M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°10
Matrices

David BLOTTIÈRE

Une matrice à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbf{K}$. On peut additionner des matrices de même format, multiplier une matrice par un scalaire et, dans certains cas, multiplier une matrice par une autre. Si l'on se restreint au cas des matrices carrées à n lignes et n colonnes, alors l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qu'elles forment se trouve muni de trois opérations $+$, $.$ et $\times$ qui en font une $\mathbf{K}$-algèbre. On peut alors jouer dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ à résoudre des équations algébriques, e.g. :

$$J \times M + M \times J = 2021.I_n$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Il faut cependant prendre garde à deux défauts : la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ n'est ni commutative, ni intègre dès que $n \geqslant 2$, ce qui rend les résolutions d'équations plus subtiles (et passionnantes). La définition de la multiplication matricielle est intimement liée à la composition des applications linéaires. En fait, matrices et applications linéaires dansent ensemble : des propriétés matricielles se reflètent sur les applications linéaires et réciproquement. Ce ballet s'incarne dans la Proposition 12 du document support [PDF] qu'on étudiera intensément.

R10. 1. *Notations.* — Dans tous ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

R10. 2. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur les matrices [PDF].

Une matrice de format $n \times p$, où $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ est un tableau à p lignes et à n colonnes, dont les entrées sont des éléments de $\mathbf{K}$ (Première définition de la section 1.1 du document support).

L'ensemble des matrices de format $n \times p$, où $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies composante par composante. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension np (Propriété 1 du document support).

On attache à une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ un nombre, appelé le rang de la matrice (Deuxième définition de la section 1.1 du document support). On étudiera soigneusement les propriétés du rang d'une matrice (Propriétés 2 et 3 du document support).

Il y a un lien ténu entre les matrices et les applications linéaires de source et but de dimension finie. Les sections 1.2 et 1.3 sont consacrées à préciser ces relations et constituent le cœur de ce chapitre. Le point fondamental est le suivant : si E est un espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $\mathcal{B}$, si F est un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{C}$, si $f \in \mathcal{L}(E)\,F$, on définit la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme étant la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définie par

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \qquad [\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)]_{i,j} := i\text{-ème coordonnée de } f(e_j) \text{ dans la base } \mathcal{C}\ .$$

L'application

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\cdot) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E)\,F & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

On peut, dans certain cas, multiplier des matrices (Première définition de la section 2.1). Soient n, p, q des nombres entiers naturels non nuls. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on définit la matrice $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \qquad [A \times B]_{i,j} := \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}\,[B]_{k,j}\ .$$

Au cours de l'étude de la section 2.2, on reverra les liens entre les opérations sur les applications linéaires et celles définies sur les matrices. Il y a des liens très forts que l'on doit connaître. Le plus important d'entre eux est le suivant.
Si E est un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$, si F est un espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $\mathcal{C}$, si G est un espace vectoriel de dimension finie q muni d'une base $\mathcal{D}$, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, si $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\ .$$

On observe que le produit matriciel est, en quelque sorte, le reflet de la composition d'applications linéaires.

La partie suivante (2.3) est consacré au cas particulier des matrices carrées. Si $n \in \mathbf{N}^*$, alors $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), ., +, \times)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre qui est non commutative, dès que $n \geqslant 2$.

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, alors on dispose d'un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) \quad \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{L}(E), ., +, \circ) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), ., +, \times) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right.$$

qui permet de démontrer des résultats très puissants, par exemple sur l'inversibilité des matrices carrées. Il faut bien maîtriser tous les résultats de cette partie.

La partie 2.4 expose des résultats basiques et utiles sur la trace et la transposée d'une matrice (en particulier des propriétés en lien avec le produit matriciel).

On terminera par l'étude de la partie 3, en prenant bien le temps de comprendre (de nouveau) tout le matériel exposé. Le théorème de changement de bases (Théorème 22 du document support) est central dans le programme de MP. Les matrices semblables et les matrices équivalentes font, quant à elles, l'objet de nombreux sujets de concours.

