Martin.

Exercice 4. Étudier l'intégrabilité de la fonction sur $]0\,;+\infty[$.

$f : t \mapsto e^{-3t^2}\sin t$ $\quad g : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ $\quad h : t \mapsto e^{-t}\ln t$

$i : x \mapsto \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}$ $\quad j : x \mapsto \sin(x)\sin(e^{-x})$ $\quad \boxed{k : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}}$

1) On introduit :

$$k \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+ \\ x \to \dfrac{\sqrt{x}\ \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} \end{array} \right.$$

On étudie sur $[e,+\infty[$

comme $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors on a $\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$

d'où $0 \leq k \sim \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\ 1}{\cancel{\sqrt{x}}\ \ln(1+x)\ x^{3/2}} \leq \dfrac{1}{x^{3/2}}$ Integrable par riemann $\left(\frac{3}{2}>1\right)$

$\ln(1+x) \geq 1$ par domination sur les IDFP et par equivalence k est intégrable sur $[e,+\infty[$

Ainsi k est intégrable

sur $]0,e]$,

en 0, $\ln(1+x) \sim x$

ainsi $0 \leq k \sim \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\ \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\ \sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ Intégrable sur $]0,1]$ par riemann $(0{,}5<1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ par domination sur les IDFP et par equivalence, k est intégrable

Clara.

Exercice 4

On considère f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité sur $[0,+\infty[$. On notera encore f ce prolongement.
2. Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, dt = \int_0^{\pi} |\sin(t)|\, dt = 2$$
3. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, puis justifier que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.
4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est-elle convergente ?

① $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en imposant $f(0) = 1$.

② $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, dt \underset{\substack{u = t - k\pi \\ du = dt}}{=} \int_0^{\pi} |\sin(u + k\pi)|\, du = \int_0^{\pi} |(-1)^k \sin(u)|\, du = \int_0^{\pi} |\sin(u)|\, du$$
$$= [-\cos(u)]_0^{\pi} = 2.$$

③ $$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi}\, dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t)|\, dt \qquad (q.2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On a montré que : $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

La ~~f~~ série harmonique diverge donc par comparaison la fonction f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

④ $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} \end{array} \right.$ Soit $x \geq 1$

$$\int_1^x f(t)\, dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt = \underbrace{\frac{-\cos(x)}{x}}_{x\to+\infty \to 0} + \overbrace{\cos(1)}^{\text{constante}} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

$u : t \mapsto -\cos(t)$ car $-\cos$ est une fonction bornée

$v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ $\quad u, v \in C^1$ sur $]0,+\infty[$

de plus, $0 \leq \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

or D'après Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ est convergente

. intégrales de fonctions positives

Donc par domination pour $t \geq 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}$ est abs. CV et donc CV.

On en déduit $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ convergente

De plus, la fonction f est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$. (Q1)

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ convergente.

Corentin

Khôlles pour le 22/11/2020

EXERCICE 8. — *Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes?*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$$

Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$

$$f \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\mapsto \mathbb{R}_+^* \\ t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2+1} \end{array} \right. \quad \text{cm}$$

Or on a :

$$\frac{\ln(t)}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \quad \text{par croissance comparées}$$

Or maintenant par théorème d'intégration des o pour les fonctions positives $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt$ converge

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ converge.

Etudier l'intégrabilité de la fonction sur $]0,+\infty[$:

$$i : x \mapsto \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}$$

Soit $i \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \end{array} \right.$

On étudie l'intégrale sur $]0,1]$ puis sur $[1,\infty[$:

<u>sur $]0,1]$</u> : $\forall x \in]0,1]$,

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} \geq 0$$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ converge d'après Riemann ($1/2 < 1$)

Par domination pour les intégrales de fonctions positives,

$$\int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \text{ est convergente}$$

<u>sur $[1,+\infty[$</u> $\forall x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

Or $\int e^{-x}$ est convergente,

Par théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives,

$\int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}$ converge

Aissane

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit, lorsque l'intégrale est convergente, la fonction :

$$\phi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de ϕ.
2. Démontrer que ϕ est décroissante sur son domaine de définition.
3. Déterminer la limite de ϕ en $+\infty$.

1. Soit $f \left| \begin{array}{l} [1;+\infty[\longmapsto \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{1+t^x} \end{array} \right.$

Soit $x<0$,

$\frac{1}{1+t^x} \underset{t\to+\infty}{\sim} 1 > 0$ D'après le théorème de comparaison des équivalents pour $+\infty$ les fonctions positives.

Or $\int_1 1\,dt$ diverge ainsi $\phi(x)$ diverge.

Soit $x=0$,

$\frac{1}{1+t^x} = \frac{1}{2}$ alors $\phi(x)$ diverge

Soit $0<x<1$:

$\frac{1}{1+t^x} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^x}$ D'après Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt$ diverge

D'après le théorème de comparaison des équivalents $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}\,dt$ diverge.

Soit $x>1$:

$\frac{1}{1+t^x} \sim \frac{1}{t^x}$ Riemann convergente

Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}\,dt$ converge.

ϕ est définie $\forall x \in \,]1;+\infty[$, Soit $1 < x < y$, Soit $t \in [1 ; +\infty[$,

$t^y > t^x \Leftrightarrow 1+t^y > 1+t^x \Leftrightarrow \frac{1}{1+t^y} < \frac{1}{1+t^x}$

Par croissance de l'intégrale :

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^y} dt < \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt$

$\phi(y) < \phi(x)$

Ainsi ϕ est décroissante.

3. Soit $x > 1$

$\left|\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt\right| \leq \left|\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt\right|$

Soit $y \in [1 ; +\infty[$,

$\int_1^{y} \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^y = \frac{y^{1-x}}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{y^{1-x}-1}{1-x}$

$y \Rightarrow +\infty$,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1}$

$x \to +\infty$,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

D'après le théorème de domination

$\phi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 3
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x\sin(x)e^{-nx}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
   (a) Calculer I_n.
   (b) Préciser alors la nature de la série $\sum I_n$.

Marine

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) $f_n \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x\sin(x)e^{-nx} \end{array} \right.$ $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[$.

et $0 \leq |x\sin(x)e^{-nx}| \leq xe^{-nx} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par cc

Et donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est intégrable (Riemann),

par comparaison sur les IDFP, $\int_1^{+\infty} x\sin(x)e^{-nx}dx$ CVA et donc cv

f_n est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1)$ donc $\int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-nx}dx$ cv, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2) a. $I_n = \int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-nx}dx$ soit $X \geq 0$.

$$\int_0^X x\sin(x)e^{-nx}dx = \int_0^X x\,\mathrm{Im}(e^{ix})e^{-nx}dx = \mathrm{Im}\left(\int_0^X xe^{x(i-n)}dx\right).$$

$$\text{Et } \int_0^X xe^{x(i-n)}dx = \left[\frac{xe^{x(i-n)}}{i-n}\right]_0^X - \int_0^X \frac{e^{x(i-n)}}{i-n}dx$$

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{x(i-n)} \end{cases}$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0,X]$, par intégration par partie.

$$= \frac{Xe^{X(i-n)}}{i-n} - \frac{1}{i-n}\left[\frac{e^{x(i-n)}}{i-n}\right]_0^X$$

$$= \frac{Xe^{X(i-n)}}{i-n} - \frac{e^{X(i-n)}}{(i-n)^2} + \frac{1}{(i-n)^2}$$

en module : $\left|\frac{Xe^{X(i-n)}}{i-n}\right| = \frac{X|e^{X(i-n)}|}{\sqrt{-1+n^2}} = \frac{Xe^{-nX}}{\sqrt{n^2-1}} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par cc.

