M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°3
Limite d'une fonction de la variable réelle

David BLOTTIÈRE

La définition formelle d'une fonction de la variable réelle présente des liens forts avec la définition formelle déjà énoncée pour les suites numériques. Une fois cette définition introduite, on peut donner un sens précis à la continuité d'une fonction de la variables réelle, au-delà d'une approche intuitive via le graphe. Cette dernière reste néanmoins pertinente, ne serait-ce que pour disposer d'une image mentale de la continuité d'une fonction au-dessus d'un intervalle. Les fonctions continues sur un intervalle/un segment possèdent des propriétés très agréables. Par exemple, des arguments de continuité et de limites permettent d'établir que l'équation

$$x^{2022} - e^x + \sin(x) = 2022$$

possède une solution sur $\mathbf{R}$. On peut également considérer des limites de taux d'accroissement de fonction de la variable réelle et ainsi introduire la notion de fonction dérivable. Un résultat frappant pour les fonctions dérivables est le critère différentiel de stricte monotonie : si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, si $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction dérivable sur I telle que $f' > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I. Il est conséquence du théorème des accroissements finis qui permet souvent de faire rejaillir une propriété de la fonction f' sur la fonction f. Cette journée est l'occasion de travailler/développer votre technique calculatoire, e.g. le calcul de dérivées.

R3. 1. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur la notion de limite d'une fonction de la variable réelle [PDF].

On commencera par apprendre toutes les définitions formelles de la notion de limite d'une fonction de la variable réelle, en essayant de les illustrer par des graphiques, pour en avoir une image mentale. Une bonne maîtrise de ces définitions formelles (avec des quantificateurs) est essentielle.

On reverra ensuite la définition de la continuité et on étudiera avec le plus grand soin deux résultats cruciaux sur les fonctions continues

- le théorème des valeurs intermédiaires ;
- le théorème sur l'image continue d'un segment.

On devra être en mesure d'énoncer précisément ces théorèmes et de savoir les démontrer, en mettant en lumière le rôle joué par la continuité.

Viendra ensuite le temps d'étudier la notion de dérivabilité, en s'attachant à bien comprendre le rôle joué par les taux d'accroissement. On travaillera alors intensément les théorèmes suivants (énoncés et démonstrations)

- le théorème de Rolle ;
- le théorème des accroissements finis ;
- le théorème sur la limite de la dérivée ;
- les caractérisations données par la dérivée (e.g. la croissance).

On terminera avec un travail sur les notations de Landau (pour les fonctions) et le théorème sur les sommes de Riemann.

Ce travail sur le cours est fondamental.

R3. 2. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. La fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

   est dérivable sur $\mathbf{R}$.

2. Soit $f\colon \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivale sur $\mathbf{R}^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) < 0$. Alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^*$.
3. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction qui admet une limite $\ell \in \mathbf{R}_{>0}$ en 0. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\alpha;\alpha[$, $f(x) > 0$, i.e. f est strictement positive sur un voisinage de 0.
4. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soient f une fonction dérivable sur le segment $[a, b]$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet un maximum qu'elle atteint en un point x_M de $[a, b]$. Alors $f'(x_M) = 0$.
5. Pour tout $t \in [-1; 1]$, $2\ \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+t}{2}}\right) = \arccos(t)$.

R3. 3. *Une fonction continue sur $\mathbf{R}$ de limite $+\infty$ en $\pm\infty$ admet un minimum.* — Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow -\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow +\infty]{} +\infty$. Démontrer qu'il existe $x_m \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x_m) \leqslant f(x)$.

R3. 4. *Théorème de la moyenne.* — Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Démontrer qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t = f(c) \ .$$

Indication : On pourra considérer la fonction à la fonction** $\varphi\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ x \longmapsto (b-a)f(x) - \displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t$ **et démontrer qu'elle prend une valeur positive et une valeur négative.

R3. 5. *Point fixe d'une fonction.* — Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que :

$$f([a, b]) \subset [a, b] \ .$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. On rappelle qu'un point fixe de f est une solution de l'équation

$$f(x) = x$$

d'inconnue $x \in [a, b]$.

1. On suppose dans cette question 1 que f est dilatante, i.e. que :

   $$\forall\, (x, y) \in [a, b]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y| \ .$$

   Établir une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

2. On suppose dans toute la question 2 que f est contractante, i.e. que :

   $$\exists\, k \in \ [0, 1[\qquad \forall\, (x, y) \in [a, b]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k \ |x - y| \ .$$

   On se propose de démontrer que f possède un unique point fixe.

   (a) Démontrer que si f admet un point fixe, alors celui-ci est unique.

   (b) Démontrer que f est continue sur $[a, b]$.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n \ |u_1 - u_0| \ .$$

   (d) Démontrer que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

   (e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f.

3. On suppose dans cette question 3 que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et que :

   $$\forall\, x \in [a, b] \qquad |f'(x)| < 1 \ .$$

   Démontrer que f possède un unique point fixe.

4. On suppose dans cette question 4 qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que f^p est contractante, où f^p désigne l'itérée p-ième de f. Démontrer que f possède un unique point fixe.