Ce travail sur le cours est fondamental. Il convient de connaître toutes les définitions, ainsi que les énoncés et des démonstrations de chacun des résultats de ce chapitre.

R10. 3. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

Vrai. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On calcule le produit $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$ et on trouve :

$$\begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b) \\ \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & -\sin(a)\sin(b) + \cos(a\cos(b) \end{pmatrix} .$$

Les formules de trigonométrie :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(b)$$

permettent de conclure.

Remarque. Si l'on oriente $\mathbf{R}^2$ à l'aide de la base canonique $\mathcal{B}_0 := ((1,0),(0,1))$, alors pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ de $\mathbf{R}^2$, dans la base $\mathcal{B}_0$. L'identité proposée s'incarne donc géométriquement : si l'on compose la rotation d'angle b par la rotation d'angle a, alors on obtient la rotation d'angle $(a+b)$.

2. Soit a, b, c, d des nombres réels tels que $ad - bc \neq 0$. Alors la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible et a pour inverse la matrice $B := \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

> Vrai. On calcule le produit AB pour trouver $AB = I_2$. La matrice A est carrée et inversible à droite. Elle est donc inversible et son inverse à droite, qui est B, égale son inverse.
>
> **Remarque**. Il peut être commode de connaître cette formule, qui permet d'inverser rapidement une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ inversible.

3. Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

> Faux. Un contre-exemple est donné par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
>
> **Remarque**. Plus généralement, l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +, \times)$ n'est pas intègre dès que $n \geqslant 2$.

4. Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, alors $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

> Faux. On calcule :
>
> $$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$
>
> et donc :
>
> $$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA \; .$$
>
> En prenant deux matrices A et B qui ne commutent pas, on obtient donc un contre-exemple. Ainsi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui ne commutent pas, livrent un contre-exemple.
>
> **Remarque**. Cette question met en lumière l'importance de l'hypothèse « $AB = BA$ » lorsqu'on veut appliquer la formule du binôme de Newton pour développer $(A + B)^n$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ avec $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$.

5. La matrice de l'application linéaire :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, x + y) \end{array} \right.$$

dans la base $\mathcal{B} := (u_1 := (1, 1), u_2 := (1, -1))$ de $\mathbf{R}^2$ est $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Vrai.
- Par définition, la première colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est formée des coordonnées du vecteur $f(u_1)$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme

$$f(u_1) = f((1,1)) = (1,2) = \frac{3}{2}.u_1 - \frac{1}{2}.u_2$$

la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.
- Par définition, la deuxième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est formée des coordonnées du vecteur $f(u_2)$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme

$$f(u_2) = f((1,-1)) = (3,0) = \frac{3}{2}.u_1 + \frac{3}{2}.u_2$$

la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

R10. 4. *Centre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Le centre de l'algèbre $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), ., +, \times)$, noté Z, est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, i.e.

$$Z := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ : \ \forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad AM = MA\} \ .$$

Démontrer que $Z = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}\,(I_n)$.

On pourra visionner un corrigé vidéo en cliquant sur le lien suivant [YouTube] (33 minutes).

R10. 5. *Calcul des puissances d'une matrice.* — Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient :
- $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 ,
- $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls et les autres égaux à 1.

1. Démontrer que $A^2 = p\,A$.

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

$$\left[A^2\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}\,[A]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} 1 = p = p\,[A]_{i,j} = [pA]_{i,j}$$

Les matrices A^2 et $p\,A$ ont même format et même coefficients. Elles sont donc égales.

2. Déterminer une expression de A^n en fonction de A, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Démontrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = p^{n-1}A$, en raisonnant par récurrence.
- Initialisation à $n = 1$: si $n = 1$, alors $p^{n-1}A = p^0 A = A$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^n = p^{n-1}A$.

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A\, A^n & \\ & = & A\, p^{n-1} A & \text{[hypothèse de récurrence]} \\ & = & p^{n-1}\, A^2 & \\ & = & p^{n-1}\, pA & \text{[question 1]} \\ & = & p^n A & \end{array}$$

- Conclusion : d'après l'initialisation à $n = 1$,l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A^n = p^{n-1}A$.