$\left|\frac{e^{X(i-n)}}{(i-n)^2}\right| = \frac{e^{-nX}}{-1+n^2} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Et donc $\int_0^X x e^{x(i-n)} dx \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{1}{(i-n)^2}$ on multiplie par le conjugué

D'où $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = Im\left(\frac{1}{(i-n)^2}\right) = Im\left(\frac{n^2-1+in}{(n^2-1-in)(n^2-1+in)}\right)$

$= Im\left(\frac{n^2-1+in}{(n^2-1)^2-(in)^2}\right)$

$= Im\left(\frac{n^2-1+ni}{n^4-2n^2+1+n^2}\right)$

$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{n}{n^4-n^2+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ b. $\sum I_n = \sum \frac{n}{n^4-n^2+1}$

$0 \leq \frac{n}{n^4-n^2+1} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par CC.

$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann CV, par comparaison des o pour les séries à termes positifs,

$\sum \frac{n}{n^4-n^2+1}$ CV $\longrightarrow \sum I_n$ CV.

Colle :

Dunan

Exercice :

1. Établir la convergence de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\mathrm{d}x$$

2. Calculer I.

1.

$f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, on a une singularité en $\frac{\pi}{2}$.

$\varphi : u \mapsto \frac{\pi}{2} - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective

de $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(\frac{\pi}{2}-u)}du$ sont de même nature.

$$\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}} = \sqrt{\frac{\cos(u)}{\sin(u)}} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{u}} du$ converge d'après Riemann $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$ alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(\frac{\pi}{2}-u} du$ converge

d'après le théorème d'intégration des équivalents pour les fonctions positives.

D'après le théorème de changement de variable, on en déduit que

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}dx$ converge.

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\,dx = \lim_{X \to \frac{\pi}{2}} \int_0^X \sqrt{\tan(x)}\,dx$$

$\varphi : t \mapsto \arctan(t^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0, +\infty[$ dans $[0, \frac{\pi}{2}[$

$$\varphi'(t) = \frac{2t}{1+t^4}$$

Soit $X \in [0, \frac{\pi}{2}[$, par théorème de changement de variable

$$\int_0^X f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\tan(X)}} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Alors $\displaystyle\int_0^X \sqrt{\tan(x)}\,dx = \int_0^T \frac{2t^2}{1+t^4}\,dt$ où $T = \sqrt{\tan(X)}$

et $\displaystyle\lim_{X \to \frac{\pi}{2}} \int_0^X \sqrt{\tan(x)}\,dx = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T \frac{2t^2}{1+t^4}\,dt$

On décompose $\dfrac{2t^2}{1+t^4}$ en éléments simples.

$$t^4+1 = \left(t - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(t - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(t - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(t - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$$

$$= \left(t^2 - 2\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)t + 1\right)\left(t^2 - 2\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)t + 1\right)$$

$$= \left(t^2 - \sqrt{2}t + 1\right)\left(t^2 + \sqrt{2}t + 1\right)$$

On cherche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{2t^2}{t^4+1} = \frac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

$$= \frac{at^3+\sqrt{2}at^2+at+bt^2+b\sqrt{2}t+b+ct^3-c\sqrt{2}t^2+ct+dt^2-\sqrt{2}dt+d}{t^4+1}$$

$$= \frac{(a+c)t^3 + (\sqrt{2}a + b - c\sqrt{2} + d)t^2 + (a + b\sqrt{2} + c - \sqrt{2}d)t + b + d}{t^4+1}$$ Dorian

Alors $\begin{cases} a+c=0 \\ \sqrt{2}a+b-c\sqrt{2}+d=2 \\ a+b\sqrt{2}+c-\sqrt{2}d=0 \\ b+d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \\ \sqrt{2}a-c\sqrt{2}=2 \\ b\sqrt{2}-\sqrt{2}d=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \\ 2\sqrt{2}a=2 & L_3 \leftarrow L_3+\sqrt{2}L_1 \\ 2b\sqrt{2}=0 & L_4 \leftarrow L_4+\sqrt{2}L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ d=0 \\ a=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=0 \end{cases}$$

Ainsi, $\frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\frac{2t}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{2t}{t^2+\sqrt{2}t+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{\sqrt{2}}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{\sqrt{2}}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t-1)^2+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t+1)^2+1} \right)$$

$g : t \mapsto \dfrac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t-1)^2+1}$ est de la forme $\dfrac{2v'}{v^2+1}$ donc une primitive

est $2\arctan(v)$

$$\int_0^T \frac{2t^2}{1+t^4}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \Big[\ln(t^2-\sqrt{2}t+1) + 2\arctan(\sqrt{2}t-1) - \ln(t^2+\sqrt{2}t+1) + 2\arctan(\sqrt{2}t+1)\Big]_0^T$$

$$= \ln(T^2-\sqrt{2}T+1) + 2\arctan(\sqrt{2}T-1) - \ln(T^2+\sqrt{2}T+1) + 2\arctan(\sqrt{2}T+1)$$
$$+ 0 - 2\arctan(-1) - 0 - 2\arctan(1)$$

$$= \ln\left(\frac{T^2-\sqrt{2}T+1}{T^2-\sqrt{2}T+1}\right) + 2\arctan(\sqrt{2}T-1) + 2\arctan(\sqrt{2}T+1)$$
$$- 2\times\left(\frac{-\pi}{4}\right) - 2\times\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\ln\left(\frac{T^2-\sqrt{2}T+1}{T^2+\sqrt{2}T+1}\right) + 2\arctan(\sqrt{2}T-1) + 2\arctan(\sqrt{2}T+1)\right)$$

. $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{T^2-\sqrt{2}T+1}{T^2+\sqrt{2}T+1} = \lim_{T\to+\infty} \frac{T^2}{T^2} = 1$

. $\displaystyle\lim_{X\to 1} \ln X = 0$

par composition des limites $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \ln\left(\frac{T^2-\sqrt{2}T+1}{T^2+\sqrt{2}T+1}\right) = 0$

. $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \sqrt{2}T-1 = +\infty$

$\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \arctan(X) = \frac{\pi}{2}$

par composition des limites $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \arctan(\sqrt{2}T-1) = \frac{\pi}{2}$

De même, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \arctan(\sqrt{2}T+1) = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{2t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times (0+\pi+\pi) = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Yann

Exercice de khôlle 510

Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt$ converge et calculer sa valeur.

Soit $f \left| \begin{array}{l} [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} \end{array}\right.$

est continue par morceaux sur $[1;+\infty[$

Soit $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt$

$\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ car $\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} \times t^{3/2} = \frac{\ln(1+t^2)}{t^{1/2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

par croissance comparée.

Par Riemann, $\int_1 \frac{1}{t^{3/2}}$ converge $(3/2 > 1)$

Donc par le théorème d'intégration des o pour les fonctions positives, I converge

On cherche maintenant sa valeur.

