

MATHEU
Ryan

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$.
Montrons que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrons que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On cherche donc à montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus U$ est fermé
en partant de la caractérisation séquentielle des fermés.

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy > -1\}$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq -1\}$$

Soit $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in (\mathbb{R}^2 \setminus U)^{\mathbb{N}}$

tel que:

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}} (x, y) \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On veut montrer que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U$.

Nous sommes donc en espace produit de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de dimension finie, où toutes les normes $\|\cdot\|$ sont équivalentes.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}} x, \quad x \in \mathbb{R} \\ y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}} y, \quad y \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (x_n) \in (\mathbb{R} \setminus U)^{\mathbb{N}} \\ (y_n) \in (\mathbb{R} \setminus U)^{\mathbb{N}} \end{array}$$

or, $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus U, \quad x_n y_n \leq -1.$

Par passage à la limite dans l'inégalité et limite
d'un produit de suite dans $\mathbb{R}^n$:

$$xy \leq -1$$

et donc par définition $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U$.

Ainsi $\mathbb{R}^2 \setminus U$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et donc U est un
ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 : Démontrer que l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles de format $n \times n$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$. Est-ce un compact ?

Emilie

- En dimension finie, montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé revient à montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel de dimension finie. Notons alors que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Pour cela on revient à la caractérisation.

Rappel : $S_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}), M^T = M \}$

Ainsi, $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$

- $0_{M_n(\mathbb{R})} \in S_n(\mathbb{R})$ ($0_{M_n(\mathbb{R})}^T = 0_{M_n(\mathbb{R})}$)
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(M_1, M_2) \in S_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)^T &= (\lambda_1 M_1)^T + (\lambda_2 M_2)^T \text{ par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda_1 M_1^T + \lambda_2 M_2^T \\ &= \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \text{ car } M_1^T = M_1 \text{ et } M_2^T = M_2. \end{aligned}$$

Ainsi $(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \in S_n(\mathbb{R})$.

$S_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ c'est donc un fermé.

- En dimension finie, compact $\Leftrightarrow$ être fermé et borné. Regardons si $S_n(\mathbb{R})$ est borné.

En se munissant de $\|\cdot\|_\infty : M \rightarrow \max_{1 \leq i, j \leq n} |M_{ij}|$

supposons que $S_n(\mathbb{R})$ est bornée.

Alors $\exists A > 0$; $\forall M \in S_n(\mathbb{R})$,

$$\|M\|_{\infty} \leq A$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

posons $M_n = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in (S_n(\mathbb{R}))^{n'}$, $\|M_n\|_{\infty} = |n| = n$

Alors on aurait $n \leq A$. Et quand $n \rightarrow +\infty$

on aurait une contradiction

Donc $S_n(\mathbb{R})$ n'est pas bornée. $\mathcal{C}$ n'est pas un compact

Sirine

Exercice Rhône:

L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$
est-il un compact de $\mathbb{R}^2$?

Etant donné que $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie
 A est un compact de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si
 A est une partie fermée et bornée dans $\mathbb{R}^2$.

* Montrons que $A \subset \mathbb{R}^2$.

Soit $((x_n, y_n)) \in (A)^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$
Montrons que $(x, y) \in A$.

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y \end{cases}$$

Comme $((x_n, y_n)) \in (A)^{\mathbb{N}}$ on a:
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 \leq 1$

et par passage à la limite dans une inégalité
large et par opération sur les limites de
suites réelles,

quand $n \rightarrow +\infty$: $x^2 + xy + y^2 \leq 1$.

Ainsi $(x, y) \in A$

D'où $A \subset \mathbb{R}^2$.

* A bornée dans $\mathbb{R}^2$?

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$

On introduit:

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}$$

On vérifie que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

* séparation: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x, y)\| = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}_{\geq 0} = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{y}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$$

$$\Rightarrow x = y = 0$$

* homogénéité: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\|(\lambda x, \lambda y)\| &= \sqrt{\left(\lambda x + \frac{\lambda y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda y\right)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2\right]} \\ &= |\lambda| \cdot \|(x, y)\|.\end{aligned}$$

* inégalité triangulaire:

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{Montrons } \|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|$$

$$\text{ie } \|(x, y) + (x', y')\|^2 \leq (\|(x, y)\| + \|(x', y')\|)^2$$

$$\begin{aligned}\text{On a: } \|(x+x', y+y')\|^2 &= \left(x+x' + \frac{y+y'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(y+y')\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 2x\left(x + \frac{y}{2}\right)\left(x' + \frac{y'}{2}\right) \\ &\quad + \left(x' + \frac{y'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + 2x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 \\ &\leq \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 2x\left(x + \frac{y}{2}\right)\left(x' + \frac{y'}{2}\right) + \left(x' + \frac{y'}{2}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + 2x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{On } (\|(x, y)\| + \|(x', y')\|)^2 &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(x' + \frac{y'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 \\ &\quad + 2 \cdot \left[\left(x + \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right] \cdot \left[\left(x' + \frac{y'}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\right]\end{aligned}$$

On a bien l'inégalité triangulaire, $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\text{Soit } (x, y) \in A &\Rightarrow x^2 + xy + y^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow (x, y) \in B_{1,1}((0,0), 1)\end{aligned}$$

A est bornée dans $\mathbb{R}^2$.

Pierre

Cette semaine 9.

EXERCICE 11. — Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On rappelle que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est défini par :

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M M^T = I_n\}$$

et que le groupe spécial orthogonal est défini par :

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) : \det(M) = 1\}.$$

1. En considérant le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ démontrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrons que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné.

