# M P

## Lycée Chrestien de Troyes

## Mathématique

# Programme de la journée de révisions n°10<br>Matrices

David BLOTTIÈRE

Une matrice à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbf{K}$. On peut additionner des matrices de même format, multiplier une matrice par un scalaire et, dans certains cas, multiplier une matrice par une autre. Si l'on se restreint au cas des matrices carrées à $n$ lignes et $n$ colonnes, alors l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qu'elles forment se trouve muni de trois opérations $+$, $.$ et $\times$ qui en font une $\mathbf{K}$-algèbre. On peut alors jouer dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ à résoudre des équations algébriques, e.g. :

$$J \times M + M \times J = 2021.I_n$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, où $I_n$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Il faut cependant prendre garde à deux défauts : la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ n'est ni commutative, ni intègre dès que $n \geqslant 2$, ce qui rend les résolutions d'équations plus subtiles (et passionnantes). La définition de la multiplication matricielle est intimement liée à la composition des applications linéaires. En fait, matrices et applications linéaires dansent ensemble : des propriétés matricielles se reflètent sur les applications linéaires et réciproquement. Ce ballet s'incarne dans la Proposition 12 du document support [PDF] qu'on étudiera intensément.

**R10. 1.** *Notations.* — Dans tous ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

**R10. 2.** *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur les matrices [PDF].

Une matrice de format $n \times p$, où $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ est un tableau à $p$ lignes et à $n$ colonnes, dont les entrées sont des éléments de $\mathbf{K}$ (Première définition de la section 1.1 du document support).

L'ensemble des matrices de format $n \times p$, où $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies composante par composante. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension $np$ (Propriété 1 du document support).

On attache à une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ un nombre, appelé le rang de la matrice (Deuxième définition de la section 1.1 du document support). On étudiera soigneusement les propriétés du rang d'une matrice (Propriétés 2 et 3 du document support).

Il y a un lien ténu entre les matrices et les applications linéaires de source et but de dimension finie. Les sections 1.2 et 1.3 sont consacrées à préciser ces relations et constituent le cœur de ce chapitre. Le point fondamental est le suivant : si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $p$ muni d'une base $\mathcal{B}$, si $F$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$ muni d'une base $\mathcal{C}$, si $f \in \mathcal{L}(E)\,F$, on définit la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme étant la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définie par

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \qquad [\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)]_{i,j} := i\text{-ème coordonnée de } f(e_j) \text{ dans la base } \mathcal{C}\ .$$

L'application

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\cdot) \quad \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E)\,F & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

On peut, dans certain cas, multiplier des matrices (Première définition de la section 2.1). Soient $n, p, q$ des nombres entiers naturels non nuls. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on définit la matrice $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \qquad [A \times B]_{i,j} := \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}\,[B]_{k,j}\ .$$

Au cours de l'étude de la section 2.2, on reverra les liens entre les opérations sur les applications linéaires et celles définies sur les matrices. Il y a des liens très forts que l'on doit connaître. Le plus important d'entre eux est le suivant.
Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$ muni d'une base $\mathcal{B}$, si $F$ est un espace vectoriel de dimension finie $p$ muni d'une base $\mathcal{C}$, si $G$ est un espace vectoriel de dimension finie $q$ muni d'une base $\mathcal{D}$, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, si $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\ .$$

On observe que le produit matriciel est, en quelque sorte, le reflet de la composition d'applications linéaires.

La partie suivante (2.3) est consacré au cas particulier des matrices carrées. Si $n \in \mathbf{N}^*$, alors $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), ., +, \times)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre qui est non commutative, dès que $n \geqslant 2$.

Si $E$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, alors on dispose d'un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{L}(E), ., +, \circ) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), ., +, \times) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right.$$

qui permet de démontrer des résultats très puissants, par exemple sur l'inversibilité des matrices carrées. Il faut bien maîtriser tous les résultats de cette partie.

La partie 2.4 expose des résultats basiques et utiles sur la trace et la transposée d'une matrice (en particulier des propriétés en lien avec le produit matriciel).

On terminera par l'étude de la partie 3, en prenant bien le temps de comprendre (de nouveau) tout le matériel exposé. Le théorème de changement de bases (Théorème 22 du document support) est central dans le programme de MP. Les matrices semblables et les matrices équivalentes font, quant à elles, l'objet de nombreux sujets de concours.