3. En déduire B^n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On remarque que $B = A - I_p$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} B^n & = & (A - I_p)^n & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k\, (-I_p)^{n-k} & \text{[formule du binôme de Newton dans } \mathcal{M}_p(\mathbf{K}),\ AI_p = I_pA] \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} A^k & \\ & = & (-1)^n I_p + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} p^{k-1} A & \text{[question 2]} \\ & = & (-1)^n I_p + \dfrac{1}{p} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} p^k \right) A & \\ & = & (-1)^n I_p + \dfrac{(p-1)^n - (-1)^n}{p} A & \text{[formule du binôme de Newton dans } \mathbf{R}] \end{array}$$

R10. 6. *Exemples de matrices semblables à leur inverse.* — Dans tout ce problème, E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (n fois).
On note $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.
Pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on dira que la matrice A est semblable à la matrice B s'il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

Partie A

1. On notera $A \sim B$, pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

- Démontrons que la relation $\sim$ est réflexive. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. La matrice I_3 est inversible, d'inverse I_3. De plus :
$$(I_3)^{-1} A I_3 = I_3 A I_3 = A \; .$$
Donc $A \sim A$.
- Démontrons que la relation $\sim$ est symétrique. Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A \sim B$. Alors il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On en déduit :
$$B = PAP^{-1} \; . \tag{1}$$
La matrice P^{-1} étant inversible, d'inverse P, l'identité (1) s'écrit encore :
$$B = \left(P^{-1}\right)^{-1} AP^{-1} \; .$$
Ainsi $B \sim A$.
- Démontrons que la relation $\sim$ est transitive. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors il existe deux matrices P, Q de $GL_3(\mathbf{R})$ telles que :
$$A = P^{-1}BP \qquad \text{et} \qquad B = Q^{-1}CQ \; .$$
On en déduit :
$$A = P^{-1}Q^{-1}CQP \; . \tag{2}$$
La matrice QP étant inversible, d'inverse $P^{-1}Q^{-1}$, l'identité (2) s'écrit encore :
$$A = (QP)^{-1} CQP \; .$$
Ainsi $A \sim C$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B sont semblables.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

Nous raisonnons par contraposition. Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ deux matrices semblables. Démontrons qu'elles ont même déterminant.
Comme A et B sont semblables, il existe une matrice P de $GL_3(\mathbf{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.
Comme le déterminant est multiplicatif et que la multiplication dans $\mathbf{R}$ est commutative :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(P^{-1}BP\right) \\
&= \det\left(P^{-1}\right)\det(B)\det(P) \\
&= \det\left(P^{-1}\right)\det(P)\det(B) \\
&= \det\left(\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}\right)\det(B) \\
&= \det(B) \; .
\end{aligned}$$

3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels. On considère l'application w de $\mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$ vers E définie par :
$$w(x) = u^j(x)$$
pour tout $x \in \mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$.

(a) Démontrer que $\mathrm{Im}\,(w) \subset \mathrm{Ker}\,(u^i)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(w)$. Alors il existe $x \in \mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$ tel que : $y = w(x)$. On calcule
$$u^i(y) = u^i(w(x)) = u^i\left(u^j(x)\right) = u^i \circ u^j(x) = u^{i+j}(x)$$
pour trouver 0, car $x \in \mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$. Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}\,(u^i)$.

(b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}\,(u^{i+j})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,(u^i)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(u^j))$.

