ROBERT
Corentin
MP

Khôlle du 05/11 pour le 09/11

On se place dans $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.

1) Pour $f \in E$, on pose $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N définit une norme sur E.

2) Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On admet que N' définit également une norme sur E. Montrer que les normes N et N' sont équivalentes.

Q1) On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Pour $f \in E$, on pose $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$

Montrons que N définit une norme sur E.

On revient à la définition d'une norme.

$|f(0)| \in \mathbb{R}^+$, $\|f'\|_\infty \in \mathbb{R}^+$ d'où N est définie sur E dans $\mathbb{R}^+$.

Séparation :

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $f = 0$, alors $\|f\| = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose maintenant $\|f\| = 0$.

~~d'où $N(f) = |f(0)|$~~

On a $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$

Or $|f(0)| \geq 0$ et $\|f'\|_\infty \geq 0$.

Une somme de terme positif nul est nul si et seulement si chacun de ses termes est nul.

Or, $\|f'\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup |f'(t)| = 0$

Donc pour tout $t \in [0,1]$, $f'(t) = 0$.

la fonction f est ainsi constante et comme $f(0) = 0$ alors $f(t) = 0$.

Homogénéité :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Montrons que $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty$$

Par homogénéité de la valeur absolue et de la norme infinie

$$= |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \|f'\|_\infty$$
$$= |\lambda| \left(|f(0)| + \|f'\|_\infty \right)$$
$$= |\lambda| N(f)$$

d'où $N(\lambda f) = \lambda N(f)$

Inégalité triangulaire :

Soit $f, g \in E$, Montrons que

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$N(f+g) = |f(0) + g(0)| + \|f' + g'\|_\infty$$

D'après l'inégalité triangulaire de $\|.\|$

$$|f(0) + g(0)| + \|f' + g''\| \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\| + \|g'\|$$

d'où $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$

Donc N est une norme sur E.

2) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Montrons que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$ en supposant que N' est une norme sur E.

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$
$$N(f') = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

$N(f) \leq 1 . N(f')$ car $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$ $\quad (\|f\|_\infty = \sup |f(t)|)$

d'où $\alpha = 1$.

maintenant, trouvons β :

$$|f(0)| + \|f'\|_\infty \geq \beta \left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \right)$$

$$\beta \leq \frac{|f(0)| + \|f'\|_\infty}{\|f\| + \|f'\|_\infty} \leq \frac{\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty}{\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty} = 1$$

ROBERT
Corentin
MP

d'où $B \leq 1$

Posons $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{1}{\lambda} = \beta$.

alors $\frac{1}{\lambda} N(f) \leq N(f) \leq 1 . N(f)$

dans le cas où $\beta = 0$, l'inégalité est également vraie.

Bombardelli
Martin

Exercice Kholle

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|$$

Donner une condition necessaire et suffisante sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$

Cherchons une condition nécessaire :

On suppose que N est une norme : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad N(x) \geq 0$

On prends par example les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qu'on note : $e_1, \dots, e_n$ Soit $k \in [\![1, n]\!]$

On calcule $N(e_k) = a_k > 0$ car N norme, et $e_k \neq (0, 0, \dots, 0)$

et donc $\forall k \in [\![1, n]\!] : a_k > 0$

Montrons que si $\underbrace{\forall k \in [\![1, n]\!] \quad a_k > 0}_{*}$, N est une norme

On suppose $(*)$ alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k |x_k| \geq 0$

$*$ $|.|$ norme

donc $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}^m$

- Mq $N(x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^m}$

$\boxed{\Leftarrow}$ immediate

$\boxed{\Rightarrow}$ $N(x) = 0$: $\sum_{k=1}^{n} a_k |x_k| = 0$ or $\forall k \in [\![1, n]\!], a_k |x_k| \geq 0$

Comme somme de termes nulle égale a 0, positifs, $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad a_k |x_k| \geq 0$

