M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°3
Limite d'une fonction de la variable réelle

David BLOTTIÈRE

La définition formelle d'une fonction de la variable réelle présente des liens forts avec la définition formelle déjà énoncée pour les suites numériques. Une fois cette définition introduite, on peut donner un sens précis à la continuité d'une fonction de la variables réelle, au-delà d'une approche intuitive via le graphe. Cette dernière reste néanmoins pertinente, ne serait-ce que pour disposer d'une image mentale de la continuité d'une fonction au-dessus d'un intervalle. Les fonctions continues sur un intervalle/un segment possèdent des propriétés très agréables. Par exemple, des arguments de continuité et de limites permettent d'établir que l'équation

$$x^{2022} - e^x + \sin(x) = 2022$$

possède une solution sur $\mathbf{R}$. On peut également considérer des limites de taux d'accroissement de fonction de la variable réelle et ainsi introduire la notion de fonction dérivable. Un résultat frappant pour les fonctions dérivables est le critère différentiel de stricte monotonie : si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, si $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction dérivable sur I telle que $f' > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I. Il est conséquence du théorème des accroissements finis qui permet souvent de faire rejaillir une propriété de la fonction f' sur la fonction f. Cette journée est l'occasion de travailler/développer votre technique calculatoire, e.g. le calcul de dérivées.

R3. 1. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur la notion de limite d'une fonction de la variable réelle [PDF].

On commencera par apprendre toutes les définitions formelles de la notion de limite d'une fonction de la variable réelle, en essayant de les illustrer par des graphiques, pour en avoir une image mentale. Une bonne maîtrise de ces définitions formelles (avec des quantificateurs) est essentielle.

On reverra ensuite la définition de la continuité et on étudiera avec le plus grand soin deux résultats cruciaux sur les fonctions continues

- le théorème des valeurs intermédiaires ;
- le théorème sur l'image continue d'un segment.

On devra être en mesure d'énoncer précisément ces théorèmes et de savoir les démontrer, en mettant en lumière le rôle joué par la continuité.

Viendra ensuite le temps d'étudier la notion de dérivabilité, en s'attachant à bien comprendre le rôle joué par les taux d'accroissement. On travaillera alors intensément les théorèmes suivants (énoncés et démonstrations)

- le théorème de Rolle ;
- le théorème des accroissements finis ;
- le théorème sur la limite de la dérivée ;
- les caractérisations données par la dérivée (e.g. la croissance).

On terminera avec un travail sur les notations de Landau (pour les fonctions) et le théorème sur les sommes de Riemann.

Ce travail sur le cours est fondamental.

R3. 2. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. La fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

   est dérivable sur $\mathbf{R}$.

   Vrai. D'après les résultats de dérivabilité des fonctions usuelles et les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$. Il reste à établir la dérivabilité de f en 0. Soit $x \in \mathbf{R}^*$.

$$0 \leqslant \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = |x| \, \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant |x|$$

   Par théorème d'encadrement

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} 0$$

et donc
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0 \; .$$
La fonction f est donc dérivable en 0 (et $f'(0)=0$).

2. Soit $f\colon \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivale sur $\mathbf{R}^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) < 0$. Alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^*$.

Faux. Un contre-exemple est donnée par la fonction
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. .$$
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Or la fonction f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbf{R}^*$. En effet, $-1 < 2$, mais $f(-1) < f(2)$.

Remarque. Dans les caractérisations de la monotonie, le domaine de la définition est un intervalle. Ici, $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle et donc le théorème 24 du document support ne s'applique pas. En revanche, on peut l'appliquer sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0,+\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$.

3. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction qui admet une limite $\ell \in \mathbf{R}_{>0}$ en 0. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha;\alpha[$, $f(x) > 0$, i.e. f est strictement positive sur un voisinage de 0.

Par définition de la notion de limite
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad |x-0| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon \; .$$
En particulier, pour $\varepsilon \leftarrow \dfrac{\ell}{2} > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$
$$|x| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \frac{\ell}{2} \; .$$
Soit $x \in]-\alpha;\alpha[$. Alors $|x| < \alpha$ et donc $-\dfrac{\ell}{2} < f(x)-\ell < \dfrac{\ell}{2}$. Ainsi $f(x) > \dfrac{\ell}{2} > 0$.

4. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soient f une fonction dérivable sur le segment $[a,b]$. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet un maximum qu'elle atteint en un point x_M de $[a,b]$. Alors $f'(x_M) = 0$.

Faux. Un contre-exemple est donné par la fonction
$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2-x \end{array} \right.$$
qui est affine, donc dérivable sur $[0,1]$. Son maximum est 2 et il est atteint au point $x_M = 0$.

Or $f'(x_M) = -1 \neq 0$.