Comme l'espace vectoriel E est de dimension finie, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$ de E est de dimension finie. Nous pouvons donc appliquer le théorème du rang à l'application linéaire $w\colon\ \mathrm{Ker}\,(u^{i+j}) \longrightarrow E$ pour obtenir :
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)\right) = \dim(\mathrm{Ker}\,(w)) + \dim(\mathrm{Im}\,(w))\ . \tag{3}$$
L'application w est la restriction à $\mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$ de l'endorphisme u^j de E. Ainsi :
$$\mathrm{Ker}\,(w) = \mathrm{Ker}\left(u^j\right)\ \cap\ \mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right) = \mathrm{Ker}\left(u^j\right)$$
car $\mathrm{Ker}\,(u^j) \subset \mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$. Donc :
$$\dim(\mathrm{Ker}\,(w)) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^j\right)\right)\ . \tag{4}$$
Du résultat établi à la question 3.(a), on déduit :
$$\dim(\mathrm{Im}\,(w)) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^i\right)\right)\ . \tag{5}$$
En sommant membre à membre (4) et (5) et en utilisant l'identité (3), il vient :
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{i+j}\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^i\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^j\right)\right)\ .$$

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 2$.

(a) Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(u^2)) = 2$. On pourra utiliser deux fois la question 3.(b).

D'après la question 3.(b) :
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^3\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^2\right)\right) + \dim(\mathrm{Ker}\,(u))\ .$$
D'après les hypothèses faites sur u et le théorème du rang : $\mathrm{Ker}\,(u^3) = E$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(u)) =$

1. On en déduit :

$$2 \leqslant \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) \ . \tag{6}$$

Toujours d'après la question 3.(b) :

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) \leqslant 2\ \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u\right)\right) \ .$$

Or nous avons déjà observé : $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u\right)\right) = 1$. Donc :

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) \leqslant 2 \ . \tag{7}$$

De (6) et (7), nous déduisons : $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) = 2$.

(b) Démontrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

- Comme $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right) = 2$ et $\dim(E) = 3$, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ de E est strictement inclus dans E. Donc il existe un vecteur a de E, qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)$. Ainsi a-t-on $u^2(a) \neq 0$.
- La famille $(u^2(a), u(a), a)$ est formée de 3 vecteurs de E, qui est de dimension 3. Pour prouver que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E, il suffit donc de démontrer que la famille est libre.
- Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que :

$$\lambda_0\, a + \lambda_1\, u(a) + \lambda_2\, u^2(a) = 0 \ . \tag{8}$$

En appliquant u^2 à chacun des membres de (8) et en utilisant le fait que u^3 est nul, il vient :

$$\lambda_0\, u^2(a) = 0 \ .$$

Comme $u^2(a) \neq 0$, nécessairement $\lambda_0 = 0$. L'identité (8) s'écrit alors :

$$\lambda_1\, u(a) + \lambda_2\, u^2(a) = 0 \ . \tag{9}$$

En appliquant u à chacun des membres de (9) et en utilisant le fait que u^3 est nul, il vient :

$$\lambda_1\, u^2(a) = 0 \ .$$

Comme $u^2(a) \neq 0$, nécessairement $\lambda_1 = 0$. L'identité (9) s'écrit alors :

$$\lambda_2\, u^2(a) = 0 \ .$$

Comme $u^2(a) \neq 0$, nécessairement $\lambda_2 = 0$. La famille $(u^2(a), u(a), a)$ est donc libre.

(c) Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

- Comme :
$$\begin{aligned} &u\left(u^2(a)\right) = u^3(a) = 0 = 0.u^2(a) + 0.u(a) + 0.a \\ &u(u(a)) = u^2(a) = 1.u^2(a) + 0.u(a) + 0.a \\ &u(a) = 0.u^2(a) + 1.u(a) + 0.a \end{aligned}$$
la matrice U de u dans la base $(u^2(a), u(a), a)$ est :
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
- La matrice V est égale à $U^2 - U$. Après calcul :
$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 1$.

(a) Démontrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme u de E livre :
$$3 = \dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) + \mathrm{Rg}(u) .$$
Donc $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = 2 < 3 = \dim(E)$. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(u)$ de E est donc strictement inclus dans E. Donc il existe un vecteur b de E, qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}\,(u)$. Ainsi a-t-on $u(b) \neq 0$.

(b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\mathrm{Ker}\,(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis démontrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.