Soit $x \geqslant 1$,

$I = \int_1^{x} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt$

Posons $u : t \longmapsto \ln(1+t^2)$

$v : t \longmapsto -\frac{1}{t}$

u et v sont continues sur $[1;x]$, on peut donc procéder par intégration par partie:

$$I = \left[\frac{-\ln(1+t^2)}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{2\cancel{t}}{1+t^2} \times \frac{-1}{\cancel{t}} \, dt$$

$$= \ln(2) - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2 \left[\text{Arctan}(t) \right]_1^x$$

$$= \ln(2) - \underbrace{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée}} + \frac{2\pi}{4} - 2\,\text{Arctan}(x)$$

D'où $I \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(2) - \frac{\pi}{2}$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} \, dt$ converge et vaut

$\ln(2) - \frac{\pi}{2}$

Pierre

Exercice 4. Étudier l'intégrabilité de la fonction sur $]0\,;+\infty[$.

$f : t \mapsto \mathrm{e}^{-3t^2}\sin t$ $\qquad g : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ $\qquad h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$

$i : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{x}}$ $\qquad j : x \mapsto \sin(x)\sin(\mathrm{e}^{-x})$ $\qquad k : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}$

$f \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-3t^2}\sin(t) \end{array} \right.$ CM.

$\forall t \in [0;+\infty[,\ |f(t)| = |e^{-3t^2} \cdot \sin(t)| \leq |e^{-3t^2}| \leq |e^{-3t}| = e^{-3t}$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,dt$ est de la forme $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ convergente

avec $\lambda = 3 > 0$ donc elle converge.

Et donc par comparaison / domination, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ex. Après avoir établi la convergence de chacune

Frederic des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,dx$$

~~1. Tr ve I = J~~ montrer que $I = J$

2. calculer I

1. Soit $f \left| \begin{array}{l} [0;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[\\ x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^3} \end{array} \right.$

or $f(x) \sim \dfrac{1}{x^3} \geqslant 0$ or $\dfrac{1}{x^3}$ est convergent d'après le

riemann et donc d'après le theoreme de primitive des equivalent $\int_1 f$ converge sur $[1;+\infty[$ or f est continue sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 f$ converge

de même $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^3}$ converge.

Soit $b, a \in \mathbb{R}^{*+}$: $\int_b^a \dfrac{x}{1+x^3}\,dx$

d'après le theoreme de changement de variable pour $x = \dfrac{1}{u}$

on a : $dx = -\dfrac{1}{u^2}\,du$

$$\text{donc} = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^3}} \times \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$$

$$= -\int_{1/b}^{1/a} \frac{u}{1+u^3}\,du = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{u}{1+u^3}\,du$$

par passage à la limite pour $a \to +\infty$ et $b \to 0$ on a :

$$I = J$$

2. Soit $2I = I + J = \int_0^{+\infty} \dfrac{1+x}{1+x^3}\,dx$

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^a \dfrac{1+x}{1+x^3}\,dx =$

-1 est une racine de $1+x^3$, ~~Soit~~ $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ tel que :

$1+x^3 = (1+x)(ax^2+bx+c)$

$\Rightarrow 1+x^3 = ax^3 + x^2(a+b) + x(b+c) + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

donc on a $\int_0^a \frac{1+x}{1+x^3}\,dx = \int_0^a \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$

$$= \int_0^a \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^a \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3\times\sqrt{3}}\times\pi$$

donc $2I = \frac{4}{3\times\sqrt{3}}\pi$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$

Mathilde

Justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale suivante :
$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-at} dt \quad \text{où } a > 0$$

Soit l'intégrande : $f \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(t)e^{-at} \end{array} \right.$ $\mathcal{C}M$ sur $[0,+\infty[$

On a, par tout $t \in [0;+\infty[$:

$0 \leq |\cos(t)| \leq 1$ d'où

$0 \leq |\cos(t)e^{-at}| \leq |e^{-at}|$ par tout $t \in [0;+\infty[$.

Or on sait que $\int_0^{+\infty} |e^{-at}| dt$ converge donc d'après le théorème de domination par les fonctions à valeurs positives, $\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-at} dt$ converge absolument donc elle converge. Calculons sa valeur :

Soit $x > 0$. On a :

$$\int_0^x \cos(t)e^{-at} dt \underset{\uparrow}{=} [\sin(t)e^{-at}]_0^x + a\int_0^x \sin(t)e^{-at} dt$$

$\begin{cases} u : t \mapsto \sin(t) \\ v : t \mapsto e^{-at} \end{cases}$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ d'où $\begin{cases} u' : t \mapsto \cos(t) \\ v' : t \mapsto ae^{-at} \end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=} \sin(x)e^{-ax} + a[-\cos(t)e^{-at}]_0^x - a^2\int_0^x \cos(t)e^{-at} dt$$

$\begin{cases} u : t \mapsto -\cos(t) \\ v : t \mapsto e^{-at} \end{cases}$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ d'où $\begin{cases} u' : t \mapsto \sin(t) \\ v' : t \mapsto -ae^{-at} \end{cases}$

d'où

$$(1+a^2)\int_0^x \cos(t)e^{-at} dt = \underbrace{\sin(x)e^{-ax}}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \text{ par croissances} \\ \text{comparées}}} - \underbrace{a\cos(x)e^{-ax}}_{\substack{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \text{ par croissances} \\ \text{comparées}}} + a$$

Finalement, $\int_0^x \cos(t)e^{-at} dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{a}{1+a^2}$

Bastien
MP

Ennoncé :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\,dx \quad , \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,dx$$

1- Prouver l'existence de ces deux intégrales
2- Calculer alors I_n

Résolution :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} \geq 0 \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[$$

Or, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{1+x^n}\right)$

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{1+x^n}\right)} = \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ est intégrable et vaut $\frac{\pi}{2}$

Donc par intégrabilité de o et théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives

I_n existe.

Soit $g_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \geq 0 \quad \mathcal{C}_M \text{ sur } [0,+\infty[$$

Or, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+x^2}$

et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ est intégrable donc par théorème d'intégration des équivalents et théorème de domination sur les intégrales de fonctions positives J_n existe.

2) On calcule d'abord, $I_n + J_n$, Soit $a \geq 0$

$$I_n + J_n = \int_0^a \frac{\cancel{(1+x^n)}}{(1+x^2)\cancel{(1+x^n)}}\,dx = \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \arctan(a) \underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Donc $J_n + J_n = \frac{\pi}{2}$

Soit $b \geq 0$,

$$I_n = \int_0^b \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\,dx$$

Par changement de variable sur $[0, a]$:

$$u = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{u}$$

$$dx = -\frac{1}{u^2}\,du$$

$$I_n = \int_{+\infty}^{1/b} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{u}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1}{u}\right)^n\right)} \left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= -\int_{+\infty}^{1/b} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)}\,du$$

$$= \int_{\frac{1}{b}}^{+\infty} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)}\,du$$

On quand $b \to +\infty$:

$$I_n \to \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)}\,du = J_n$$

Ainsi on a : $J_n + J_n = \frac{\pi}{2}$ et $I_n = J_n$

D'où $I_n = J_n = \frac{\pi}{4}$

Valentin

Après en avoir justifier l'existence, calculer par récurrence la valeur de : $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$

- Posons $f \left| \begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (\ln x)^n \end{array} \right.$ C^0 sur $]0,1]$