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Soit $(A_k) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que $A_k \rightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Démontrons que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N}, {}^t A_k A_k = I_n$$

De plus, ${}^t A_k \rightarrow {}^t A$ car ${}^t \cdot$ est une application linéaire en dimension finie
 $\rightarrow {}^t \cdot$ est continue.

$$\text{On pose } \mathcal{B} \mid \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$(A, B) \mapsto AB$$

$\mathcal{B}$ est une application bilinéaire en dimension finie : $\mathcal{B}$ est continue.

$$\text{aussi, } {}^t A_k A_k \rightarrow {}^t A A \text{ car } {}^t A_k A_k = I_n$$

$$\text{aussi } {}^t A A = I_n \text{ et } A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

$\mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$ est bornée:

Soit $M \in \mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$. On rappelle $\langle , \rangle \mid (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(A, B) \rightarrow \text{Tr}(^tAB)$
est le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\text{ainsi, } \|M\| = \sqrt{\text{Tr}(^tMM)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}.$$

et donc $\forall M \in \mathcal{Q}_n(\mathbb{R}), \|M\| \leq \sqrt{n}$.

finallement $\mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$ est bornée.

$\mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$ est alors fermé et bornée en dimension finie. $\mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$ est compact.

2) Montrons que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Q}_n(\mathbb{R}).$$

Soit $(A_k) \in (\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A_k \rightarrow A \in \mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$
Montrons que $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N}, \det(A_k) = 1$$

de plus, le déterminant étant continu, $\det(A_k) \rightarrow \det(A)$

finallement $\det(A) = 1$ et $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$

d'où $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est fermé d'un compact: $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice :

E un espace vectoriel normé et soit $\{u, v, w\}$ une famille libre de E .

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \| t \sin(t) \cdot u + t \cos(t) \cdot v + (t^2 - 1) \cdot w \|$$

- (a) En utilisant la 2^{ème} inégalité triangulaire, montrer que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.
(b) En déduire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que : $\forall |t| > t_0, f(t) > 1$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0$.

Exercice :

1) (a) D'après la deuxième inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \| (t^2 - 1)w \| &= \| -\sin(t) \cdot u + \cos(t) \cdot v \| \\ &\leq \| \sin(t) \cdot u + \cos(t) \cdot v \| \\ \text{Car pour } t \neq 0, &\leq \| t^2 w + \frac{\sin(t)}{t} u + \frac{\cos(t)}{t} v \| \end{aligned}$$

d'où quand $t \rightarrow \infty, f(t) \rightarrow \infty$
car $\frac{\sin(t)}{t} \leq \frac{1}{t} \rightarrow 0$ de même pour $\frac{\cos(t)}{t}$

b) Par définition :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty \text{ si } \forall M \in \mathbb{R}, \exists t_0 > 0, \forall t > t_0 \Rightarrow f(t) > M$$

Car avec $M = 1$, il y aient $\forall t > t_0, f(t) > 1$
de même quand $t \rightarrow -\infty$,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists t_0 < 0, \forall t < t_0 \Rightarrow f(t) > M$$

avec $M = 1$, on a toujours

$$\forall t < t_0, f(t) > 1$$

2) Supposons que pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$

$$\text{Car pour } t = 1, \| \sin(1) \cdot u + \cos(1) \cdot v \| \neq 0$$

finalement ; $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0$.

Paul

Kholle semaine 9

Lycée Christian de Troyes



EXERCICE 4. — Soient K, L deux parties compactes d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On pose

$$K+L := \{x+y : x \in K, y \in L\}.$$

Démontrer que $K+L$ est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$.

On suit par compacité de K pour $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$

$\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que:

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in K$$

Donc, par compacité de K et L , pour

$$(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in K^{\mathbb{N}} \times L^{\mathbb{N}},$$

$\exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que,

$$x_{\psi(\varphi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in K$$

$$y_{\psi(\varphi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \in L.$$

Donc par composition de limite,

$$\underline{x_{\psi(\varphi(n))} + y_{\psi(\varphi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + y \in K+L.}$$

Finalement, on a démontré que $K+L$ est compacte.

Mathilde

EXERCICE 2. — Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$$

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(t) e^{-t} dt$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g) &= \int_0^1 (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 \lambda f(t) e^{-t} + \mu g(t) e^{-t} dt \\ &= \lambda \int_0^1 f(t) e^{-t} dt + \mu \int_0^1 g(t) e^{-t} dt \\ &\quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\ &= \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g) \end{aligned}$$

donc l'application φ est linéaire

Montrons qu'elle est continue, c'est-à-dire :

$\exists C \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\|\varphi\|_\infty \leq C \|f\|_\infty$

$$\text{On a } \|\varphi\|_\infty = \sup_{f \in E} |\varphi(f)|$$

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) e^{-t} dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| e^{-t} dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 e^{-t} dt$$

$$\text{Or } \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = -\frac{1}{e} - 1$$

donc :

$$|\varphi(f)| \leq \left(-\frac{1}{e} - 1\right) \|f\|_\infty, \text{ par passage au sup, on a bien:}$$

$$\|\varphi\|_\infty \leq \underbrace{\left(-\frac{1}{e} - 1\right)}_{=C} \|f\|_\infty$$

donc φ est linéaire et continue.

Exercice 1

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qu'on suppose bornées, muni de la norme infinie. Posons alors :

$$A = \{f \in E, \forall x \in [0, 1], e^{f(x)} \geq 2 + f(x)\}$$

1. Montrer A désigne une partie fermée de E .

2. A est-elle compacte dans E ?

Clara

$$\textcircled{1} A = \{f \in E, \forall x \in (0, 1), e^{f(x)} \geq 2 + f(x)\}$$

Montrons que $A \subset E$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tel que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \in E$. Montrons que $f \in A$.

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \Rightarrow \forall x \in (0, 1), \forall n, e^{f_n(x)} \geq 2 + f_n(x) \quad (*)$$

montrons que $\forall x \in (0, 1), e^{f(x)} \geq 2 + f(x)$.

montrons que $\forall x \in (0, 1), f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

on a par hypothèse, $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ donc $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$

~~soit~~ $\forall x \in (0, 1), 0 \leq \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty$
ou

par théorème d'encaissement, $\|f_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0$

donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

par passage à la limite dans une inégalité large $(*)$, on a :

$$\forall x \in (0, 1), e^{f(x)} \geq 2 + f(x)$$

Donc $f \in A$.

et $A \subset E$.