- Comme $u^2 = 0$, le vecteur $u(b)$ appartient à $\mathrm{Ker}\,(u)$. Le vecteur $u(b)$ est non nul, donc la famille $(u(b))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Comme $\mathrm{Ker}\,(u)$ est de dimension 2, le théorème de la base incomplète assure l'existence d'un vecteur c de $\mathrm{Ker}\,(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$. En particulier, la famille $(u(b), c)$ ainsi construite est libre.
- La famille $(b, u(b), c)$ est formée de 3 vecteurs de E, qui est de dimension 3. Pour prouver que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E, il suffit donc de démontrer que la famille est libre.
  Soient $\lambda_0, \lambda_1, \mu$ des nombres réels tels que :
  $$\lambda_0\, b + \lambda_1\, u(b) + \mu\, c = 0 . \tag{10}$$
  En appliquant u à chacun des membres de (10) et en utilisant le fait que $u(b)$ et c appartiennent à $\mathrm{Ker}\,(u)$, il vient :
  $$\lambda_0\, u(b) = 0 .$$

Comme $u(b) \neq 0$, nécessairement $\lambda_0 = 0$. L'identité (10) s'écrit alors :

$$\lambda_1 \, u(b) + \mu \, c = 0 \ .$$

La famille $(u(b), c)$ étant libre, on en déduit : $\lambda_1 = \mu = 0$. La famille $(b, u(b), c)$ est donc libre.

(c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

- Comme :

$$\begin{array}{l} u(b) = 0.b + 1.u(b) + 0.c \\ u(u(b)) = u^2(b) = 0 = 0.b + 0.u(b) + 0.c \\ u(c) = 0 = 0.b + 0.u(b) + 0.c \end{array}$$

la matrice U' de u dans la base $(b, u(b), c)$ est :

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

- La matrice V' est égale à $(U')^2 - U'$. Comme $u^2 = 0$, la matrice $(U')^2$ est nulle. Donc :

$$V' = -U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On se propose de démontrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}. On pose alors :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit une matrice P de $GL_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

6. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

Dans notre réponse à la question 2, nous avons établi que deux matrices semblables ont même déterminant. Donc $\det(A) = \det(T)$. Or $\det(T) = 1$. Ainsi $\det(A) = 1 \neq 0$. La matrice A est donc inversible.

7. Calculer N^3 et démontrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

- On calcule les matrices N^2 et N^3.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0\ .$$

- On calcule :

$$T\ \left(I_3 - N + N^2\right) = (I_3 + N)\left(I_3 - N + N^2\right) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 - N^3 = I_3 - N^3 = I_3\ .$$

En en déduit :

$$T^{-1} = I_3 - N + N^2\ . \tag{11}$$

De $P^{-1}AP = T$, on déduit :

$$P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1} = T^{-1}$$

et donc :

$$P^{-1}A^{-1}P = T^{-1}\ . \tag{12}$$

D'après (11) et (12) : $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

8. On suppose dans cette question que $N = 0$. Démontrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Comme $N = 0$, la matrice T est la matrice I_3. Donc $A = PTP^{-1} = I_3$. Ainsi a-t-on $A^{-1} = A$. La relation $\sim$ étant réflexive (cf. question 1), $A \sim A^{-1}$.

9. On suppose dans cette question que $\mathrm{Rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

(a) Démontrer que la matrice N est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire, en utilisant la question 4, une matrice semblable à la matrice M.

- Fixons une base $\mathcal{B}_1$ de E et considérons l'endomorphisme u de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est N.
Comme $\mathrm{Rg}(N) = \mathrm{Rg}(u)$, le rang de u est 2. Nous avons calculé $N^3 = 0$. Ainsi : $u^3 = 0$.
L'endomorphisme u de E satisfait donc les hypothèses faites à la question 4. Les résultats établis lors du traitement de cette question s'appliquent donc. Ainsi existe-t-

il une base $\mathcal{B}_2$ de E tel que :

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

D'après le théorème de changement de bases :

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) \times P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} . \tag{13}$$

La matrice de passage $P := P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$. Ainsi (13) peut se ré-écrire :

$$N = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P .$$

Les matrices N et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont donc semblables.