$\forall k \in [\![1, n]\!]\, a_k |x_k| = 0$ or par hypothese $a_k > 0 \Rightarrow |x_k| = 0 \iff x_k = 0$

integrité

- Homogeneité

$$N(\lambda x) = N(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = a_1 |\lambda||x_1| + \dots + a_2|\lambda||x_2|$$

homogeneité de $|.|$

$$= |\lambda| (N(x))$$

- Inegalité triangulaire :

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tq $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$N(x+y) = N((x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)) = a_1 |x_1+y_1| + \dots + a_n |x_n+y_n|$$

$$\leq a_1(|x_1|+|y_1|) + \dots + a_n(|x_n|+|y_n|)$$

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

Ainsi N est une norme si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $a_k > 0$

Aissame On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et on pose pour tout $f \in E$:

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \text{ et } N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$$

1. Démontrer que N_∞ et N_1 sont des normes sur E.

Pour N_∞ :

- Séparation :

$$N_\infty(f) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1], |f(x)| = 0$$

$$\Rightarrow f = 0$$

- homogénéité :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\forall x \in [0,1]$,

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \underbrace{|\lambda| N_\infty(f)}_{\text{indépendant de } x}$$

Par passage au sup :

$$N_\infty(\lambda f) \leq |\lambda| N_\infty(f) \quad (*)$$

Par changement de variable :

$$\lambda \to \frac{1}{\lambda} \qquad f \to \lambda f$$

$$N_\infty(f) \leq \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(f) \quad (**)$$

D'après $(*)$ et $(**)$ par antisymétrie :

$$N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$$

• Inégalité triangulaire :
Soit $f, g \in E$
$\forall x \in [0,1]$
$|f(x)+g(x)| \underset{|\cdot| \text{ est une norme}}{\leqslant} |f(x)| + |g(x)| \leqslant \underbrace{N_\infty(f) + N_\infty(g)}_{\text{indépendant de } x}$

Par passage au sup :

$N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$
Ainsi N_∞ est une norme sur E.
Pour N_1 :
• Séparation :
$N_1(f) = 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(t)| dt = 0$

Or $|f(t)|$ est constante et continue sur $[0,1]$ ainsi,
$\forall t \in [0,1]$
$|f(t)| = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \Rightarrow f = 0$

• Homogénéité :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,
$N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt \underset{\text{linéarité et } |\cdot| \text{ est une norme}}{=} |\lambda| N_1(f)$

• Inégalité triangulaire :
Soit $f, g \in E$,
$N_1(f+g) = \int_0^1 |f(t)+g(t)| dt \underset{\substack{\text{linéarité} \\ |\cdot| \text{ est une norme}}}{\leqslant} \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt = N_1(f) + N_1(g)$

Ainsi N_1 est une norme.

Aissame 2. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leqslant k N_\infty(f)$

$\forall x \in [0,1]$, $f \in E$,

$$|f(x)| \leqslant \underbrace{\sup_{x \in [0,1]} |f(x)|}_{\text{indépendant de } x}$$

L'intégrale est croissante :

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leqslant \int_0^1 N_\infty(f) dx = N_\infty(f)$$

$N_1(f) \leqslant N_\infty(f)$ avec $k = 1$ d'où l'existence.

3. On pose $f_n : x \longmapsto x^n$

$\forall x \in [0,1]$,

$$N_\infty(f_n) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$N_1(f_n) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après la caractérisation séquentielle d'équivalence des normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalente.

Clara

Soit U une partie ouverte et non vide d'un espace vectoriel (E, N). Démontrer que $\text{Vect}(U) = E$

$U \neq \emptyset$

$U \in E \Rightarrow \forall x \in U, \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

Montrons que $E \subset \text{Vect}(U)$ car $\text{Vect}(U) \subset E$ immédiat.

Soit $x \in U$, $\exists \varepsilon > 0$ tq que $B(x, \varepsilon) \subset U \subset \text{Vect}(U)$

Soit $y \in E$.

