M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Chapitre 7
Matrices par blocs et sous-espaces stables

David BLOTTIÈRE

Table des matières

1 Matrices définies par blocs : sommes et produits

C7. 1. *Notation.* — Dans cette partie, la lettre $\mathbf{K}$-désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$.

C7. 2. *Remarque (Découpage d'une matrice en blocs).* — Soient $n \geqslant 2$, $p \in [\![1, n-1]\!]$. Il est parfois utile de considérer une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ comme une matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$.

C7. 3. Théorème (Somme et produit de matrices par blocs). — *Les matrices par blocs s'additionnent et se multiplient comme des matrices 2×2. Plus précisément, soient*

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

avec $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})$ et $D_1, D_2 \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$.
Alors :

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad M_1 M_2 = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix}.$$

C7. 4. *Remarque.* — On peut généraliser ces formules à une décomposition en un nombre arbitraire de blocs.

C7. 5. *Exercice (Puissances d'une matrice diagonale par blocs).* — Soient $n_1, \ldots, n_p$ des nombres entiers naturels non nuls. Soient $A_1 \in \mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbf{K})$, …,$A_p \in \mathrm{Mat}_{n_p}(\mathbf{K})$. Y a-t-il un lien entre les puissances de la matrice diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix}$$

et les puissances des matrices $A_1, \ldots, A_p$?

C7. 6. *Exercice (Inversibilité et inverse d'une matrice triangulaire par blocs).* — Soient $M \in GL_n(\mathbf{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$. Notons M la matrice définie par blocs par $P = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et exprimer P^{-1} en fonction de M^{-1} et L.

2 Déterminant d'une matrice carrée définie par blocs

C7. 7. Théorème (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs). —

1. *Soit* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$*, où* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$*,* $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$*,* $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$*. Alors* $\det(M) = \det(A)\ \det(D)$.
2. *Plus généralement, si* $n_1, \ldots, n_p$ *sont des nombres entiers naturels non nuls, si*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in \mathit{Mat}_{n_1}(\mathbf{K})$*, …,*$A_p \in \mathit{Mat}_{n_p}(\mathbf{K})$*, alors* $\det(M) = \det(A_1)\ \dots\ \det(A_p)$.

C7. 8. *Remarque.* — Ce théorème est valable pour des matrices triangulaires inférieures par blocs.

C7. 9. *Exercice (Démonstration du Théorème* **C7.7***).* —

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, soit $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$. Démontrer :

$$\det \begin{pmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A).$$

2. En écrivant judicieusement $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices, démontrer la première assertion du Théorème **C7.7**.
3. En déduire la deuxième assertion du Théorème **C7.7**.

3 Généralités sur les sous-espaces stables

C7. 10. *Notation.* — Dans cette partie, on note E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, où $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

C7. 11. Définition (Sous-espace stable par un endomorphisme). — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u, ou que u stabilise F, si $u(F) \subset F$, i.e. si :*

$$\forall x \in F \quad u(x) \in F\ .$$

C7. 12. *Remarque.* — Les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E.

C7. 13. Définition (Endomorphisme induit). — *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E, qui est stable par F. L'application $u_{|F}$ définie par :*

$$u_{|F} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme de F induit par u.

C7. 14. *Exercice (Un endormorphisme de $\mathbf{R}^3$ stabilisant un plan)).* —

1. Démontrer que le plan F de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ est stable par l'endomorphisme :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z) \end{array} \right.$$

2. Déterminer la matrice de $u_{|F}$ dans la base $((1,-1,0),(1,0,-1))$ de F.
3. Reconnaître l'endomorphisme $u_{|F}$ de F ?

C7. 15. *Exercice (Un sous-espace stable n'admet pas nécessairement un supplémentaire stable).* — Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

1. Déterminer toutes les droites de $\mathbf{R}^2$ stables par f.
2. Soit D une droite stable par f. Justifier que D ne possède aucun supplémentaire stable par f.