$\textcircled{2}$ On suppose que A est bornée. (par l'absurde)

On pose $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$

$f \in E$

alors $\forall x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ on a bien $e^t \geq 2 + t$

et de plus, la fonction $f: x \mapsto t$ est non bornée.

donc $f \in A$ et f non bornée.

On en déduit que A est non bornée, et donc A n'est pas compacte dans E .

{ On peut le montrer avec une étude de fonction en posant
 $g: t \mapsto e^t - 2 - t$ dérivable en $(0, +\infty)$
 $g'(t) = e^t - 1$
donc $g(t) \geq 0$

Dans

Soit E un espace vectoriel, F un fermé de E et K un compact de E .

Montrer que $F + K$ est un fermé dans E .

Posons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (F + K)^{\mathbb{N}}$, s'il $x_n \rightarrow x \in E$.

$$(2) \quad x_n = \underbrace{f_n}_{\in F} + \underbrace{k_n}_{\in K}$$

(1) $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante
 $x_{p(n)} \xrightarrow{(*)} x \in E$.

* Comme $F \subset E$, $\forall (f_n) \in F^{\mathbb{N}}$, $f_n \rightarrow f \in F$

donc: $\forall \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante

$$f_{\varphi(n)} \rightarrow f$$

* Comme K est compact dans E :

$\forall (k_n) \in K^{\mathbb{N}}$, $\exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante
 $k_{\psi(n)} \rightarrow k \in K$.

Soit $\varphi \circ \psi(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

$$\begin{cases} f_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow f \\ k_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow k \end{cases}$$

Par opérations sur les limites:

$$f_{\varphi \circ \psi(n)} + k_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow f + k \in (F + K)$$

Or, d'après $(*)$ et (2):

$$f_{\varphi \circ \psi(n)} + k_{\varphi \circ \psi(n)} = x_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow x \in E$$

Par unicité de la limite

$$x = f + k \text{ donc } \boxed{x \in F + K}$$

Ainsi, par caractérisation séquentielle des fermés via l'adhérence.

$F + K$ est un fermé dans E .

Exercice : Démontrer que les deux ensembles suivants sont ou-

verts :

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 < \exp(\sin y) + 12\}$$

$$\text{et } G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < \ln(x^2 + 1) < 1\}.$$

Réponse

F est ouvert $\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 / F$ est fermé

on pour $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 / F$ tel que :

$$x_n \rightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}$$

on a alors : $x_n^2 \geq \exp(\sin(y_n)) + 12$
par passage à la limite :

$$x^2 \geq \exp(\sin(y)) + 12$$

$$\text{donc } (x, y) \in \mathbb{R}^2 / F$$

alors $\mathbb{R}^2 / F$ est fermé alors F ouvert.

pour $x \in \mathbb{R}$ on a $f: x \mapsto \ln(x^2 + 1)$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(1 + x^2)$$

$$\Rightarrow e^y - 1 = x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{e^y - 1} = x$$

donc on a : $f^{-1} x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$

$$\text{alors } G = f^{-1} (]--1, 1[)$$

or f^{-1} est continue car composée de continue.
et U est un ouvert donc G est un ouvert

Julien

Exercice de l'algèbre linéaire n° 2

Exercice 4. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$.
Montrer que u est continu si et seulement si A est fermé.

On procède par double implication.

$\Rightarrow$ On suppose que u est continu.

Comme $A = u^{-1}(\{1\})$, or $\{1\} \subset E$, A est le préimage d'un fermé par une application continue, donc $A \subset E$.

$\Leftarrow$ On procède par contradiction en supposant que u n'est pas continu.

Alors, par caractérisation séquentielle de la continuité des applications linéaires, la restriction de u à $B(0_E, 1)$ n'est pas bornée, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B(0_E, 1) \setminus \{0_E\}, \|u(x_n)\| > n. \quad (*)$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \Rightarrow \frac{\|x_n\|}{\|u(x_n)\|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{On pose donc pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|}$$

$\neq 0$ par $(*)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\|u(y_n)\| = \left\| u\left(\frac{yx_n}{\|yx_n\|}\right) \right\| = \frac{\|u(yx_n)\|}{\|yx_n\|} = 1 \quad (\text{par linéarité de } u \text{ et l'homogénéité de } \|\cdot\|).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in W$.

$$\text{Or } \|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|u(x_n)\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E$$

Or si A était fermé, alors 0_E appartenant à A , ce qui n'est pas.

En effet, $\|u(0_E)\| = \|0_E\| = 0_E$ (par linéarité de u et par réponse de 1.1).

Ainsi, A n'est pas fermé dans E .

Par conséquent, on conclut que $A \not\subseteq E \Rightarrow u \notin \mathcal{L}^0$.

D'où l'ignorance.

Exercice 4

On considère un espace vectoriel normé E et on note F un fermé de E et K un compact de E .
Montrer que $F + K$ est fermé dans E .

Hypothèse : $F \subseteq E$ et K un compact de E . Montrons que $F + K \subseteq E$.

Soit $(x_n) \in (F + K)^{\mathbb{N}}$, et $x \in E$ tel que $x_n \rightarrow x$.
montrons que $x \in F + K$.

$(x_n) \in (F + K)^{\mathbb{N}}$ donc il existe $(k_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n = k_n + f_n$.

Et par compacité de K dans E et d'après la propriété de B-W :

$\exists p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pp, $\exists k \in K$ tel que $k_{p_j} \rightarrow k$.

Or $k_{p_j} = x_{p_j} - f_{p_j}$.

par passage à la limite pour des suite à valeurs réelles on a :

$$f_{p_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} x - k = f \quad \text{or } f \text{ est fermé donc } f \in F$$

ainsi $x = \underset{F}{f} + \underset{K}{k}$ donc $x \in F + K$ et $F + K$ est bornée.