On remarque $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$ or par Riemann $\int^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ CV, de plus par théorème d'intégrations des o pour les intégrales de fonctions positives $\int_0^1 f(x)dx$ CV

- Soit $\varepsilon \in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 (\ln x)^n dx$ posons $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^n \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = n\frac{1}{x}\ln x^{n-1} \\ v(x) = x \end{cases}$

u et v sont C^1 sur $[\varepsilon, 1]$. Par intégration par partie on a :

$$\int_\varepsilon^1 (\ln x)^n dx = [x(\ln x)^n]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 n \ln x^{n-1} dx$$
$$= -\varepsilon \ln(\varepsilon)^n - nI_{n-1}$$

Or quand $\varepsilon \to 0^+$ par CC on a $I_n = -nI_{n-1}$

En calculant les premiers termes on conjecture : $I_n = n!(-1)^n$

Vérifions ce résultat par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "$I_n = n!(-1)^n$"

Initialisation $n=0$

On a $I_0 = 1 = 0!(-1)^0 = 1$ $P(0)$ vraie

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé, supposons $P(n)$ vraie.

$I_{n+1} = -(n+1)I_n$

$= -(n+1)(n!(-1)^n)$ HR

$= (-1)(n+1)(n!(-1)^n)$

$= (n+1)!(-1)^{n+1}$ $P(n+1)$ est vraie

Conclusion. Par l'axiome de récurrence nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!(-1)^n$

Leonard Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \ , \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1} \ , \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}\,dt \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.}$$

* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. On introduit $f \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t^2} \end{array}\right.$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$

sur $[1,+\infty[$

$f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\geq 0}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge par Riemann $(2>1)$.

Par intégration des o pour les intégrales de fonctions positives. $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Sur $[0,1]$, f est continue par morceaux donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

finalement $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.

* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$ On introduit $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{e^t-1} \end{array}\right.$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

~~Par l'absurde, supposé que $\int_0 f$ converge.~~

sur $]0,1]$, on a $\frac{e^t-1}{t} \sim \frac{t}{t} = 1 \to 1$, donc

$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\geq 0}$, les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ et $\int_0^1 f(t)\,dt$ ont donc

même nature par théorème d'intégration des équivalents.

or $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge par Riemann, donc $\int_0^1 f(t)dt$ diverge et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$.

On introduit $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} \end{array} \right.$ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

sur $]1,+\infty[$; $\frac{\arctan(t)}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} O\big(\underbrace{\tfrac{1}{t^\alpha}}_{\geq 0}\big)$ car $\left|\frac{t^\alpha \arctan(t)}{t^\alpha}\right| = |\arctan(t)| \leq \frac{\pi}{2}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Par théorème d'intégration des O pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge ssi $\alpha > 1$.

sur $]0,1]$, $\frac{\arctan(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{=} O\big(\underbrace{\tfrac{1}{t^\alpha}}_{\geq 0}\big)$ car $\left|\frac{t^\alpha \arctan(t)}{t^\alpha}\right| = |\arctan(t)| \leq \frac{\pi}{2}$

or $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$ par Riemann,

Par théorème ~~dan~~ d'intégration des O pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 f(t)dt$ converge ssi $\alpha < 1$

$]-\infty,1[\cap]1,+\infty[= \emptyset$, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est donc divergente

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Benjamin

Colle semaine n° 10

Exercice 1. Montrer la convergence puis déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-E(x)}\,dx$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Soit $f \left| \begin{array}{l} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-E(x)} \end{array} \right.$ $\mathcal{C}_{pm}$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x-1 < E(x) \leq x$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^{1-x} > f(x) \geq e^{-x} \geq 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+,\ e \cdot e^{-x} > f(x) \geq 0$

Or, $\int^{+\infty} e^{-x}dx$ converge donc par linéarité et théorème de domination pour les fonctions positives, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

- Alors, par relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} e^{-E(x)}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} e^{-E(x)}\,dx$$

Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_k^{k+1} e^{-E(x)}\,dx = \int_k^{k+1} e^{-k}\,dx = e^{-k}$$

($\forall x \in [k, k+1[,\ E(x) = k$ et $x = k+1$ au bord donc ne compte pas)

Or, $\sum (e^{-1})^k$ converge car série géométrique ($e^{-1} \in]-1,1[$)

et : $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \dfrac{1}{1-e^{-1}}$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-E(x)}\,dx = \dfrac{1}{1-e^{-1}} = \dfrac{e}{e-1}}$

Exercice 2. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,dx.$$

Soient $0<\varepsilon<A$, en posant $u=\sqrt{1+x}$, $(dx = 2u\,du)$

$$\int_{\varepsilon}^{A} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,dx = \int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{1+A}} \frac{u-1}{u^{\cancel{2}}\underbrace{(u^2-1)}_{(u-1)(u+1)}}\,2\cancel{u}\,du$$

$$= 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{1+A}} \frac{1}{u(u+1)}\,du \qquad \frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}$$

$$= 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{1+A}} \frac{1}{u}\,du - 2\int_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{1+A}} \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= 2\Big[\ln(u)\Big]_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{1+A}} - 2\Big[\ln(u+1)\Big]_{\sqrt{1+\varepsilon}}^{\sqrt{1+A}}$$

$$= 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+A}}{\sqrt{1+A}+1}\right) + 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}+1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)$$

Or,

- $\dfrac{\sqrt{1+A}}{\sqrt{1+A}+1} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = 1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- $\dfrac{\sqrt{1+\varepsilon}+1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 2$

Donc par passage aux limites :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,dx = 2\ln(2)}$$

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$, $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$

Emilie

1 - Prouver l'existence de ces deux intégrales.

2 - Calculer alors I_n

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

Soit $f \left| \begin{array}{l} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} \end{array} \right.$ $\quad g \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \end{array} \right.$

f et g sont continues par morceau sur $[0, +\infty[$.

De plus :

- $\forall x \in [0,+\infty[$, on a $0 \leq f(x)$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}$ >1
- $\forall x \in [0,+\infty[$ on a $0 \leq g(x)$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2}}$ >1

Or d'après le critère de Riemann, $\frac{1}{x^{n+2}}$ et $\frac{1}{x^2}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$. Par théorème d'intégration des équivalents pour les fonctions positives on obtient que f et g sont intégrables sur $[1, +\infty[$.

Et puisque f et g sont continues sur $[0,1]$, par la relation de Chasles on obtient que f et g sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

2)

- $I_n + J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{(1+x^2)(1+x^n)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

On se ramène à crein fini

Soit $X \geq 0$ $\int_0^X \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^X$

$= \arctan(X)$ et quand $X \to +\infty$ $\arctan(X) \to \frac{\pi}{2}$

Ainsi $I_n + J_n = \frac{\pi}{2}$

En posant $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{u} = x$ on a $-\frac{1}{u^2}\, du = dx$.