C7. 16. *Exercice (Endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ ne possédant pas de sous-espace stable non trivial).* — Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ ne possédant aucun sous-espace stable non trivial.

4 Sous-espaces stables d'un espace vectoriel de dimension finie

C7. 17. *Notation.* — Dans cette partie, on note E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, où $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

C7. 18. Définition (Base adaptée à un sous-espace vectoriel). — *Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie $p \geqslant 1$. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite adaptée à F si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.*

C7. 19. *Remarque (Existence et constuction d'une base adaptée à un sous-espace vectoriel).* — Soient $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(n-p)$ entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-p} \leqslant n$ tels que la famille $\mathcal{B} := \left(f_1, \ldots, f_p, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-p}}\right)$ soit une base de E. Le base $\mathcal{B}$ de E ainsi construite est adaptée à F.

C7. 20. Définition (Base adaptée à une décomposition en somme directe). — *Soient des sous-espaces vectoriels de E notés $E_1, E_2, \ldots, E_p$, de dimensions respectives $n_1 \geqslant 1, n_2 \geqslant 1, \ldots, n_p \geqslant 1$, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ si :*

$$\begin{gathered}
(e_1, \ldots, e_{n_1}) \text{ est une base de } E_1 \\
(e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}) \text{ est une base de } E_2 \\
\vdots \\
\left(e_{n_1+n_2+\ldots+n_k+1}, \ldots, e_{n_1+n_2+\ldots+n_k+n_{k+1}}\right) \text{ est une base de } E_{k+1} \\
\vdots \\
\left(e_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+1}, \ldots, e_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+n_p} = e_n\right) \text{ est une base de } E_p.
\end{gathered}$$

C7. 21. *Remarque (Existence et construction d'une base adaptée à une décomposition en somme directe).* — Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, soit $\mathcal{B}_k = (e_{k,1}, \ldots, e_{k,n_k})$ une base de F_k. Alors la famille

$$\mathcal{B} := \left(e_{1,1}, \ldots, e_{1,n_1}, e_{2,1}, \ldots, e_{2,n_2}, \ldots, e_{p,1}, \ldots, e_{p,n_p}\right)$$

obtenue en concaténant les familles $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ est une base de E, qui est adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

C7. 22. Proposition (Matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée). —

1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geqslant 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
   Alors F est stable par u si et seulement si pour toute base $\mathcal{B}$ de E adaptée à F :
   $$\mathit{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
   où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$.
2. *Soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives $n_1 \geqslant 1, n_2 \geqslant 1, \ldots, n_p \geqslant 1$, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
   Alors chacun des espaces $E_1, \ldots, E_p$ est stable par u si et seulement si pour toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E$:
   $$\mathit{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$
   où pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbf{K})$.

5 Droites stables

5.1 Droites stables versus valeurs propres et leurs vecteurs propres associés

C7. 23. *Notation.* — Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$, E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et u est un endomorphisme de E.

C7. 24. Proposition (Une CNS pour qu'une droite soit stable). — *Soit x un vecteur non nul de E. La droite $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda.x$.*

C7. 25. Définition (Valeur propre et vecteur propre). — *Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. S'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda.x$, alors :*

1. *λ est appelé valeur propre de u ;*
2. *x est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.*

C7. 26. *Remarque (Une méthode pour rechercher les éventuelles droites stables par u).* — D'après la Proposition **C7.24**, la recherche des droites stables par u se ramène à déterminer les $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que l'équation
$$u(x) = \lambda.x$$
d'inconnue $x \in E$, possède une solution différente de 0_E.

C7. 27. *Exercice (Droites stables par l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$).* — Soit D l'application définie par :

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \, . \end{array} \right.$$

Déterminer les droites de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ stables par D.

C7. 28. *Exercice.* — Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$, on note $u(f)$ l'application définie par :

$$u(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \, . \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $u(f) \in E$.
2. Montrer que l'application u définie par

$$u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) \end{array} \right.$$

   est un endomorphisme de E.
3. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de u.
4. Soit F le sous-espace vectoriel de E défini par $F = \{f \in E \;:\; \forall x \in \mathbf{R}^-,\; f(x) = 0\}$.
   (a) Montrer que F est stable par u.
   (b) On note v l'application définie par :

$$v \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & u(f) \, . \end{array} \right.$$

   Déterminer les éléments propres de v.