Benjamin

Colle semaine n°9

Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

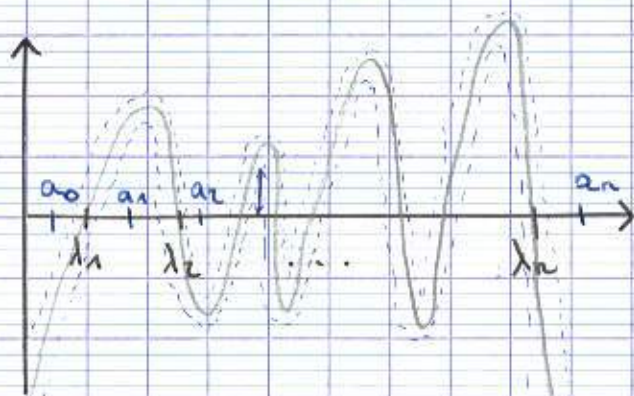
• Soient :

$$F_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \deg(P) = n\}$$

$$A = \{P \in F_n, P \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{R}\}$$

• Soit $P \in A$:

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que : } \begin{cases} \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sont les racines de } P \text{ (toutes simples)} \end{cases}$$



On pose

$$\varepsilon = \min(P(a_0), \dots, P(a_n)) > 0$$

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\begin{cases} \text{pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_{k-1} < a_k < \lambda_k \\ \lambda_1 > a_0 \\ \lambda_n < a_n \end{cases}$

C'est solution :

$$\text{Soit } N : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$Q \mapsto \max(|Q(a_0)|, \dots, |Q(a_n)|)$$

Alors N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\text{Soit } Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } N(Q) = 0$$

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, |Q(a_i)| \leq N(Q) \Rightarrow \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(a_i) = 0$$

Donc un polynôme de degré au plus n à $n+1$ racines, c'est le polynôme nul.

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda \neq 0$
 $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $|\lambda Q(a_i)| = |\lambda| |Q(a_i)| \leq |\lambda| N(Q)$
 Par passage au max : $N(\lambda Q) \leq |\lambda| N(Q)$
 Avec $Q \leftarrow \lambda Q$ et $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$: $N(\lambda Q) \geq N(Q)$
 $\Rightarrow N(\lambda Q) \geq |\lambda| N(Q)$

Donc $N(\lambda Q) = |\lambda| N(Q)$ (vrai aussi si $\lambda = 0$)

- Soient $Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, |P+Q(a_i)| &= |P(a_i) + Q(a_i)| \\ &\leq |P(a_i)| + |Q(a_i)| \\ &\leq N(P) + N(Q) \end{aligned}$$

Par passage au max : $N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$

* Montrons alors que $B(P, \varepsilon) \subset A$

Soit $Q \in B(P, \varepsilon)$: $N(P-Q) \leq \varepsilon$. Donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, |P(a_i) - Q(a_i)| &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) - \varepsilon &\leq Q(a_i) \leq \varepsilon + P(a_i) \end{aligned}$$

- Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} P(a_i) - \varepsilon &\leq Q(a_i) \leq \varepsilon + P(a_i) \\ \text{Si } P(a_i) > 0, P(a_i) - \varepsilon &\geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } Q(a_i) > 0 \quad P(a_i) = |P(a_i)| \leq 2\varepsilon$$

$$\text{Si } P(a_i) < 0, P(a_i) + \varepsilon \leq -2\varepsilon + \varepsilon = -\varepsilon < 0$$

$$\text{Donc } Q(a_i) < 0$$

Ainsi, $P(a_i)$ et $Q(a_i)$ sont de même signe strictement. (1)

- Montrons par l'absurde que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P(a_i) P(a_{i+1}) > 0$:

Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que

$$P(a_i) P(a_{i+1}) \leq 0 \quad (\text{on sait que } P(a_i) \neq 0, P(a_{i+1}) \neq 0)$$

Ainsi, $P(a_i)$ et $P(a_{i+1})$ sont de même signe.

P est nécessairement de signe constant sur $[a_i, a_{i+1}]$ car sinon P aurait au moins deux racines par le théorème des valeurs intermédiaires, or P a λ_{i+1} pour unique racine.

Ainsi, P atteint un extremum local en λ_{i+1} car c'est la seule valeur où P s'annule donc on a $P'(\lambda_{i+1}) = 0$ et λ_{i+1} est racine double de P .

Il y a contradiction (λ_{i+1} racine simple)

Ainsi, $\forall i \in [0, n-1], P(a_i)P(a_{i+1}) < 0$ (2)

De (1) et (2), on déduit que :

$$\forall i \in [0, n-1], Q(a_i)Q(a_{i+1}) < 0$$

Soit $i \in [0, n-1]$,

$Q(a_i)$ et $Q(a_{i+1})$ étant strictement de signe opposé et Q étant continue car polynôme, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists \mu_i \in]a_i, a_{i+1}[, Q(\mu_i) = 0$$

Donc Q admet n racines distinctes. Or Q différent de 0, car sinon $Q(a_0) = 0$ ce qui n'est pas, et puisque Q est de degré maximum n , on en déduit que Q est de degré n et scindé à racines simples : $Q \in A$.

* On en conclut que $B(P, \epsilon) \subset A$: A est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

• 2^{ème} solution :

* $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $f_i : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ Q & \mapsto & Q(a_i) \end{matrix}$ linéaire.

Ainsi, toutes les f_i sont continues car linéaires en dimension finie.

* Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on pose $B_i =]P(a_i) - \epsilon, P(a_i) + \epsilon[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Alors, f_i étant continue, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_i^{-1}(B_i)$ est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $B = \bigcap_{i=0}^n f_i^{-1}(B_i)$ ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$ en tant qu'intersection finie d'ouverts. On remarque $P \in B$.

* Montrons alors que $B \subset A$.

Soit $Q \in B$,

$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_i(Q) \in B_i$

$\Rightarrow \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_i) - \epsilon < Q(a_i) < P(a_i) + \epsilon$

Alors, de la même façon qu'en première solution, on montre que $Q \in A$.