On pose $z = \frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|} + x$

$\text{Vect}(U)$ est un sous-espace vectoriel de E, et z est une combinaison linéaire d'éléments de $\text{Vect}(U)$.

on obtient donc $\|z - x\| \leq \varepsilon \Rightarrow z \in B(x, \varepsilon) \subset \text{Vect}(U)$.

Montrons que $y \in \text{Vect}(U)$.

$$y = \frac{z - \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\|x\|}\right)x}{\varepsilon} \cdot 2\|y\| = \underbrace{\frac{2\|y\|}{\varepsilon}}_{\text{scalaire}} z - \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\|x\|}\right)}_{\text{scalaire}} x$$

donc y est une combinaison linéaire de $\text{Vect}(U)$, donc $y \in \text{Vect}(U)$.

Finalement, on a $E \subset \text{Vect}(U)$

et donc $E = \text{Vect}(U)$

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Démontrer que N est une norme sur E.

Erem

N étant à valeur dans $\mathbb{R}_+$, verifions les trois propriétés permettant de definir une norme :

* propriété de séparation :

Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$, dans ce cas $N_1(x) = N_2(x) = 0$. Or N_1 et N_2 étant deux normes sur un espace vectoriel E, il y vient $x = 0$.

* propriété d'homogénéité :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$,

$$N(\lambda x) = \max(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x))$$
$$= \max(|\lambda| N_1(x), |\lambda| N_2(x))$$
$$= |\lambda| \max(N_1(x), N_2(x))$$

finalement $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

* Inégalité triangulaire :

Soit $(x,y) \in E^2$,

$$N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \leq N(x) + N(y)$$
$$N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \leq N(x) + N(y)$$

par passage au max, il y vient :

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

d'où N est bien une norme sur E.

Énoncé

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n = \frac{1}{n}X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes?

1. Pour N_1 :

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, D'abord $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ est bien défini car le polynôme n'ayant pas un degré infini, la somme est finie.
Si le polynôme est de degré n, tous les termes d'indice $k \geq n+1$ sont nuls par dérivation $n+1$-ième ...

- $N_1(0) \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |0| = 0$
$\sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(0) = 0$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda P^{(k)}(0)|$
$= |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$
$= |\lambda| N_1(P)$.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,
- $N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)|$
$\leq \sum_{k=0} (|P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|)$
$= \sum_{k=0} |P^{(k)}(0)| + \sum_{k=0} |Q^{(k)}(0)|$
$= N_1(P) + N_1(Q)$.

Pour N_2 :
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$ est bien défini d'après les axiomes de $\mathbb{R}$.

- $N_2(0) \Rightarrow \sup |0| = 0$

$N_2(P) = 0 \Rightarrow \sup_{t \in [-1;1]} |t| \Rightarrow t = 0$ car $|t| \geq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $N_2(\lambda P) = \sup_{t \in [-1;1]} |\lambda P(t)| = \lambda \sup_{t \in [-1;1]} |t|$.

- Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_2(P+Q) = \sup_{t \in [-1;1]} |P(t) + Q(t)|$$
$$\leq \sup_{t \in [-1;1]} (|P(t)| + |Q(t)|)$$
$$\leq \sup_{t \in [-1;1]} (|P(t)|) + \sup_{t \in [-1;1]} (|Q(t)|)$$

2. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par $P_n = \frac{1}{n} \cdot X^n$.

$$N_1(P_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \left(\frac{1}{n} X^n \right)^{(k)} \right| = \frac{1}{n} \times 0^n + \frac{n}{n} \times 0^{n-1} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n} \times n! \times \frac{1}{1}}_{X \text{ dérivé } n \text{ fois}} + \underbrace{0}_{n+1 \text{ fois}}$$
$$= (n-1)! \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

$$N_2(P_n) = \sup_{x \in [0;1]} \left| \frac{1}{n} \cdot x^n \right| = \frac{1}{n} \times 1 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

3. D'après la question 2., $N_1(P_n)$ diverge à l'infini alors que $N_2(P_n)$ converge, les normes ne sont donc pas équivalentes.