5.2 Recherche de droites stables en dimension finie

C7. 29. *Notation.* — Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$, E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u est un endomorphisme de E.

C7. 30. *Rappel (Déterminant d'un endomorphisme de E).* — Si v est un endomorphisme de E et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors le scalaire $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E. On l'appelle déterminant de v et on le note $\det(v)$.

C7. 31. **Proposition (Critère pour qu'un scalaire soit valeur propre de u).** — *Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :*

$$\lambda \text{ est valeur propre de } u \iff \det(\lambda.\,\mathrm{id}_E - u) = 0\ .$$

C7. 32. **Définition-Proposition (Polynôme caractéristique de u).** — *L'application χ_u définie par :*

$$\chi_u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(\lambda.\,\mathrm{id}_E - u) \end{array} \right.$$

est polynomiale. Le corps $\mathbf{K}$ étant infini, elle est associée à un unique polynôme, à coefficients dans $\mathbf{K}$, que l'on note également χ_u et que l'on appelle polynôme caractéristique de u.

C7. 33. *Remarque (Valeurs propres de u versus racines de son polynôme caractéristique).* — La Proposition **C7.31** se reformule comme suit. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

$$\lambda \text{ est valeur propre de } u \iff \lambda \text{ est racine de } \chi_u\ .$$

C7. 34. *Exercice (Recherche des valeurs propres et des droites stables d'un endormorphisme de $\mathbf{R}^3$).* — Soit f l'endormophisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que f n'est pas un automorphisme de $\mathbf{R}^3$. En déduire une valeur propre de f.
2. Déterminer toutes les valeurs propres de f.
3. Déterminer toutes les droites de $\mathbf{R}^3$ qui sont stables par f.

C7. 35. *Exercice.* —

1. Ici, E désigne un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u est un endomorphisme de E. Justifier qu'il existe une droite de E stable par u.
2. Ici, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie impaire $n \geqslant 1$ et u est un endomorphisme de E. Justifier qu'il existe une droite de E stable par u.

6 Droite ou plan stable pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

C7. 36. Lemme (Existence d'une droite stable vs. existence d'une valeur propre sur $\mathbf{K}$). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'endormorphisme u de E possède une valeur propre dans $\mathbf{K}$.*
2. *Il existe une droite vectorielle de E, qui est stable par u.*

Démonstration.
$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Supposons que u possède une valeur propre dans $\mathbf{K}$. Soit λ une telle et soit x un vecteur propre pour u, associé à la valeur propre λ.

- L'espace vectoriel $D := \mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.
  Soit $y \in D$. Alors il existe $k \in \mathbf{K}$ tel que $y = k\,x$. On calcule :
  $$u(y) = u(k\,x) = k\,u(x) = k\,\lambda\,x = \lambda\,k\,x = \lambda y$$
  Donc $u(y) \in \mathrm{Vect}(x)$.
- L'espace vectoriel $D := \mathrm{Vect}(x)$ est de dimension 1.
  Par définition de D, la famille (x) est génératrice de D. Comme $x \neq 0_E$, puisque vecteur propre, la famille (x) est également libre. Ainsi (x) est une base de D et donc $\dim(D) = 1$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Supposons qu'il existe une droite vectorielle D de E, qui est stable par u. Soit (x) une base de D.

- Le vecteur x est non nul, puisque la famille (x) est libre.
- Comme $x \in D$ et D est stable par u, le vecteur $u(x)$ appartient à $D = \mathrm{Vect}(x)$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que :
  $$u(x) = \lambda x$$

Des deux résultats précédents, nous déduisons que λ est une valeur propre de u. Q.E.D.