- On calcule :

$$\begin{aligned} M &= N^2 - N \\ &= \left(P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \right)^2 - P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P - P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P . \end{aligned}$$

Les matrices M et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont donc semblables.

(b) Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{Rg}(M)$.

- Si on spécifie $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\gamma = -1$, la matrice N coïncide avec la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, d'après le calcul de N^3 fait à la question 7 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = 0$$

On calcule :

$$M^3 = \left(P^{-1}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P\right)^3 = P^{-1}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^3 P = 0\,.$$

- Le rang de la matrice $\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est 2. Comme M est semblable à cette matrice et que deux matrices semblables ont même rang, le rang de M est également 2.

(c) Démontrer que les matrices M et N sont semblables.

- Nous avons établi : $M^3 = 0$ et $\mathrm{Rg}(M) = 2$. De la même manière qu'en 9.(a), nous en déduisons que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
- En 9.(a), nous avons démontré que N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
- Les matrices M et N sont toutes deux semblables à la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence (cf. question 1), nous en déduisons que M et N sont semblables.

(d) Démontrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

- D'après la question 9.(c), il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que :

$$M = N^2 - N = Q^{-1}NQ\,.$$

On en déduit :

$$I_3 - N + N^2 = I_3 + Q^{-1}NQ = Q^{-1}I_3Q + Q^{-1}NQ = Q^{-1}(I_3 + N)Q = Q^{-1}TQ\,.$$

Donc $T \sim I_3 - N + N^2$.
- Nous savons : $A \sim T$ (cf. hypothèse initiale sur A), $T \sim I_3 - N + N^2$ et $A^{-1} \sim I_3 - N + N^2$ (cf. question 7). La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence (cf. question 1), nous en déduisons que A et A^{-1} sont semblables.

10. On suppose dans cette question que $\mathrm{Rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Démontrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

- On rappelle que $N = \begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \gamma\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Le rang de N étant égal à 1, nécessairement $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Alors le calcul de N^2 effectué à la question 7 livre $N^2 = 0$.

- Fixons une base $\mathcal{B}_3$ de E et considérons l'endomorphisme v de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_3$ est N.
  Comme $\mathrm{Rg}(N) = \mathrm{Rg}(v)$, le rang de v est 1. Nous avons établit $N^2 = 0$. Ainsi : $v^2 = 0$.
  L'endomorphisme v de E satisfait donc les hypothèses faites à la question 5. Les résultats établis lors du traitement de cette question s'appliquent donc. Ainsi existe-t-il une base $\mathcal{B}_4$ de E tel que :
  $$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_4}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
  D'après le théorème de changement de bases :
  $$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_3}(v) = P_{\mathcal{B}_3 \to \mathcal{B}_4} \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_4}(v) \times P_{\mathcal{B}_4 \to \mathcal{B}_3} . \tag{14}$$
  La matrice de passage $Q := P_{\mathcal{B}_4 \to \mathcal{B}_3}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}_3 \to \mathcal{B}_4}$. Ainsi (14) peut se ré-écrire :
  $$N = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q . \tag{15}$$
  Les matrices N et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont donc semblables.
- On observe :
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
  Comme la matrice Diag$(1, -1, 1)$ est inversible, égale à son inverse, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
- De (15), on déduit :
  $$-N = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q .$$
  Les matrices $-N$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont donc semblables.
- Nous avons établi : $N \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $-N \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence (cf. question 1), nous en déduisons que N et $-N$ sont semblables.

- Puisque $-N \sim N$, il existe une matrice $R \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que :

$$-N = R^{-1}NR\,.$$

On en déduit :

$$I_3 - N = I_3 + R^{-1}NR = R^{-1}I_3R + R^{-1}NR = R^{-1}(I_3+N)R = R^{-1}TR\,.$$

Donc $T \sim I_3 - N$.
- Nous savons : $A \sim T$ (cf. hypothèse initiale sur A), $T \sim I_3 - N$ et $A^{-1} \sim I_3 - N$ (cf. question 7 et $N^2 = 0$). La relation $\sim$ étant une relation d'équivalence (cf. question 1), nous en déduisons que A et A^{-1} sont semblables.