Ce travail sur le cours est fondamental. Il convient de connaître toutes les définitions, ainsi que les énoncés et des démonstrations de chacun des résultats de ce chapitre.

**R10. 3.** *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ :
$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$
2. Soit $a, b, c, d$ des nombres réels tels que $ad - bc \neq 0$. Alors la matrice
$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
est inversible et a pour inverse la matrice $B := \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
3. Si $A$ et $B$ sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
4. Si $A$ et $B$ sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, alors $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
5. La matrice de l'application linéaire :
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, x + y) \end{array} \right.$$
dans la base $\mathcal{B} := (u_1 := (1, 1), u_2 := (1, -1))$ de $\mathbf{R}^2$ est $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

**R10. 4.** *Centre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Le centre de l'algèbre $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), ., +, \times)$, noté $Z$, est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, i.e.

$$Z := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ : \ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad AM = MA\} \ .$$

Démontrer que $Z = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(I_n)$.

**R10. 5.** *Calcul des puissances d'une matrice.* — Soit $p$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient :

- $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 ,
- $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls et les autres égaux à 1.

1. Démontrer que $A^2 = p\,A$.
2. Déterminer une expression de $A^n$ en fonction de $A$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. En déduire $B^n$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

**R10. 6**. *Exemples de matrices semblables à leur inverse.* — Dans tout ce problème, $E$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Pour $u$ endomorphisme de $E$ et $n$ entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u$ ($n$ fois).
On note $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et $I_3$ la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.
Pour deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on dira que la matrice $A$ est semblable à la matrice $B$ s'il existe une matrice $P$ de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

*Partie A*

1. On notera $A \sim B$, pour dire que la matrice $A$ est semblable à la matrice $B$. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

   On pourra désormais dire que les matrices $A$ et $B$ sont semblables.
2. Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.
3. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et soit $i$ et $j$ deux entiers naturels. On considère l'application $w$ de $\mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$ vers $E$ définie par :
$$w(x) = u^j(x)$$
   pour tout $x \in \mathrm{Ker}\,(u^{i+j})$.
   (a) Démontrer que $\mathrm{Im}\,(w) \subset \mathrm{Ker}\,(u^i)$.
   (b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}\,(u^{i+j})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,(u^i)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(u^j))$.
4. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 2$.
   (a) Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(u^2)) = 2$. On pourra utiliser deux fois la question 3.(b).
   (b) Démontrer que l'on peut trouver un vecteur $a$ non nul de $E$ tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de $E$.
   (c) Écrire alors la matrice $U$ de $u$ et la matrice $V$ de $u^2 - u$ dans cette base.
5. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{Rg}(u) = 1$.
   (a) Démontrer que l'on peut trouver un vecteur $b$ non nul de $E$ tel que $u(b) \neq 0$.
   (b) Justifier l'existence d'un vecteur $c$ de $\mathrm{Ker}\,(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis démontrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de $E$.
   (c) Écrire alors la matrice $U'$ de $u$ et la matrice $V'$ de $u^2 - u$ dans cette base.

*Partie B*

Soit désormais une matrice $A$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On se propose de démontrer que la matrice $A$ est semblable à son inverse $A^{-1}$. On pose alors :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit une matrice $P$ de $GL_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

6. Expliquer pourquoi la matrice $A$ est bien inversible.
7. Calculer $N^3$ et démontrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
8. On suppose dans cette question que $N = 0$. Démontrer alors que les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.
9. On suppose dans cette question que $\mathrm{Rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
   (a) Démontrer que la matrice $N$ est semblable à la matrice :
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   et en déduire, en utilisant la question 4, une matrice semblable à la matrice $M$.
   (b) Calculer $M^3$ et déterminer $\mathrm{Rg}(M)$.
   (c) Démontrer que les matrices $M$ et $N$ sont semblables.
   (d) Démontrer alors que les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.
10. On suppose dans cette question que $\mathrm{Rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Démontrer que les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.
11. Exemple. Soit la matrice
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
    On note $(a, b, c)$ une base de $E$ et $u$ l'endomorphisme de $E$ de matrice $A$ dans cette base.
    (a) Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 2 dont on donnera une base $(e_1, e_2)$.
    (b) Justifier que la famille $(e_1, e_2, c)$ est une base de $E$ et écrire la matrice de $u$ dans cette base.
    (c) Démontrer que les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.
12. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type :
    $$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$