C7. 37. Proposition (Existence d'une droite stable par argument d'imparité sur $\mathbf{R}$). — *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si n est impair, alors il existe une droite vectorielle de E, qui est stable par u.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique de u, noté χ_u, est un polynôme à coefficients réels, unitaire, de degré impair. Donc, en identifiant χ_u et la fonction polynomiale de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui lui est canoniquement associée ($\mathbf{R}$ étant un corps infini, aucune ambiguïté n'est à craindre) :

$$\chi_u(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad \chi_u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Donc il existe un nombre réel a tel que :

$$\forall x \leq a, \quad \chi_u(x) \leq -1$$

et il existe un nombre réel b, que l'on peut supposer strictement plus grand que a, tel que :

$$\forall x \geq b, \quad \chi_u(x) \geq 1$$

En particulier $\chi_u(a) < 0$ et $\chi_u(b) > 0$. La restriction de la fonction polynomiale χ_u au segment $[a\,;b]$ est continue, prend une valeur négative en a et une valeur positive en b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction χ_u s'annule sur $]a\,;b[$.
Le polynôme χ_u possède une racine réelle et donc l'endomorphisme u une valeur propre réelle. D'après le Lemme **C7.36**, il existe une droite vectorielle de E, qui est stable par u. Q.E.D.

C7. 38. Théorème (Existence d'une droite ou d'un plan stable d'un $\mathbf{R}$-e.v. de dim. finie). — *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 3$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un sous-espace vectoriel F de E, qui est stable par u et de dimension 1 ou 2.*

Démonstration.

- 1^er cas : u possède une valeur propre réelle

  Supposons que u possède une valeur propre réelle. Alors, d'après le Lemme 1, il existe une droite vectorielle de E, qui est stable par u.

- 2^ème cas : u ne possède aucune valeur propre réelle

  Supposons que u ne possède aucune valeur propre réelle. Remarquons que d'après la Proposition **C7.37**, la dimension n de E est nécessairement paire. Nous allons prouver qu'il existe un plan de E, stable par u, en étendant les scalaires de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{C}$. Pour cela, nous allons considérer une matrice représentant u dans une base de E (nous pourrions procéder de manière plus intrinsèque, i.e. sans choisir une base de E, en considérant l'endomorphisme $u \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, qui est le complexifié de E, mais cette notion n'est pas au programme).

  — *Extension des scalaires de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{C}$, via une matrice représentant u dans une base de E*

  Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Posons :
  $$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$
  Nous allons, dans la suite, considérer M comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

  — *Introduction d'une valeur propre complexe et d'un vecteur propre de M, appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$*

  Les polynômes caractéristiques de M et u, notés respectivement χ_M et χ_u, sont des polynômes à coefficients réels, qui sont égaux. Comme u ne possède aucune valeur propre réelle, $\chi_M = \chi_u$ ne possède aucune racine réelle.

  D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, $\chi_M = \chi_u$, de degré $n \geqslant 1$, se scinde sur $\mathbf{C}$. Soit donc $\lambda \in \mathbf{C}$ une racine de $\chi_M = \chi_u$ dans $\mathbf{C}$. Ainsi λ est une valeur propre de la matrice M, vue comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et d'après le paragraphe qui précède :
  $$\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} \tag{1}$$
  Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de la matrice M, vue comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, qui est associé à la valeur propre λ. Ainsi :
  $$M\,X = \lambda\,X \tag{2}$$

— *Construction des deux vecteurs x et y qui formeront une base d'un plan stable par u*

Nous allons à présent redescendre de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$. Pour cela, introduisons la partie réelle et la partie imaginaire de λ (resp. X) :

$$\lambda = a + i\,b \qquad \text{et} \qquad X = A + i\,B$$

où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2$. Soient x (resp. y) le vecteur de E, dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ (resp. $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$). Ainsi :

$$\mathbf{Mat}_B(x) = A \qquad \text{et} \qquad \mathbf{Mat}_B(y) = B$$

— *Liberté de la famille (x, y) sur $\mathbf{R}$*

Nous allons montrer que la famille (x, y) est libre sur $\mathbf{R}$. Raisonnons par l'absurde.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que :

$$\alpha\,x + \beta\,y = 0_E \tag{3}$$

En passant aux matrices de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, i.e. en appliquant l'application linéaire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$ à chaque membre de l'identité (3), il vient :

$$\alpha\,A + \beta\,B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \tag{4}$$