Yann

Exercice Khôlle S14 :

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$. On définit N_1, N_2 et N sur E par :

$$N_1(f) = \sup_{[-1,1]} |f|, \quad N_2(f) = |f(0)| + \sup_{[-1,1]} |f'|,$$

$$N_3(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt.$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.

1) Soit $E = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$, $N_1(f) = \sup_{[-1,1]} |f|$

- Séparation : $\boxed{\Leftarrow}$ clair

$\boxed{\Rightarrow}$ $N_1(f) = 0 \Rightarrow \sup_{[-1,1]} |f| = 0$
$\Rightarrow |f| = 0$ (car $|f| \geq 0$)
$\Rightarrow f = 0$

- Homogénéité : Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [-1,1]$,
$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$
$\leq |\lambda| \sup_{[-1,1]} |f|$ (indépendant de x)

Par passage au sup, $\sup_{[-1,1]} |\lambda f| \leq |\lambda| \sup_{[-1,1]} |f|$

En spécialisant : $\left.\begin{array}{l} \lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda} \\ f \leftarrow \lambda f \end{array}\right\} \Rightarrow |\lambda| N_1(f) \leq N_1(\lambda f)$

D'où l'égalité.

- Inégalité triangulaire : Soit $f, g \in E$, $\forall x \in [-1,1]$,
$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$
$\leq \underbrace{\sup_{[-1,1]} |f| + \sup_{[-1,1]} |g|}_{\text{indépendant de } x}$

Par passage au sup,
$N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$

2) Soit $E = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$, $N_2(f) = |f(0)| + \sup_{[-1,1]} |f'|$

- séparation :

$\boxed{\Leftarrow}$ Clair

$\boxed{\Rightarrow}$ $N_2(f) = 0 \Rightarrow |f(0)| + \sup_{[-1,1]} |f'| = 0$

$\Rightarrow |f(0)| = 0$ et $|f'| = 0$ (car $|f| \geq 0$ et $|f'| \geq 0$)

D'où f constante et $f(0)=0$, donc $f=0$.

- Homogénéité : Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N_2(\lambda f) = |(\lambda f)(0)| + \sup_{[-1,1]} |(\lambda f)'|$$
$$= |\lambda|(|f(0)| + \sup_{[-1,1]} |f'|)$$
$$= |\lambda| N_2(f)$$

- Inégalité triangulaire : $f, g \in E$,

$$|(f+g)(0)| + \sup_{[-1,1]} |(f+g)'| \leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{[-1,1]} |f'| + \sup_{[-1,1]} |g'|$$

$$\Rightarrow N_2(f+g) \leq N_2(f) + N_2(g)$$

3) Soit $E = \mathcal{C}^1([-1,1], \mathbb{R})$, $N_3(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)| dt$

- Séparation : $\boxed{\Leftarrow}$ Clair

$\boxed{\Rightarrow}$ $N_3(f) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} |f(t)| dt = 0 \Rightarrow |f| = 0 \Rightarrow f = 0$

- Homogénéité : Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$N_3(\lambda f) = \int_{-1}^{1} |(\lambda f)(t)| dt$$
$$= \int_{-1}^{1} |\lambda| |f(t)| dt$$
$$= |\lambda| \int_{-1}^{1} |f(t)| dt \quad \text{(par linéarité de } \textstyle\int)$$
$$= |\lambda| N_3(f)$$

- Inégalité triangulaire : Soit $f, g \in E$,

$$N_3(f+g) = \int_{-1}^{1} |(f+g)(t)| dt$$
$$= \int_{-1}^{1} |f(t) + g(t)| dt$$
$$\leq \int_{-1}^{1} |f(t)| + |g(t)| dt$$
$$\leq \int_{-1}^{1} |f(t)| dt + \int_{-1}^{1} |g(t)| dt$$
$$\leq N_3(f) + N_3(g)$$

Valentin

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et N définie sur E par :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

1. Montrer que N est une norme sur E
2. Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$

1. Posons $p \left| \begin{array}{l} E \times E \longmapsto E \\ (f,g) \longmapsto \langle f,g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \end{array} \right.$

On remarque que p est une forme bilinéaire, symétrique de plus, étudions $p(f,f) = 0$ alors $f(0)^2 = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$
avec $(f')^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, positive et d'intégrale nulle et ainsi $f' = 0$
donc f est constante et $f(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
Donc f est la fonction nulle.
Finalement p est une forme bilinéaire symétrique définie positive et on remarque que N est la norme associé à ce produit scalaire car $N(f) = \sqrt{p(f,f)}$ donc N est une norme sur E.

