $k = 1, \dots, n$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi/2[$ et donc :

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant n + S_n$$

ce qui donne :

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2(n+S_n)}{(2n+1)^2}$$

Avec l'expression de S_n, majorant et minorant ont pour limite $\dfrac{\pi^2}{6}$. Par théorème d'encadrement, il en est de même pour le terme du milieu de notre double inégalité. La série proposée converge (ce que l'on sait car c'est une série de Riemann convergente) et :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$