Quand $x \to +\infty$, $u \to 0$

$x \to 0^+$, $u \to +\infty$

Ainsi par changement de variable :

$$I_n = -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(1+\frac{1}{u^n}\right)} \cdot \frac{1}{u^2}\, du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)}\, du = J_n$$

On a alors

$$\begin{cases} I_n + J_n = \pi/2 \\ I_n = J_n \end{cases} \Rightarrow 2I_n = \pi/2 \Rightarrow I_n = \frac{\pi}{4}$$

Sirine

Exercice :

Soit $f : [0;+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par par morceaux, positive ou nulle, décroissante et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Demontrer $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t}\right)$

On montre en fait que $t f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Soit $0 \leq \frac{x}{2} \leq t \leq x$;
f étant decroissante on a :

$$f(x) \leq f(t) \leq f\left(\frac{x}{2}\right).$$

et par croissance de l'intégrale, il vient :

$$0 \leq \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)\,dt \leq \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x f(x) \leq 2 \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt$$

Or $\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{x/2} f(t)\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Finalement, par théorème d'encadrement on a :

$$x f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \underline{\text{ie}} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Clarisse
HP

Semaine 10 :

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{l}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\ln x)^n \end{array} \right. \qquad \mathcal{C}M(]0,1], \mathbb{R})$$

$$(\ln x)^n \underset{x \to 0}{=} o\left(\underbrace{\frac{1}{x^{1/2}}}_{\geq 0}\right) \text{ par croissance comparée.}$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ converge d'après Riemann. Par théorème d'intégration des o pour les fonctions positives $\int_0^1 (\ln x)^n dx$ converge.

Soit $\varepsilon \in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 (\ln x)^n dx = \left[x(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x \cdot n \cdot \frac{1}{x}(\ln(x))^{n-1} dx$

Par intégration par parties en posant $\begin{cases} u : x \mapsto x \\ v : x \mapsto \ln^n(x) \end{cases}$ $u, v \in \mathcal{C}^1(]0,1])$

$$\int_\varepsilon^1 (\ln x)^n dx = \underbrace{-\varepsilon(\ln \varepsilon)^n}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \text{ croiss. comparée}} - n\int_\varepsilon^1 (\ln x)^{n-1} dx$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ on a :

$I_n = -n I_{n-1}$ $\qquad I_{n-1} = -(n-1) I_{n-2}$

$I_n = n(n-1) I_{n-2} \cdots$ $\qquad I_0 = 1$

Par récurrence montrons $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$: " $I_n = (-1)^n n!$ "

Initialisation

$I_0 = 1$ $\qquad$ vrai pour $n = 0$

$(-1)^0 0! = 1$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vrai.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$, $\displaystyle\int_\varepsilon^1 (\ln x)^{n+1}dx = -\varepsilon(\ln\varepsilon)^{n+1} - \int_\varepsilon^1 (n+1)\ln^n(x)dx$

par intégration par parties similaire à la 1ère partie.

et par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

$I_{n+1} = -(n+1)I_n$ or d'après l'hypothèse d'hérédité $I_n = (-1)^n n!$

D'où $I_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)!$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Ce qui achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-1)^n n!$

Pierre T

Colle semaine 9

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x\sin(x)e^{-nx}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
   (a) Calculer I_n.
   (b) Préciser alors la nature de la série $\sum I_n$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow t\sin(t)e^{-nt} \end{array} \right.$ est continue par morceau.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [1,+\infty[$

$|f_n(t)| = |t|\,|\sin(t)|\,|e^{-nt}| \leq \underbrace{|t|e^{-nt}}_{\geq 0} = o(\underbrace{\tfrac{1}{t^2}}_{\geq 0})$

or : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann et $2>1$)

Par intégration des o sur les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} |t|e^{-nt}dt$ converge.

Par domination sur les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.

f_n est continue sur $[0,1]$, f_n est intégrable sur $[0,1]$.

Finalement f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$

2. a. Soit $A>0$.

$I(A) = \int_0^A f_n(t)dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^A te^{t(i-n)}dt\right)$

or $\int_0^A te^{t(i-n)}dt = \left[\frac{te^{t(i-n)}}{i-n}\right]_0^A - \int_0^A e^{t(i-n)}\frac{1}{i-n}dt$

$u : t \longrightarrow t$

$v : t \longrightarrow \frac{e^{t(i-n)}}{i-n}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$, et par Intégration Par Partie.

d'où $\displaystyle\int_0^A t e^{t(i-n)} dt = \frac{A e^{A(i-n)}}{i-n} - \int_0^A \frac{e^{t(i-n)}}{i-n} dt$

$$= \frac{A e^{A(i-n)}}{i-n} - \left[\frac{e^{t(i-n)}}{(i-n)^2} \right]_0^A$$

$$= \frac{A e^{A(i-n)}}{i-n} - \frac{e^{A(i-n)}}{(i-n)^2} + \frac{1}{(i-n)^2}$$

de plus, $\left| \frac{A e^{A(i-n)}}{i-n} \right| = \frac{A e^{-An}}{|i-n|} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée.

$\left| \frac{e^{A(i-n)}}{(i-n)^2} \right| = \frac{e^{-An}}{|i-n|^2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

ainsi, $I_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(i-n)^2} \right)$

et $\frac{1}{(i-n)^2} = \frac{1}{-1-2ni+n^2} = \frac{n^2-1+i2n}{(n^2-1)^2+4n^2}$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{(i-n)^2} \right) = \frac{2n}{(n^2-1)^2+4n^2}$

ainsi, $I_n = \frac{2n}{(n^2-1)^2+4n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) On cherche la nature de $\sum \frac{2n}{(n^2-1)^2+4n^2}$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\frac{2n}{(n^2-1)^2+4n^2} \leq \underbrace{\frac{2n}{(n^2-1)^2}}_{\geqslant 0} \sim \frac{2n}{n^4} = \underbrace{\frac{2}{n^3}}_{\geqslant 0}$

- Par sommation des équivalents pour les séries à termes positifs, comme $\sum \frac{2}{n^3}$ converge d'après Riemann

alors $\sum \frac{2n}{(n^2-1)^2}$ converge

- Par domination sur les séries à termes positifs, $\sum \frac{2n}{(n^2-1)^2+4n^2}$

Finalement $\sum I_n$ converge.

Paul

Khôlles numero 10

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$
et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n et montrer que la suite (I_n) est constante.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de J_n et établir que :

$$J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

3) Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

1) On pose,
pour $n \in \mathbb{N}$

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \end{array} \right.$$

Cpm.

Singularité en 0^+ :

or, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \underset{t \to 0}{\sim} 2n+1 \xrightarrow[t \to 0]{} 2n+1$

Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On a donc l'existence de I_n.
De plus,
Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

$$= \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)} \left(2\sin\left(\frac{2t}{2}\right) \cos\left(\frac{4(n+1)t}{2}\right)\right) dt$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2(n+1)t)\,dt$$

$$= 2\left[\frac{\sin(2(n+1)t)}{2n+1} \right]_{\varepsilon}^{\pi/2} = \frac{2}{2n+1}\left(\sin((n+1)\pi) - \sin((2n+1)\varepsilon) \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0.$$

Donc la suite (I_n) est constante et on a $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

2) On pose de même,

$$g \left| \begin{array}{lll}]0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \end{array} \right. \quad \mathcal{C}_{pm}$$

Pour tout $t \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $g(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 2n+1 \xrightarrow[t\to 0]{} 2n+1$

Donc la fonction g est prolongeable par continuité en 0. Donc J_n existe.
On regarde maintenant l'existence de,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

On pose,

$$h \left| \begin{array}{lll}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\sin(t)}{t} \end{array} \right. \quad \mathcal{C}_{pm}$$

En 0^+ :

Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $h(t) = \frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1 \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

Paul

Donc la fonction h est prolongeable par continuité en 0. La singularité en 0^+ est donc traitée.