2. Soit $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$

alors $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt$
D'après l'inégalité de Cauchy-Swartz :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \sqrt{\int_0^x |f'(t)|^2}\sqrt{\int_0^x 1^2 dt}$$

$$\leq |f(0)| + \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2 dt}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Swartz dans $\mathbb{R}^2$ on a :

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt}\sqrt{(1^2+1^2)}$$

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt}$$

De plus le membre de droite étant indépendant de x, par passage au sup on a:

$$\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\, N(f)$$

Maiva

Exercice de Colle Semaine 8

MP

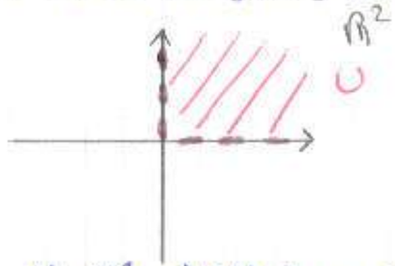
Enoncé : On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

1) Démontrer que $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$

2) Démontrer que $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

---

1) Soit $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$ on peut le représenter :



Montrons que $U \in \mathbb{R}^2$. Mq $\forall (x,y) \in U, \exists r_x > 0, B((x,y), r_x) \subset U$

D'après le schéma, on peut conjecturer : $r_x = \min(x,y)$.

Mq $B((x,y), r_x) \subset U$.

Soit $(a,b) \in B((x,y), r_x)$, Mq $(a,b) \in U$ c'est-à-dire $a > 0$ et $b > 0$.

Or, $(a,b) \in B((x,y), r_x)$ ie $\|(x,y) - (a,b)\|_\infty < r_x$

ie $\|(x-a, y-b)\|_\infty < r_x$

ie $\max(|x-a, y-b|) < r_x$

ie $\begin{cases} |x-a| < r_x \\ |x-b| < r_x \end{cases}$

ie $\begin{cases} a - r_x < x < a + r_x \\ b - r_x < y < b + r_x \end{cases}$

ie $\begin{cases} x - r_x < a < x + r_x \\ y - r_x < b < y + r_x \end{cases}$

Or, $x - r_x = x - \min(x,y)$ et $x \geq \min(x,y)$ par définition

De même $y - r_x = y - \min(x,y)$ et $y \geq \min(x,y)$ par définition

Donc $0 < x - r_x$ et $0 < y - r_x$

ie $a > 0$ et $b > 0$

Donc $(a,b) \in U$

Et ainsi, $U \in \mathbb{R}^2$

2) Soit $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Mq $F \in \mathbb{R}^2$.

Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in F$ tq $(x_n, y_n) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mq $(x,y) \in F$.

Or, on a $((x_n, y_n)) \in F$ donc par continuité de $x \mapsto x^2$:

$x_n^2 + y_n^2 = 1$

Q1, $x_n \to x$ et $y_n \to y$
Toujours par continuité de $x \mapsto x^2$ et par operation sur les limites :

$$x^2+y^2=1$$

D'où $(x,y) \in F$
Donc $F \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Raimbaux
Bastien
MP

Énoncé :

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$

1. Démontrer que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$

2. Démontrer que $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$

Résolution :

1. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\} \subset (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$

Montrons que $U \mathcal{O} (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$

ie Montrons que $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \setminus U \ \mathcal{F} (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$

Soit $((x_n, y_n)) \in ((\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \setminus U)^{\mathbb{N}}$ tels que : $(x_n, y_n) \xrightarrow{\|.\|_\infty} (x,y) \in \mathbb{R}^2$

montrons que $(x,y) \in (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \setminus U$