* Ainsi, B est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$ inclus dans A contenant P , donc nécessairement, A contient une boule ouverte centrée en P .

On en conclut que A est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice de Kholle semaine

MaPaurie

Énoncé:

On munit $\mathbb{R}[x]$ des normes données par $\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ et $\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$

① Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$ est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

② Vérifier que la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et convergente pour la norme $\|\cdot\|_1$

③ Montrer qu'on ne peut pas extraire de la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

④ Qu'a-t-on illustré dans cet exercice?

Résolution:

① Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt \leq \int_0^1 \|P\|_\infty dt = \|P\|_\infty.$$

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $\|P\|_1 \leq \|P\|_\infty$.

② Soit $n \in \mathbb{N}$. $\|x^n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergent pour $\|\cdot\|_1$

$$\|x^n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |t^n| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ donc } (x^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée pour } \|\cdot\|_\infty$$

③ Par l'absurde, supposons qu'il existe $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que :

Il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $x^{p(n)} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} Q$ *

Ainsi, par définition, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x^{p(n)} - Q\|_\infty \leq \varepsilon$$

Par la question 1, on a : $\forall n \geq N, \|x^{p(n)} - Q\|_1 \leq \varepsilon$

Ainsi, $x^{p(n)} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} Q$ or par la question 2, $x^{p(n)} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$

Par unicité de la limite, $Q = 0$ (en $\mathbb{R}[x]$).

$$\Rightarrow \|x^{p(n)}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Or, par la question 2 } \|x^{p(n)}\|_\infty = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Par unicité de la limite, $0 = 1$ 

④ Dans cet exercice, on a démontré que $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme infinie n'est pas compact.

Colle

Deniam

Exercice : Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.
On pose $A = \{f \in E, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1\}$
Démontrer que A est une partie fermée de E .

$$\text{On pose } \varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0)$$

Montrons que φ est continue

Soient $f, g \in E$,

$$\varphi(f) - \varphi(g) = f(0) - g(0)$$

$$\Rightarrow |\varphi(f) - \varphi(g)| = |f(0) - g(0)|$$

$$\leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

$$\leq \|f - g\|_\infty$$

φ est 1-lipschitzienne donc φ est continue sur E

$$\{f \in E : f(0) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\})$$

$\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ alors $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E

On pose $\Psi: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$

Soit $f, g \in E$,

$$\begin{aligned}\Psi(f) - \Psi(g) &= \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt \\ &= \int_0^1 (f(t) - g(t)) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\Psi(f) - \Psi(g)| &= \left| \int_0^1 (f(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 \|f - g\|_{\infty} dt \\ &\leq \|f - g\|_{\infty} \int_0^1 dt \\ &\leq \|f - g\|_{\infty}\end{aligned}$$

donc Ψ est 1-lipschitzienne donc Ψ est continue sur E

$$\{f \in E : \int_0^1 f(t) dt \geq 1\} = \Psi^{-1}([1, +\infty[)$$

$[1, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ alors $\Psi^{-1}([1, +\infty[)$ est un fermé de E .

$$A = \Psi^{-1}(\{0\}) \cap \Psi^{-1}([1, +\infty[)$$

L'intersection de deux fermés est un fermé donc A est un fermé de E .

Yann

Khôlle semaine 9.

Démontrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles de format $n \times n$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$. Est-ce un compact?

1) Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = M\}$

Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un rev de $M_n(\mathbb{R})$.

- ${}^t 0_{M_n(\mathbb{R})} = 0_{M_n(\mathbb{R})} \Rightarrow 0_{M_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

- Montrons maintenant que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

Soit $M_1, M_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & {}^t(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \\ &= {}^t(\lambda_1 M_1) + {}^t(\lambda_2 M_2) \end{aligned}$$

$$= \lambda_1 {}^t M_1 + \lambda_2 {}^t M_2 \text{ par linéarité de la transposée.}$$

$$M_1, M_2 \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$$

Donc $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$

Or tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé

$M_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ est donc un fermé de $M_n(\mathbb{R})$

2) Montrons que $\mathcal{L}_n$ n'est pas bornée à l'aide d'un contre exemple:

Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & (0) & 1 \\ 0 & (0) & 0 \end{pmatrix}$$

On a ${}^t M_k = M_k$, donc $M_k \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R})$

Or $M_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} +\infty$, donc $\mathcal{L}_n$ n'est pas

bornée. Par caractérisation des compacts en dimension finie, $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que l'image par P de tout fermé de $\mathbb{C}$, est encore un fermé de $\mathbb{C}$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Considérons $F \subset \mathbb{C}$ et montrons que $P(F) \subset \mathbb{C}$.

Par hypothèse, $F \subset \mathbb{C}$, d'après la caractérisation séquentielle des fermés :

$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, $x_n \xrightarrow{1.1} x' \in \mathbb{C}$, alors $x' \in F$.

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P(F)$ telle que $y_n \xrightarrow{1.1} y \in \mathbb{C}$.

Montrons que $y \in P(F)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in F$, $y_n = P(x_n)$.

- Montrons d'abord que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par l'absurde, supposons : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $|x_n| > M$. (*)

Comme $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y , elle est bornée, i.e.

$\exists M' \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n| < M'$, d'où $|P(x_n)| < M'$.

Par (*), $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Ainsi :

$\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

Par conséquent, $\frac{P(x_{\varphi(n)})}{x_{\varphi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ car P est continu.

Ainsi, on a une contradiction avec (**), toute sous-suite d'une suite convergente converge.

- Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano - Weierstraß : $\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in F$.

Comme $y_n \rightarrow y$, $P(x_n) \xrightarrow{3} y$. Or, par continuité de P ,

$P(x_{\varphi(n)}) \rightarrow P(x) \in P(F)$. (3) nous livre en particulier

$P(x_{\varphi(n)}) \rightarrow y$. Par unicité de la limite, $y = P(x) \in P(F)$.