En $+\infty$:

Soit $A \geq 1$, on a :

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

en posant, $v : t \longrightarrow \frac{1}{t}$ et $u' : t \longrightarrow \sin(t)$ qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1, A]$, on a :

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{\cos(A)}{A} + \cos(1) - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

De plus, en posant,

$$f \left| \begin{array}{l} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \frac{\cos(t)}{t^2} \end{array} \right. \quad \mathcal{C}_{pm}$$

Donc pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$0 \leq \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

Donc par Riemann et théorème de domination pour les fonctions positives. On en déduit que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt$ existe et que la fonction f est intégrable en $+\infty$.

Finalement, quand $A \longrightarrow +\infty$,

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,dt \xrightarrow[A \to +\infty]{} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge.

De plus, soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt \underset{\substack{u = \frac{t}{2n+1} \\ du = \frac{1}{2n+1}dt}}{=} \int_{\varepsilon(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2n+1}} \frac{1}{2n+1}\,du$$

$$= \int_{\varepsilon(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

On a donc bien,

$$J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on regarde : et $\varepsilon > 0$,

$$I_n - J_n = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t)\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)dt$$

On note pour

$$\phi \left| \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{1}{t} + \frac{1}{\sin(t)} \end{array} \right.$$

Paul

La fonction ϕ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ telle que :

$$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad \phi'(t) = -\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{1}{t^2}$$

$$= \frac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^2\sin^2(t)}$$

$$= \frac{t^2 - \frac{t^5}{3!} - t^2(1-\frac{t}{2}) + o(t^3)}{t^2(t - \frac{t^3}{3!}) + o(t^3)}$$

$$= -\frac{\frac{t^5}{6} - \frac{t^3}{2} + o(t^2)}{t^3 - \frac{t^5}{6} + o(t^3)}$$

$$\underset{t \to 0^+}{\sim} 1 \xrightarrow[t \to 0^+]{} 1$$

Donc la fonction ϕ est dérivable en 0.

De plus, elle est prolongeable par continuité en 0 car,

$$\text{pour } t \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad \phi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)}$$

$$\underset{t \to 0}{\sim} \frac{t - t}{t^2} = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

Donc la fonction ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

Donc par le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$I_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t)\,\phi(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc, $J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} I_n$

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

1. Étudier pour quelles valeurs de n l'intégrale converge.
2. Calculer J_1.
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a $J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} J_n$.
4. En déduire J_n si $n \geq 1$.

Laetitia

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$

1. Pour $n=0$, $J_n = \int_0^{+\infty} 1 \, dx$ diverge.

Soit $n \geq 1$. On pose $f_n \left| \begin{array}{l} [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{(1+x^3)^n} \end{array} \right.$

Soit $x \in [0, +\infty[$:

$\frac{x^2}{(1+x^3)^n} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

D'après les intégrales de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge. Par théorème de comparaison sur les o pour les fonctions à termes positifs, $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge.

D'où J_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

2. $f_1(x) = \frac{1}{1+x^3}$, $\forall x \in [0, +\infty[$

$f_1(x) = \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{x^2-x+1}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)$

Soit $X \geq 0$.

$\int_0^X f_1(x) dx = \frac{1}{3}\left[\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^X$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{X^2+2X+1}{X^2-X+1}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

Quand $X \to +\infty$

$$J_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\pi}{3}$$

3. Soit $n \geq 1$

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$$

On pose $\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)^n} \end{cases}$ et $\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = -\dfrac{n\cdot 3x^2}{(1+x^3)^{n+1}} \end{cases}$

Soit $X \geq 0$ $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx = \left[\frac{x}{(1+x^3)^n}\right]_0^X + 3n\int_0^X \frac{x^3+1-1}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^X \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx = \frac{X}{(1+X^3)^n} + 3n\int_0^X \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx - 3n\int_0^X \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx$$

Quand $X \to +\infty$:

$$J_n = 3n\,J_n - 3n\,J_{n+1}$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\,J_n$$

4. On conjecture que $\forall n \geq 2$, $J_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(3k-1)}{3^{n-1}(n-1)!}\cdot J_1$

Montrons le par récurrence

* Initialisation :

$$\prod_{k=1}^{2-1}(3k-1)\cdot\frac{1}{3^{2-1}(2-1)!}\,J_1 = \frac{3-1}{3\cdot 1}\,J_1 = J_2 \quad (Q3)$$

* Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}_2$ tel que $J_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(3k-1)}{3^{n-1}(n-1)!}\,J_1$

$$J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\,J_n = \frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(3k-1)}{3^{n-1}(n-1)!}\,J_1$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-1)}{3^n\,(n)!}\,J_1$$

Par le principe de récurrence, $\forall n \geq 2$ $J_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(3k-1)}{3^{n-1}(n-1)!}\,J_1$

Or $J_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} \Rightarrow J_n = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(3k-1)}{3^n(n-1)!}$

Pauline

Énoncé :

La fonction $x \mapsto \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?

• $f \left| \begin{array}{l}]2, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}} \geq 0. \end{array} \right.$

est continue par morceaux sur $]2, +\infty[$.

. Sur $[3, +\infty[$:

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x e^{x}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

par croissance comparée.
Or, $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[3, +\infty[$,

car il s'agit d'une fonction de Riemann et $\frac{3}{2} > 1$.
Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{x e^{x}}$ est intégrable sur $[3, +\infty[$.

Et, par théorème d'intégration des équivalents pour les fonctions positives f est intégrable sur $[3, +\infty[$.

• Sur $]2, 3]$:

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{x \to 2}{\sim} \frac{e^{-2}}{2(x-2)^{1/2}}$$

Or, $x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^{1/2}}$ est intégrable sur

$]2, 3]$ car $\frac{1}{2} < 1$ et par Riemann.
Par linéarité $x \mapsto \dfrac{e^{-2}}{2\,(x-2)^{1/2}}$ est intégrable

sur $]2, 3]$.
Et, par théorème d'intégration des équivalents pour les fonctions positives f est intégrable sur $]2, 3]$.

Ainsi f est intégrable sur $]2, +\infty[$.

Bilal

EXERCICE 2. — *Démontrer que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$ *converge et calculer sa valeur.*

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right.$

• soit $t \in [1;+\infty[$, $\dfrac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \geq 0$.

Par théorème d'intégration des équivalents sur les séries à termes positifs et par critère de Riemann, on conclut :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt \text{ converge.}$$

• Soit $x \in [1;+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt \overset{t=sh(u)}{=} \int_{argsh(1)}^{argsh(x)} \frac{1}{sh(t)}\,dt$

$$= \int_{argsh(1)}^{argsh(x)} \frac{sh(t)}{sh^2(t)}\,dt.$$

Alors, $\displaystyle\int_{argsh(1)}^{argsh(x)} \frac{sh(t)}{ch^2(t)-1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{argsh(1)}^{argsh(x)} \frac{sh(t)}{ch(t)+1} - \frac{sh(t)}{ch(t)-1}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(|ch(t)+1|) - \ln(|ch(t)-1|)\Big]_{argsh(1)}^{argsh(x)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, ch(x) \geq 1 \longrightarrow = \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\dfrac{ch(t)+1}{ch(t)-1}\right)\right]_{arg\,sh(1)}^{argsh(x)}$

$ch(argsh(x)) = \sqrt{1+x^2}$ $\longrightarrow = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right) - \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\right)$
$x \in \mathbb{R}_+$

Donc $\boxed{\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right) - \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)}$$

Daniel

Exercice 2. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\left(1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Soit $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto 1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) \end{array}\right.$ En $]0,+\infty[$.