Remarque. Dans la condition nécessaire d'extremum (Propriété 18 du document support), le point où l'extremum est atteint est intérieur à l'intervalle, i.e. il ne s'agit pas de l'une de ses bornes. Dans la cas où la fonction atteint un extremum en un point du bord, on ne peut pas affirmer que la dérivée s'annule en ce point, comme le montre le contre-exemple ci-dessus.

5. Pour tout $t \in [-1;1]$, $2\ \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+t}{2}}\right) = \arccos(t)$.

Vrai. On introduit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+t}{2}}\right) \end{array} \right. .$$

La fonction f s'écrit $w \circ v \circ u$ où

$$u \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \mapsto & \dfrac{1+t}{2} \end{array} \right. \qquad v \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \mapsto & \sqrt{t} \end{array} \right. \qquad w \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \mapsto & 2\arccos(t) \end{array} \right.$$

et est donc continue sur $[-1,1]$, comme composée de fonctions continues. De plus, comme pour tout $t \in]-1,1[$

$$u(t) \in]0,1[\qquad\qquad v(u(t)) \in]0,1[$$

et comme u est dérivable sur $]-1,1[$, v est dérivable sur $]0,1[$ et w est dérivable sur $]0,1[$, la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, comme composée de fonctions dérivables.
On calcule, pour tout $t \in]-1;1[$

$$f'(t) = (w{\circ}v{\circ}u)'(t) = u'(t)\ v'(u(t)\ w'(v(u(t)) = 2\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+t}{2}}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+t}{2}\right)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Comme reconnaît la dérivée de la fonction $\arccos$, on en déduit qu'il existe une constante réelle k telle que

$$\forall\, t \in]-1;1[\quad f(t) = \arccos(t) + k\ .$$

Comme $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $f(0) = \arccos(0)$ et ainsi $k = 0$. Ainsi

$$(\star) \qquad \forall\, t \in]-1;1[\quad f(t) = \arccos(t)\ .$$

Comme les fonctions f et $\arccos$ sont continues sur $[-1;1]$

$$f(-1) = \lim_{\substack{x \longrightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) \underset{\text{cf. }(\star)}{=} \lim_{\substack{x \longrightarrow -1 \\ x > -1}} \arccos(x) = \arccos(-1)$$

et

$$f(1) = \lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) \underset{\text{cf. }(\star)}{=} \lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ x < 1}} \arccos(x) = \arccos(1) \ .$$

R3. 3. *Une fonction continue sur $\mathbf{R}$ de limite $+\infty$ en $\pm\infty$ admet un minimum.* — Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow -\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$. Démontrer qu'il existe $x_m \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x_m) \leqslant f(x)$.

On pourra visionner un corrigé vidéo en cliquant sur le lien suivant [YouTube] (19 minutes).

R3. 4. *Théorème de la moyenne.* — Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Démontrer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t = f(c) \ .$$

Indication : On pourra considérer la fonction à la fonction $\varphi \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ x \longmapsto (b-a)f(x) - \displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$ ***et démontrer qu'elle prend une valeur positive et une valeur négative.***

- La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(x_m, x_M) \in [a,b]^2$ tel que :

$$\forall\, t \in [a,b], \quad f\left(x_m\right) \leqslant f(t) \leqslant f\left(x_M\right) \ .$$

- Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\varphi(x) := (b-a)f(x) - \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t = \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t = \int_a^b \left(f(x) - f(t)\right) \ \mathrm{d}t \ .$$

  Par croissance de l'intégrale, $\varphi\left(x_m\right) \leqslant 0$ et $\varphi\left(x_M\right) \geqslant 0$. Comme la fonction f est continue sur $[a,b]$, la fonction φ l'est également. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c entre x_m et x_M, ***a fortiori*** appartenant à $[a,b]$, tel que $\varphi(c) = 0$, i.e. tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t = f(c) \ .$$

R3. 5. *Point fixe d'une fonction.* — Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que :

$$f([a,b]) \subset [a,b] \ .$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. On rappelle qu'un point fixe de f est une solution de l'équation

$$f(x) = x$$

d'inconnue $x \in [a,b]$.

1. On suppose dans cette question 1 que f est dilatante, i.e. que :

$$\forall\,(x,y) \in [a,b]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \geqslant |x-y|\,.$$

Établir une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Supposons que la suite (u_n) converge. Soit ℓ la limite de (u_n). Grâce au caractère dilatant de f, on observe :

$$|u_0 - u_1| \leqslant |u_1 - u_2| \leqslant |u_2 - u_3| \leqslant \ldots \leqslant |u_n - u_{n+1}| \leqslant \ldots$$

Plus formellement, un nombre entier n étant fixé, on démontre par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$|u_n - u_{n+1}| \leqslant |u_{n+p} - u_{n+p+1}|.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ dans la précédente relation, il vient

$$0 \leqslant |u_n - u_{n+1}| \leqslant |\ell - \ell| = 0.$$

Donc $u_n = u_{n+1}$.
Nous venons de prouver que si la suite (u_n) converge, alors elle est constante. La réciproque est claire.
Donc (u_n) converge si et seulement si elle est constante, i.e. si et seulement si u_0 est un point fixe de f.