En multipliant par α chacun des membres de l'identité (2), qui se réécrit :

$$M\ (A + i\,B) = \lambda\,(A + i\,B) \tag{5}$$

on obtient :

$$M\ (\alpha\,A + i\,\alpha\,B) = \lambda\,(\alpha\,A + i\,\alpha\,B)$$

d'où :

$$M\ (-\beta\,B + i\,\alpha\,B) = \lambda\,(-\beta\,B + i\,\alpha\,B)$$

qui s'écrit encore :

$$(-\beta + i\,\alpha)\ M\ B = (-\beta + i\,\alpha)\,\lambda\,B$$

Comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, nous en déduisons :

$$M\ B = \lambda\,B \tag{6}$$

Si $B \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$, nous déduisons de l'identité (6) que $\lambda \in \mathbf{R}$, car M et B sont des matrices à coefficients réels, d'où une contradiction (cf. (1)). Donc $B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$.

Alors l'identité (5) se réécrit :

$$M\ A = \lambda\,A \tag{7}$$

Si $A \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$, nous déduisons de l'identité (7) que $\lambda \in \mathbf{R}$, car M et A sont des matrices à coefficients réels, d'où une contradiction (cf. (1)). Donc $A = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$.

Nous avons finalement établi que $X = A + i\,B$ est le vecteur nul, ce qui contredit le fait que X est un vecteur propre.

La famille (x, y) est donc libre. Ainsi, $\mathrm{Vect}\,(x, y)$ est un plan vectoriel de E.

— ***Stabilité du plan vectoriel*** $\mathrm{Vect}\,(x,y)$ ***de*** E ***par*** u

L'identité (5) se réécrit :

$$M\ (A+i\,B)=(a+i\,b)\ (A+i\,B)$$

d'où :

$$\underbrace{M\ A}_{\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}+i\underbrace{M\ B}_{\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}=\underbrace{a\,A-b\,B}_{\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}+i\underbrace{(b\,A+a\,B)}_{\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$$

puis, par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire :

$$\left\{\begin{array}{lcccc} M\ A & = & a\,A & - & b\,B \\ M\ B & = & b\,A & + & a\,B \end{array}\right. \tag{8}$$

Comme $M=\mathrm{Mat}_B(u)$, la première ligne du système (8) livre :

$$\mathrm{Mat}_B(u)\times\mathrm{Mat}_B(x)=a\,\mathrm{Mat}_B(x)-b\,\mathrm{Mat}_B(y)$$

d'où :

$$\mathrm{Mat}_B(u(x))=\mathrm{Mat}_B\,(a\,x-b\,y)$$

Les coordonnées des vecteurs $u(x)$ et $a\,x-b\,y$ dans la base $\mathcal{B}$ sont identiques. Donc ces vecteurs de E sont égaux :

$$u(x)=a\,x-b\,y\in\mathrm{Vect}\,(x,y)$$

De manière analogue la deuxième ligne de (8) produit l'identité :

$$u(y)=b\,x+a\,y\in\mathrm{Vect}\,(x,y)$$

Comme les vecteurs $u(x)$ et $u(y)$ appartiennent à $\mathrm{Vect}\,(x,y)$, le plan $\mathrm{Vect}\,(x,y)$ est stable par u.

Nous avons donc établi que E possède un plan stable par u.

Q.E.D.

7 Premiers résultats sur la réduction des endomorphismes

C7. 39. *Notation.* — Dans cette partie, $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$ et u est un endomorphisme de E.