* Soit $t \in [1,+\infty[$.

$f(t) = 1 - t\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)$

$= 1 - t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$

Or $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} 1 - t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$

$= \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$

Donc $f(t) \sim \frac{1}{2t} > 0$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt$ diverge d'après Riemann et par linéarité

Par théorème d'intégration des équivalents,

$\int_1^{+\infty} f$ diverge.

* Soit $t \in]0,1]$.

$f(t) = 1 + t\ln(t) - t\ln(t+1)$

$\sim 1 + t\ln(t) - t^2$

$\underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées.

donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et donc

$\int_0^1 f$ converge car $f \in \mathcal{C}_m([0,1],\mathbb{R})$

1/2

* Soit $t \geq 0$.

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt = \underbrace{\int_0^{1} f(t)\,dt}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_1^{\infty} f(t)\,dt}_{\text{diverge}}$$ par relation de Chasles.

Or, la somme d'une intégrale convergente et une divergente est divergente.

D'où, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$ diverge.

Julien

Exercice de khôlle
Semaine n° 10.

Énoncé :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt \quad ; \quad J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$$

$$K_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$$

1) On pose $J = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(J_n - J) = 0$

2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$

3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et donner sa valeur.

Une solution :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on pose :

$$f_n : \left| \begin{array}{l} [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{1+t+t^n} \geq 0 \end{array} \right. \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[)$$

Ainsi, f_n et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont continues sur le segment $[0;1]$, d'où :

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

$$0 \leq |J_n - J| = \left| \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{1+t-1-t-t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\,dt \right|$$

$$0 \leq |J_n - J| \leq \int_0^1 \left| \frac{-t^n}{\underbrace{(1+t)(1+t+t^n)}_{\geq 1}} \right| dt$$

$$\leq \int_0^1 t^n \, dt$$

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par théorème d'encadrement, $J_n - J \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ie $J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} J$

2) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $A > 1$.

$$0 \leq \underbrace{\int_1^A \frac{1}{1+t+t^n} dt}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} K_n} \leq \int_1^A t^{-n} \, dt = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^A$$

$$= \frac{A^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}$$

$$(-n+1 < 0) \quad \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par théorème d'encadrement, on a déduit que $K_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

3) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, alors:

$I_n = J_n + K_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} J$ par Q1 et Q2).

Or $J = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$.

Enfin, on conclut que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2)$

Julien

Exercice de khôlle

Semaine n° 10

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\, dt$.

Soit $1 > \varepsilon > 0$

$t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[\varepsilon ; 0]$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\, dt \underset{\substack{u=\sqrt{t} \\ 2u\, du = dt}}{=} \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(u^2)}{u} \cdot 2u\, du$$

$$= 4 \int_\varepsilon^1 \ln(u)\, du$$

$$= 4 \left[u\ln(u) - u \right]_\varepsilon^1$$

$$= 4\left(-1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -4 \qquad \left(\varepsilon \ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \text{ par croissances comparées}\right)$$

Margaux

$$\boxed{\text{Soit } a>0. \text{ Calculer } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,dt}$$

Soit $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{a^2+t^2} \end{array} \right.$ C^M sur $]0,+\infty[$.

quand $t \to +\infty$,

$$f(t) = o\Big(\underbrace{\frac{1}{t^{3/2}}}_{\geq 0}\Big)$$

car $\dfrac{t^{3/2}\ln(t)}{a^2+t^2} \sim \dfrac{t^{3/2}\ln(t)}{t^2} = \dfrac{\ln(t)}{t^{1/2}} \to 0$ par cc.

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt$ converge par Riemann.

Par intégration des o pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

quand $t \to 0^+$,

$$f(t) \leq \ln(t)$$

or $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente. Par domination des intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 f(t)dt$ converge

donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

En particulier pour $a=1$. Soit $x \in]0,1]$.

$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$u = \frac{1}{t} \iff t = \frac{1}{u}$ donc $dt = -\frac{1}{u^2}du$

$$= -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du = 0$ et converge.

Pour un a quelconque.

Soit $0 < \varepsilon < A$.

$$\int_{\varepsilon}^{A} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt \underset{\substack{t=\frac{u}{a} \iff u=at \\ dt=\frac{1}{a}du}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{\ln\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\frac{u^2}{a^2}} \times \left(\frac{1}{a}\right) du$$

$$= \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{\ln\left(\frac{u}{a}\right)}{a+\frac{u^2}{a}}\,du = \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{\ln(u)}{a+\frac{u^2}{a}}\,du - \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{\ln(a)}{a+\frac{u^2}{a}}\,du$$

$$= a\int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{\ln(u)}{a^2+u^2}\,du - \ln(a)\int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}\,du$$

$$= a\int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{\ln(u)}{a^2+u^2}\,du - \ln(a)\left(\arctan(A)-\arctan(\varepsilon)\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{A\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}]{} a\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(u)}{a^2+u^2}\,du - \ln(a)\frac{\pi}{2}$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = a\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{a^2+u^2}\,du - \ln(a)\frac{\pi}{2}$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = 0$

On a $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2} \times \frac{\ln(a)}{a}}$$

Malaurie

Semaine 10

Énoncé : Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\,dt$.

Résolution.

Posons : $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} \end{array} \right.$

* Convergence en 0.

$f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissance comparée.

f est prolongeable par continuité en 0, donc $\int_0^1 f$ converge.

* Convergence en $+\infty$.

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t\ln(t)}{t^4} = \frac{\ln(t)}{t^3} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \geq 0$$

Ainsi, par théorème d'intégration des o et des équivalents pour les fonctions positives, et Riemann sur $[1,+\infty[$ $(2>1)$, $\int_1^{+\infty} f$ converge.

* Soit $0<\varepsilon<A$.

Posons le changement de variable suivant : $t = \frac{1}{u}$ $\quad dt = -\frac{1}{u^2}\,du$.

$$\int_\varepsilon^A f(t)\,dt = \int_{1/\varepsilon}^{1/A} \frac{1}{u}\,\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2}\left(\frac{-1}{u^2}\right)du = \int_{1/\varepsilon}^{1/A} \frac{\ln(u)}{u^3}\,\frac{1}{\frac{(u^2+1)^2}{u^4}}\,du$$

$$= -\int_{1/A}^{1/\varepsilon} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^2}\,du = -\int_{1/A}^{1/\varepsilon} f(u)\,du.$$

Or, $\int_\varepsilon^A f(t)\,dt \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0 \\ A\to+\infty}]{} \int_0^{+\infty} f$

et $\int_{1/A}^{1/\varepsilon} f(u)\,du \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0 \\ A\to+\infty}]{} \int_0^{+\infty} f$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} f(u)\,du = 0.$

Rose

L. 23/11/2020

Colle S10

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ $\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t} dt$ $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

- $f \left| \begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \end{array} \right.$ est continue par morceaux sur $]0;1]$

On a pour tout $t \in]0,1]$: $0 \leq f(t) \leq 1$

Or $\int_0^1 1\, dt = 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\int_0^1 dt$ converge.