2. On suppose dans toute la question 2 que f est contractante, i.e. que :

$$\exists\, k \in\, [0,1[\qquad \forall\,(x,y) \in [a,b]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|\,.$$

On se propose de démontrer que f possède un unique point fixe.

(a) Démontrer que si f admet un point fixe, alors celui-ci est unique.

Soient x_1 et x_2 des points fixes de f. Grâce au caractère contractant de f, nous avons

$$|x_1 - x_2| \leqslant k|x_1 - x_2|.$$

Si $|x_1 - x_2| \neq 0$, alors la précédente relation implique $1 \leqslant k$, ce qui contredit $0 \leqslant k < 1$.
Donc $|x_1 - x_2| = 0$, i.e. $x_1 = x_2$.

(b) Démontrer que f est continue sur $[a,b]$.

Nous pourrions citer le cours : la fonction f est k-lipschitzienne, donc uniformément continue, donc continue, mais la formulation de la question incite fortement à proposer une démonstration.
Si $k = 0$, la fonction f est constante dont continue. Supposons donc $k \in]0, 1[$.
Soit $x_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta := \dfrac{\varepsilon}{k}$. Si $x \in [a, b]$ vérifie $|x - x_0| \leqslant \delta$, alors :

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| \leqslant k\delta = \varepsilon.$$

La fonction f est donc continue en x_0.

(c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n \; |u_1 - u_0| \; .$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$\mathcal{P}(n) \; : \; |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n \, |u_1 - u_0|.$$

Initialisation
$\mathcal{P}(0)$ s'écrit $|u_{0+1} - u_0| \leqslant k^0 \, |u_1 - u_0|$. Puisque $k^0 = 1$, elle est donc vraie.
Hérédité
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé.

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - u_{n+1}| &= |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \\ &= k\,|u_{n+1} - u_n| \qquad [f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}] \\ &\leqslant k^{n+1}\,|u_1 - u_0| \qquad [\text{hypothèse de récurrence}] \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ est établie.
Conclusion
De l'initialisation à $n = 0$, de l'hérédité et de l'axiome de récurrence, on déduit que

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n \, |u_1 - u_0|$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(d) Démontrer que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

D'après ce qui précède $|u_{n+1} - u_n| = O(k^n)$. Or la série géométrique $\sum k^n$ est convergente ($|k| < 1$). Par sommation d'une relation de comparaison la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge (et on a une propriété sur les restes).
La série $\sum u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

(e) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f.

D'après ce qui précède la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge (cf. résultat sur les séries télescopiques).
Soit $\ell \in \mathbf{R}$ sa limite.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$a \leqslant u_n \leqslant b$$

car $u_0 \in [a,b]$ et f stabilise $[a,b]$. En passant à la limite dans cette inégalité, il vient $a \leqslant \ell \leqslant b$ et donc $\ell \in [a,b]$.
Par définition de la suite (u_n),

$$(\star) \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. D'une part $u_{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$ (suite extraite), et d'autre part $f(u_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(\ell)$ (continuité de f et critère séquentiel de continuité). En passant à la limite dans $(\star)$, il vient $f(\ell) = \ell$.

3. On suppose dans cette question 3 que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que :

$$\forall\, x \in [a,b] \qquad |f'(x)| < 1\ .$$

Démontrer que f possède un unique point fixe.

La fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[a,b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Donc il existe $x_M \in [a,b]$ tel que

$$\forall\, x \in [a,b] \qquad |f'(x)| \leqslant |f'(x_M)|.$$

Du théorème des accroissements finis, on déduit que f est k-lipschitzienne, avec $0 \leqslant k := |f'(x_M)| < 1$, i.e. que f est contractante.
La fonction f vérifie donc l'hypothèse de la question 2 ; elle admet donc un unique point fixe.

4. On suppose dans cette question 4 qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que f^p est contractante, où f^p désigne l'itérée p-ième de f. Démontrer que f possède un unique point fixe.

Puisque f^p est contractante, la fonction f^p admet un unique point fixe d'après la question 2.
Notons x_0 l'unique point fixe de f^p.

- Existence d'un point fixe pour f
  On a $f^p(x_0) = x_0$. En composant par f, il vient $f^{p+1}(x_0) = f(x_0)$, soit :

  $$f^p(f(x_0)) = f(x_0).$$

  Donc $f(x_0)$ est un point fixe de f^p. Par unicité de ce dernier, $f(x_0) = x_0$, i.e. x_0 est un point fixe de f.
- Unicité du point fixe pour f
  Il est clair que tout point fixe de f est point fixe de f^p. La fonction f^p possèdant un unique point fixe, la fonction f ne peut pas posséder deux points fixes distincts.