Ainsi, $P(F) \subset \mathbb{C}$.

□

Léonard

Celle math

Soient K et L deux parties compactes d'un espace vectoriel normé E .
On pose $K+L = \{x+y : x \in K, y \in L\}$. Démontrer que $K+L$ est une partie compacte de E .

Soit $(x_m + y_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (K+L)^{\mathbb{N}}$.

On a $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in K$ compact / $(y_m)_{m \in \mathbb{N}} \in L$ compact :

$\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, $\exists x \in K$ tels que $x_{\varphi(m)} \rightarrow x$
 $(y_{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de L et respecte donc la propriété de Bolzano-Weierstraß :

$\exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $y \in L$ tels que $y_{\varphi(\psi(m))} \rightarrow y$
or $(x_{\varphi(m)})$ est convergente donc en particulier $(x_{\varphi(\psi(m))})$ aussi

Par opérations sur les limites $x_{\varphi(\psi(m))} + y_{\varphi(\psi(m))} \rightarrow x + y \in K+L$

$K+L$ respecte la propriété de Bolzano-Weierstraß : $K+L$ est bien une partie compacte de E

Pauline:

Énoncé:

Soit $(E, \|\cdot\|_1)$ où $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Soit T l'application $E \rightarrow E$ définie par :

$$T(f) = \int_0^x f(t) dt.$$

1) Montrer que $T \in L_c(E, E)$.

2) Soit $f_n \in E$ définie par: $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1}$.

1). Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E$.

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g) &= \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t) dt \\ &= \int_0^x \lambda f(t) + \mu g(t) dt. \end{aligned}$$

par linéarité $\Rightarrow$ de l'intégrale.

$$\begin{aligned} &= \lambda \int_0^x f(t) dt + \mu \int_0^x g(t) dt \\ &= \lambda T(f) + \mu T(g). \end{aligned}$$

• $\forall f \in E$, On cherche $C > 0$, tel que $\|T(f)\|_1 \leq C \|f\|_1$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } \forall f \in E, \|T(f)\|_1 &= \left\| \int_0^x f(t) dt \right\|_1 = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right) dt \\ &\leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1. \end{aligned}$$

On a: $\|T(f)\|_1 \leq 1 \cdot \|f\|_1$.

Ainsi, $T \in \mathcal{L}_c(E, E)$

2) Soit $f_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \|T(f_n)\|_1 &= \left\| \int_0^x f_n(t) dt \right\|_1 \\ &= \int_0^1 \left| \int_0^x f_n(t) dt \right| dt \\ &= \int_0^1 \left| n \int_0^x (1-t)^{n-1} dt \right| dt \\ &= \int_0^1 \left| n \left[-\frac{(1-t)^n}{n} \right]_0^x \right| dt \\ &= |n| \int_0^1 \left| -\frac{(1-x)^n}{n} + \frac{1}{n} \right| dt \\ &= |n| \left[\frac{1}{n} x + \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)} \right]_0^1 \\ &= |n| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1 + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \|f_n\|_1 &= \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 |n(1-t)^{n-1}| dt \\ &= |n| \int_0^1 |(1-t)^{n-1}| dt \\ &= |n| \left[-\frac{(1-t)^n}{n} \right]_0^1 \\ &= |n| \times \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T(f_n)\|}{\|f_n\|} = 1$.

Exercice :

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé et soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ n éléments de E , $n \geq 2$.

On considère la partie A de E définie par :

$$A = \left\{ x \in E \mid \prod_{k=1}^{k=n} \|x - a_k\| = 1 \right\}$$

1. Montrer que l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \prod_{k=1}^{k=n} \|x - a_k\|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En déduire que A est une partie fermée de E .

2. (a) Montrer que : $\forall x \in A, \left\| x - a_1 \right\| \prod_{k=2}^{k=n} \left| \|x - a_1\| - \|a_1 - a_k\| \right| \leq 1$

(b) En déduire que A est bornée.

1) Soit E un $\mathbb{R}$ -evn. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in E^{n \geq 2}$
Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x) = \prod_{k=1}^n \|x - a_k\|$.

Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tq $g(x) = x - a_1$ est continue.

Soit $i \in \{2, \dots, n\}$, $g_i(x) = x - a_i$ est continue.

La norme étant continue car linéaire et 1-lipschitzienne, le produit des normes est continu.

Ainsi f est continue.

De plus, $\{1\}$ est l'image réciproque de A par f . Or $\{1\} \subset \mathbb{R}$
Comme f est continue, $A \subset E$.

2) a) Soit $x \in A$. Soit $k \in \{2, \dots, n\}$.

$$\left| \|x - a_1\| - \|a_1 - a_k\| \right| \leq \| (x - a_1) + (a_1 - a_k) \| \quad \leftarrow \text{inégalité triangulaire}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=2}^n \left| \|x - a_1\| - \|a_1 - a_k\| \right| \leq \prod_{k=2}^n \|x - a_k\|$$

Le produit de normes conserve le sens car ≥ 0

En multipliant par $\|x - a_1\|$ positif :

$$\|x - a_1\| \prod_{k=2}^n \left| \|x - a_1\| - \|a_1 - a_k\| \right| \leq \prod_{k=1}^n \|x - a_k\| = 1 \quad \uparrow \text{ car } x \in A.$$

b) D'après la question précédente,

$$\forall x \in A, \|x - a_1\| \prod_{k=2}^n \left| \|x - a_1\| - \|a_1 - a_k\| \right| \leq 1$$

par multiplication de

la valeur absolue.

$$\|x - a_1\| \prod_{k=2}^n \|x - a_1\| - \|a_1 - a_k\| \leq 1$$

Supposons que a_i sont distincts, $i \in \{1, n\}$,

$$\|x - a_1\| \leq \frac{1}{\left| \prod_{k=2}^n \|x - a_k\| - \|a_1 - a_k\| \right|} \Bigg\} > 0 < 1$$

D'où, $\forall x \in A$, $A \subset B(a_1, 1)$ Donc A est bornée

Bonheur
HP

Énoncé: Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés;

Soit $f: E \rightarrow F$ vérifiant:

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Montrez que si f est continue en 0_E , alors f est linéaire.