7.1 Endormorphismes diagonalisables

C7. 40. DÉFINITION (ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE). — *On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.*

C7. 41. THÉORÈME (ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE VERSUS SOUS-ESPACES STABLES). — *L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si E se décompose en somme directe de droites stables par u.*

7.2 Endormorphismes trigonalisables

C7. 42. Définition (Endomorphisme trigonalisable). — *On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.*

C7. 43. *Remarque.* — u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire inférieure.

C7. 44. Définition (Drapeau de E et drapeau stable de E). —

1. *On appelle drapeau de E une famille $(F_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de sous-espaces vectoriels de E telle que :*
   (a) *pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $F_k \subset F_{k+1}$;*
   (b) *pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dim(F_k) = k$.*
2. *Un drapeau $(F_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E est dit stable par u si chacun des sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ est stable par u.*

C7. 45. *Exercice.* — Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Donner un drapeau de $\mathbf{K}^n$, construit à l'aide des vecteurs de $\mathcal{B}_0$.

C7. 46. Théorème (Endomorphisme trigonalisable versus sous-espaces stables). — *L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si E admet un drapeau stable par u.*

C7. 47. Théorème (Tout endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel est trigonalisable). — *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit u un endormorphisme de E. Alors u est trigonalisable.*

C7. 48. *Exercice (Trigonalisabilité d'une matrice complexe).* — Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telles que :

$$A = PTP^{-1} .$$

C7. 49. Théorème (Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit u un endormorphisme nilpotent de E. Alors u est trigonalisable.*

Démonstration. Cf. Corrigé de la Partie 3 du devoir surveillé n°3. Q.E.D.

C7. 50. *Exercice (Trigonalisabilité d'une matrice nilpotente).* — Soit $n \geqslant 2$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente. Démontrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure stricte $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telles que :

$$N = PTP^{-1} .$$

8 Une sélection d'exercices

C7. 51. *Exercice.* — Soient $A \in GL_p(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $D \in GL_{n-p}(\mathbf{K})$.
Démontrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A^{-1}, D^{-1} et C.

C7. 52. *Exercice.* — Soient $A_1 \in GL_{n_1}(\mathbf{K}), \ldots, A_p \in GL_{n_p}(\mathbf{K})$ et soit M la matrice diagonale par blocs $M = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix}$. Démontrer que M est inversible et calculer son inverse.

C7. 53. *Exercice.* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang r. Déterminer le rang de $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

C7. 54. *Exercice.* — Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que C et D commutent et D soit inversible. Démontrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

Indication : on pourra écrire la matrice $\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *comme un produit de deux matrices.*

C7. 55. *Exercice.* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $\begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $I_n - A$ et $I_n + A$ le sont.

C7. 56. *Exercice.* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $\begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $I_n - A$ et $I_n + A$ le sont.

C7. 57. *Exercice.* — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. **Démontrer que :** $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.
2. **Démontrer que :** $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$.

   Indication : On pourra multiplier certaines lignes et colonnes de** $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ **par** i **et effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes.
3. **Démontrer que :** $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$.
4. Supposons que $AB = BA$. **Démontrer que :** $\det\left(A^2+B^2\right) \geqslant 0$.
5. Démontrer que l'inégalité de la question 4 ne vaut pas nécessairement, lorsque A et B ne commutent pas.

C7. 58. *Exercice (Endomorphismes qui commutent, stabilisation des noyaux et des images).* — Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v.

C7. 59. *Exercice (Sous-espaces de* $\mathbf{K}[X]$ *stables par dérivation).* — Soit D l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$ défini par :

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' . \end{array} \right.$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation. On suppose que F contient un polynôme P non nul et on pose $n = \deg(P) \in \mathbf{N}$. Démontrer $\mathbf{K}_n[X] \subset F$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation. On suppose que F est distinct de $\left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$ et de $\mathbf{K}[X]$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $F = \mathbf{K}_n[X]$.
   Indication on pourra considérer le maximum de** $\left\{\deg(P) \;:\; P \in F \setminus \left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}\right\}$**, après avoir justifié son existence.
4. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par dérivation.