11. Exemple. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

(a) Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

- L'application $u - \mathrm{id}_E$ est un endormorphisme de E, comme combinaison linéaire d'endomorphismes de E. Son noyau, $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E)$, est donc un sous-espace vectoriel de E.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1\, a + \lambda_2\, b + \lambda_3\, c \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E) \quad &\Leftrightarrow \quad u(\lambda_1\, a + \lambda_2\, b + \lambda_3\, c) = \lambda_1\, a + \lambda_2\, b + \lambda_3\, c \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_1\, u(a) + \lambda_2\, u(b) + \lambda_3\, u(c) = \lambda_1\, a + \lambda_2\, b + \lambda_3\, c \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_1\, a + \lambda_2\, c + \lambda_3\,(-b + c) = \lambda_1\, a + \lambda_2\, b + \lambda_3\, c \\
&\Leftrightarrow \quad (\lambda_2 + \lambda_3)\, b - (\lambda_2 + \lambda_3)\, c = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad [\text{la famille } (b, c) \text{ est libre}]
\end{aligned}$$

De cette étude, on déduit :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E) = \left\{\lambda_1\, a + \lambda_2\, b - \lambda_3\, c \;:\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\,(a, b - c)$$

La famille $(a, b - c)$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E)$. Vérifions qu'elle est libre.
- Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}$ tels que : $\mu_1\, a + \mu_2\,(b - c) = 0$. Alors $\mu_1\, a + \mu_2\, b - \mu_2\, c = 0$. La famille (a, b, c) étant libre, il vient $\mu_1 = \mu_2 = 0$.
- Nous avons démontré que $(a, b - c)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E)$. Ainsi, la dimension de $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E)$ vaut-elle 2.

(b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.

- La famille $(a, b - c, c)$ est formée de 3 vecteurs de E, qui est de dimension 3. Pour prouver que la famille $(a, b - c, c)$ est une base de E, il suffit donc de démontrer que la famille est libre.

Soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{R}$ tels que : $\mu_1\, a + \mu_2\,(b-c) + \mu_3\, c = 0$. Alors :

$$\mu_1\, a + \mu_2\, b + (\mu_3 - \mu_2)\, c = 0 \ .$$

La famille (a, b, c) étant libre, il vient : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 - \mu_2 = 0$. Nous en déduisons : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$.

- Comme :

$$\begin{aligned} u(a) &= a = 1.a + 0.(b-c) + 0.c \\ u(b-c) &= b - c = 0.a + 1.(b-c) + 0.c \\ u(c) &= -b + 2c = 0.a + (-1).(b-c) + 1.c \end{aligned}$$

la matrice de u dans la base $(a, b-c, c)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

(c) Démontrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Posons $\mathcal{B}_5 := (a, b, c)$ et $\mathcal{B}_6 := (a, b-c, c)$. D'après le théorème de changement de bases :

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_5}(u) = P_{\mathcal{B}_5 \to \mathcal{B}_6} \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_6}(u) \times P_{\mathcal{B}_6 \to \mathcal{B}_5} \ . \tag{16}$$

La matrice de passage $S := P_{\mathcal{B}_6 \to \mathcal{B}_5}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}_5 \to \mathcal{B}_6}$. Ainsi (16) peut se ré-écrire :

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S \ .$$

Les matrices A et

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont donc semblables. Nous posons :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, T s'écrit $T = I_3 + N$ et la matrice N est de rang 1. Le résultat de la question 10 s'applique. Les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ?$$

Non. Donnons un contre-exemple.
Considérons la matrice $\mathrm{Diag}(-1, 1, 1)$. Elle est inversible et égale à son inverse, donc semblable à son inverse. Son déterminant étant égal à -1, elle ne peut être semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car toutes ces matrices ont 1 pour déterminant (cf. question 2).