Résolution:

Supposons que f est continue en 0_E et montrons que f est linéaire. ie Soit $(x, y) \in E^2$, Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On l'application f vérifie déjà:

$$\text{pour } (x, y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Reste à montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Soit $m \in \mathbb{N}$,

Montrons que " $f(m) = m \times f(1), \forall m \in \mathbb{N}$ ": $P(m)$

Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$,

Initialisation pour $m=0$:

$$f(0_E, 0_E) = 0_F \quad \text{et} \quad 0 \times f(1) = 0_F$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit $m \in \mathbb{N}$, tel que $P(m)$ est vraie montrons que
$$f(m+1) = (m+1) f(1)$$

$$\text{On a: } f(m+1) = f(m) + f(1)$$

On d'après l'hypothèse de récurrence:

$$f(m+1) = m f(1) + f(1) = (m+1) f(1)$$

Donc $P(m+1)$ est vraie, ainsi on a:

$$\forall m \in \mathbb{N}, f(m) = m \times f(1)$$

Soit $m \in \mathbb{Z}_{<0}$,

$$f(\underbrace{-m}_{\in \mathbb{N}}) = -m f(1)$$

$$\begin{aligned} f(m-m) &= f(m) + f(-m) \\ \Leftrightarrow \text{par continuité} & \quad \text{ou par def} \\ &= f(m) - m f(1) \\ \Rightarrow f(m) &= m f(1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(m) = f(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{q \text{ fois}}) = q f\left(\frac{1}{q}\right)$$

$$\text{on } f\left(\frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{2q} + \frac{1}{2q}\right) = 2 f\left(\frac{1}{2q}\right)$$

$$\Rightarrow f(m) = 2q f\left(\frac{1}{2q}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2q}\right) = \frac{1}{2q} f(m)$$

$$\text{Soit } p \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{p \text{ fois}}\right)$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = p f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} f(m)$$

De même pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Ainsi } \forall \lambda \in \mathbb{Q}, \quad f(\lambda) = \lambda f(1)$$

Soit $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
 $\frac{\mathbb{C}^n}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},$

$$f(\lambda) = \lambda f(1)$$

$$\text{Ainsi, } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Valentin

Soient K, L deux parties compactes d'un e.v.m $(E, \|\cdot\|)$. On pose :

$$K + L = \{x + y, x \in K, y \in L\}$$

Démontrer que $K + L$ est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$.

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (K+L)^{\mathbb{N}}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $z_n = x_n + y_n$ avec $x_n \in K$ et $y_n \in L$.

Or la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de K un compact. Par définition il existe une application $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in K$$

De plus $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite appartenant à L , un compact.

De la même façon $\exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$y_{\psi(n)} \rightarrow y \in L$$

Or $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers x par suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Ainsi, par passage à la limite et par convergence de $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$z_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{\in K} + \underbrace{y}_{\in L}$$

Donc l'ensemble $K+L$ est bien compact car il vérifie la propriété de B-W.

Parisse
HP

Exercice. Soient $n \geq 1$ et E_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que $\inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt > 0$.

Soient $m \geq 1$, et $E_m = \{P \in \mathbb{R}_m[X], P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, \text{ avec } a_m = 1\}$

• Montrons que E_m est un fermé. Soit $(P_m) \in E_m$,
tel que $P_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} P$. Comme $\mathbb{R}_m[X]$ est de

dimension finie toutes les normes de cet espace sont
équivalentes on étudie donc la convergence avec la norme
de Markov. On note $\|P\|_\infty = \max_{k \in [0, m]} |a_k|$

$P_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P \Rightarrow \|P_m - P\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$
ie $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \|P_m - P\|_\infty \leq \varepsilon$
ie $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \max_{k \in [0, m]} |a_k - b_k| \leq \varepsilon$
ie $\forall k \in [0, m], 0 \leq |a_k - b_k| \leq \varepsilon$

$P_m = \sum_{k=0}^m b_k x^k \in \mathbb{R}_m[X]$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

$\forall k \in [0, m], 0 \leq |a_k - b_k| \leq \frac{1}{m}$
en particulier pour $k = m$: $0 \leq |1 - b_m| \leq \frac{1}{m}$
Par le lemme d'encadrement $|1 - b_m| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

ie $b_m = 1$
Donc P est un polynôme unitaire, $P \in E_m$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle d'un fermé E_m est
un fermé.

• De plus $\inf_{P \in E_m} \int_0^1 |P(t)| dt \geq 0$ car il s'agit

de l'intégrale d'une fonction positive sur le segment $[0, 1]$ avec $0 \leq 1$,

• Supposons par l'absurde que $\inf_{P \in E_m} \int_0^1 |P(t)| dt = 0$

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on a :

$$\inf_{P \in E_m} \int_0^1 |P(t)| dt = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall P \in E_m \quad 0 \leq \int_0^1 |P(t)| dt \\ \exists (P_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (E_m)^{\mathbb{N}}, \text{ tel que } P_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

car comme E_m est un fermé, la suite $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ doit converger vers une limite appartenant à E_m .

or $0 \notin E_m$, ce n'est pas un polynôme unitaire.
Contradiction.

$$\inf_{P \in E_m} \int_0^1 |P(t)| dt > 0$$

Bilal

EXERCICE 9. — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0_{\mathbb{R}}$, i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in E, \|x\| > r \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

1. Démontrer qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq K$.
2. Posons $M := \sup_{x \in E} |f(x)|$. Démontrer qu'il existe $x_M \in E$ tel que $|f(x_M)| = M$.
3. Soit $m := \inf_{x \in E} |f(x)|$. Existe-t-il nécessairement $x_m \in E$ tel que $|f(x_m)| = m$?