Par théorème de domination sur les intégrales de fonctions positives,

$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.

- $g \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(t)\, e^{-t} \end{array} \right.$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

Sur $]0,1]$ $\ln(t)\, e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ car $e^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$

Or $\int_0^1 \ln(t) = -1$

Donc par intégration des équivalents, $\int_0^1 \ln(t)\, e^{-t} dt$ converge.

Sur $[1;+\infty[$ $0 \leq g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge par Riemann.

Par intégration des petits o pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g(t)\, dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t} dt$ converge.

- $h \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{t-\sin(t)}{t^\alpha} \end{cases}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

Sur $]0,1]$: $h(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t^3}{6t^\alpha} + o\left(\dfrac{t^3}{t^\alpha}\right) = \dfrac{1}{6t^{\alpha-3}} + o\Big(\underbrace{\dfrac{1}{t^{\alpha-3}}}_{\geq 0}\Big) \geq 0$

Or d'après Riemann, $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-3}} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 3 < 1$
ie $\alpha < 4$

Par intégration des petits o pour les fonctions positives et par linéarité, $\int_0^1 h(t)dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 4$.

Sur $[1,+\infty[$: $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}} \geq 0$

Par Riemann et par intégration des équivalents pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} h(t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1$
ie $\alpha > 2$.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha \in]2;4[$.

Exercice 3. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0;+\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\mathrm{d}x$.

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx$; $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\,dx$

$g \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2} \end{array} \right. \in CM([0,+\infty[,\mathbb{R})$

Or, $\forall x \geq 1$, $0 \leq |g(x)| = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)_{+\infty}$. En effet, le rapport tend vers 0 quand $x \to +\infty$ car f est bornée.
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ est convergente par Riemann, par théorème d'intégration des o pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge. Comme $g \in CM([0,1],\mathbb{R})$, on en déduit que I converge.
De plus, par la même justification, $\int_1^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx$ converge.
Reste à étudier la singularité en 0.
Soit $\varepsilon \in]0,1]$. $\int_\varepsilon^1 \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_{1/\varepsilon}^1 \frac{f(t)}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$

D'où, $\int_\varepsilon^1 \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx = -\int_{1/\varepsilon}^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$

Quand $\varepsilon \to 0^+$, $\int_0^1 \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx = \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx \in \mathbb{R}$ (voir précédemment)

Ainsi, J converge.

2. On a : $\int_0^1 \frac{f(1/x)}{1+x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx$ (*)
Pour montrer que $I = J$, il reste à montrer :
$\int_1^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx$

Soit $t \geq 1$: $\displaystyle\int_1^t \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx \underset{u=\frac{1}{x}}{\overset{}{=}} \int_1^{1/t} \frac{f(u)}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$

$$\int_1^t \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx = \int_{1/t}^1 \frac{f(u)}{1+u^2}du$$

Quand $t \to +\infty$, $\frac{1}{t} \to 0^+$ et donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}dx \quad (**)$$

(*) et (**) nous livrent :

$$I = J$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$, $J' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$

$h \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^n} \end{array}\right.$ est $C^1([0,+\infty[, \mathbb{R})$ et bornée.

En effet : - si $n=0$: $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = 1$, $|h(x)| \leq 1$.

- sinon : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \leq 0$.

h est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

h est majorée par $h(0) = 1$ et minorée par 0 car $h > 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^n}{1+x^n}$.

$I' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(x)}{1+x^2}dx$, $J' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(1/x)}{1+x^2}dx$

Par q.1, I' et J' convergent et par q.2, $I' = J'$.

D'où : $\underbrace{I' + J'}_{=2I'} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n+1}{(1+x^2)(x^n+1)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

Donc : $2I' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I' = J' = \frac{\pi}{4}$

$\hookrightarrow x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in CM([0,+\infty[, \mathbb{R})$.

Soit $x \geq 0$: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$

MATHEM
Rayan

Exercice 5

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,dx$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de I_n.
2. A l'aide d'une intégration par parties, trouver alors un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,dx$

Soit $f : \left| \begin{array}{l} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{x^n(1+x^2)} \end{array} \right.$ est continue par morceaux sur $[1;+\infty[$

On a une singularité en $+\infty$, on pose donc $\alpha \in [1;+\infty[$

On a ; $\int_1^{\alpha} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,dx$

$\forall x \in [1;+\infty[$, $0 \leqslant \frac{1}{x^n(1+x^2)} \leqslant \frac{1}{x^{n+2}}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}}$ converge par le critère de Riemann car $n+2 > 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Par théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x^2+1)}\,dx$ converge.

2) On pose $X \in [1;\infty[$, $\int_1^X \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,dx$

on pose $u'(x) = \frac{1}{x^n}$ u et v sont $\mathcal{CM}([1;\infty[, \mathbb{R})$.

$v(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On a donc $u(x) = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, $v'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$\int_1^X \frac{1}{x^m(1+x^2)}\,dx = \left[\frac{1}{x^{m-1}(1-m)(1+x^2)}\right]_1^X - \int_1^X \frac{-2x}{x^{-m+1}(1-m)(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \frac{X^{1-m}}{(1-m)(1+X^2)} + \frac{1}{2(m-1)} - \frac{2}{m-1}\int_1^X \frac{1}{x^{m-2}(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{x^{m-2}(1+x^2)^2} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{m+2}} \geqslant 0$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{m+2}}$ converge d'après le critère de Riemann car

$m+2 > 1$

Ainsi quand $X \to +\infty$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{m-2}(1+x^2)^2}\,dx$ converge

d'après le théorème de comparaison aux équivalents de fonctions positives.

$$\int_1^X \frac{1}{x^{m+2}}\,dx = \left[\frac{x^{-m-1}}{-m-1}\right]_1^X = \frac{1}{m+1} - \frac{X^{-m-1}}{m+1}$$

$$\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{m+1}$$

équivalence des queues d'intégrales

$$\int_1^X \frac{1}{x^{m-2}(1-x^2)^2}\,dx \underset{X\to+\infty}{\sim} \frac{1}{m+1}$$

$$-\frac{2}{m-1}\frac{1}{m+1} = o\left(\frac{1}{2(m-1)}\right) = o\left(\frac{1}{2(m-1)}\right)$$

$$\text{a } \frac{X^{1-m}}{(1-m)(1+X^2)} + \frac{1}{2(m-1)} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2(m-1)}$$

$m \to +\infty$ $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^m(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2(m-1)} + o\left(\frac{1}{2(m-1)}\right)$$

Par définition I_m a pour équivalent : $2(m-1)$.

Anna

EXERCICE 6. — *Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes?*

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt} \qquad \int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}\,dt \qquad \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{t^2}}dt$$

• $f \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{e^{t^2}} \end{array} \right.$ $\mathcal{C}_{pm}$

• $\frac{1}{e^{t^2}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or, $\int_{\cancel{0}\ 1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente d'après Riemann ($2>1$).

D'après la convergence des intégrales de fonction positives sur un intervalle semi-ouvert, avec un o, on en déduit que

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.