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Soit $x \in E$. On distingue deux cas :

- si $x \in \overline{B(0_E, r)}$.

Il existe $r > 0$ tel que pour toute $x \in \overline{B(0_E, r)}$, $|f(x)| < \varepsilon$.

- si $x \in \overline{B(0_E, r)}$

Comme $\overline{B(0_E, r)}$ est un fermé & borné en dimension finie, c'est un compact.

Comme f est continue, $f(\overline{B(0_E, r)})$ est un compact.

En particulier, $f(\overline{B(0_E, r)})$ est borné.

Finalement, quel que soit le cas, $f(E)$ est borné.

2) On pose $M := \sup_{x \in E} |f(x)|$. Mg. : $\exists x_M \in E$, $|f(x_M)| = M$.

On distingue les cas :

- $f = 0$, donc M est atteint en tout vecteur de E .

- $f \neq 0$, il existe alors $z \in E$ tel que $\varepsilon = |f(z)| \neq 0_{\mathbb{R}}$

Or, on a : $\exists r > 0, \forall x \in E, \|x\| > r \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

On en déduit que si x_n existe, alors $x_n \in \overline{B(0_E, r)}$.

* Or, $\overline{B(0_E, r)}$ est un compact par 1), soit $g: x \mapsto \|f(x)\|$.

Alors, g est continue sur $\overline{B(0_E, r)}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes.

On en déduit qu'il existe $x_n \in \overline{B(0_E, r)}$ tel que :

$$\forall n \in \overline{B(0_E, r)}, g(n) \leq g(x_n).$$

* Montrons que $z \in \overline{B(0_E, r)}$. Par l'absurde, supposons que $z \notin \overline{B(0_E, r)}$.

Il vient : $\|f(z)\| < \|f(z)\|$, ce qui est absurde.

Donc $z \in \overline{B(0_E, r)}$, et donc, $g(z) \leq g(x_n)$

$$\Rightarrow \|f(z)\| \leq \|f(x_n)\|.$$

Finalement, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|f(x_n)\|$.

$$\text{D'où } M = \sup_{x \in E} \|f(x)\| = \|f(x_n)\|.$$

3) En posant $c \mid \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(-\|x\|) \end{cases}$ continue,

on vérifie les hypothèses, mais $m = \inf_{x \in E} \|f(x)\|$ n'est pas atteint.

Exercice. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante : $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \max\{|a_k|; 0 \leq k \leq n\}$.

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire $\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $P \mapsto P(c)$.
Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ?

$$\text{Soit } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$$

$$\text{Soit } c \in \mathbb{R}.$$

On cherche à savoir pour quel $c \in \mathbb{R}$

$$\phi_c : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto P(c) = \sum_{k=0}^n a_k c^k \text{ est continue.}$$

On cherche en fait $k \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $|\phi_c(P)| \leq k \|P\|$.

$$|\phi_c(P)| = |P(c)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |c|^k \leq \|P\| \sum_{k=0}^n |c|^k$$

On, pour que $\sum_{k=0}^n |c|^k \in \mathbb{R}_{>0}$, il faut que $|c| < 1$.

En effet :

$$\bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Si } |c| < 1, \quad \sum_{k=0}^n |c|^k = \frac{1 - |c|^{n+1}}{1 - |c|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - |c|} \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\text{Et donc } \sum_{k=0}^n |c|^k \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} |c|^n = \frac{1}{1 - |c|}$$

$$\bullet \text{ Si } \sum_{k=0}^n |c|^k \text{ converge, alors } |c|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ ce } |c| < 1$$

Finalement, par passage à la limite dans $|\phi_c(P)| \leq \|P\| \sum_{k=0}^n |c|^k$.

$$\bullet \text{ Si } |c| \geq 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n |c|^k = +\infty \notin \mathbb{R}_{>0}$$

$$\bullet \text{ Si } |c| < 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |c|^k = \frac{1}{1 - |c|} \in \mathbb{R}_{>0}$$

Et ainsi, ϕ_c est continue si et seulement si $|c| < 1$

ce $c \in]-1, 1[$ d'après le critère sur les applications linéaires continues.

Margaux

Soit $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. On rappelle

$$\mathcal{O}_m(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \mid MM^T = I_m\}$$

$$SO_m(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

- 1) En considérant le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ démontrer que $\mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$
- 2) En déduire que $SO_m(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} 1) \text{ On considère } & \|\cdot\|_2 \mid \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ & M \mapsto \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} \\ \text{avec } & \langle \cdot, \cdot \rangle \mid \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ & (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^t B) \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est de $\dim < \infty$, $\mathcal{O}_m(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$,
 $\mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ compacte $\Rightarrow \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ bornée et fermée.

* Montrons que $\mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ bornée.

Soit $M \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$

$$\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^t M)} = \sqrt{\text{Tr}(I_m)} = \sqrt{m} \leq m$$

donc $\mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ bornée.

* Montrons que $\mathcal{O}_m(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

Soit $(M_n) \in (\mathcal{O}_m(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tq $M_n \rightarrow A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

Montrons que $A \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$

$$\text{On a } M_n M_n^T = I_m \rightarrow I_m$$

$$\text{On introduit } \varphi \mid \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ bilinéaire} \\ (A, B) \mapsto AB$$

en $\dim < \infty$ donc continue.

$$\varphi(M_n, M_n^T) = M_n M_n^T \rightarrow AA^T = \varphi(A, A^T)$$

Par unicité de la limite, $AA^T = I_m$ d'où $A \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$

Ainsi $\mathcal{O}_m(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Finalement, $\mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ est compacte.

2) On a $SO_m(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et ainsi $SO_m(\mathbb{R})$ est

compacte si et seulement si $SO_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$

$$\det : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{array}$$

est continue car n -linéaire sur les colonnes et $\text{but de dim} < \infty$.

$$SO_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$$

or $\{1\} \subset \mathbb{R}$ donc $SO_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ comme image inverse d'un fermé par une application continue.

Ainsi, $SO_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.