On a : $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) = (\mathbb{R}, |.|) \times (\mathbb{R}, |.|)$ espace produit

ainsi, $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x$ et $y_n \to y$

Or $((x_n, y_n)) \in ((\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \setminus U)^{\mathbb{N}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0\}^{\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq 0$ ou $y_n \leq 0$

par passage à la limite dans des inégalités larges :

$x \leq 0$ ou $y \leq 0$

D'où $(x,y) \in F$

Donc d'après la caractérisation séquentielle des fermés :

$(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \setminus U \ \mathcal{F} (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$

Donc $U \mathcal{O} (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$

2. Soit $F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^2$

Montrons que $F \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$

ie Soit $((x_n, y_n)) \in F^{\mathbb{N}}$ tels que $(x_n, y_n) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Montrons que $(x,y) \in F$

on sait que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$

De plus, $((x_n, y_n)) \in F^{\mathbb{N}}$,

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n^2 + y_n^2 = 1$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$

$x^2 + y^2 = 1$

Ainsi $(x,y) \in F$

Donc $F \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$

MATHEmymatique
Rayan

EXERCICE 2. — *Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose : $N(P) := \sup_{t\in[0,1]} |P'(t) + P(t)|$. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur E.*

→ Montrons d'abord que cette norme est définie.

- $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P' \in \mathbb{R}[X]$.
- Toutes combinaisons linéaires de polynômes restent un polynôme

Ainsi $(P'+P) \in \mathbb{R}[X]$.

On peut ainsi en prendre le sup et la valeur absolue donc :
$\forall t \in [0;1] \subset \mathbb{R}$, $\sup |P'(t) + P(t)|$ existe.

→ Montrons maintenant que N est une norme :

- Séparation : montrons que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N(P) = 0 \iff P = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ direct

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $N(P) = 0$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$.

Alors $\sup_{t\in[0;1]} |P'(t) + P(t)| = 0$

$\forall t \in [0;1]$ $|P'(t) + P(t)| = 0$

Le polynôme $P' + P$ admet une infinité de racines pour tout $t \in [0;1]$. C'est le polynôme nul.

Or le seul polynôme égal à l'opposé de sa dérivée est le polynôme nul. Donc, $P = 0$. $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N(P) = 0 \Rightarrow P = 0$

- Homogénéité : montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$

$N(\lambda P) = \sup_{t\in[0;1]} |\lambda P'(t) + \lambda P(t)|$

$\forall t \in [0,1], \quad |\lambda P'(t) + \lambda P(t)| = |\lambda (P'(t) + P(t))|$
$= |\lambda| \; |P'(t) + P(t)|$
$\leq |\lambda| \; N(P)$

indépendant de t

Par passage au sup pour tout $t \in [0,1]$.

$$N(\lambda P) \leq |\lambda| \, N(P) \quad (*)$$

On prend $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$ et $P \leftarrow \lambda P$
que l'on applique à l'inégalité précédente $(*)$
pour obtenir $N(\lambda P) \geq |\lambda| \, N(P)$.
Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathbb{R}[X], \quad N(\lambda P) = |\lambda| \, N(P)$.

- Inégalité triangulaire : Montrons que :
$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2, \quad N(P+Q) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |(P_{(t)} + Q_{(t)})' + (P_{(t)} + Q_{(t)})|$

$\forall t \in [0,1] \quad |(P_{(t)} + Q_{(t)})' + (P_{(t)} + Q_{(t)})| = |P'_{(t)} + Q'_{(t)} + P_{(t)} + Q_{(t)}|$

$= |P'(t) + P(t) + Q'(t) + Q(t)|$

$\leq |P'(t) + P(t)| + |Q'(t) + Q(t)|$

$\leq N(P) + N(Q)$

indépendant de t.

Par passage au sup pour tout $t \in [0,1]$

$$N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$$

et ceci pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$
Finalement N est bien une norme sur $\mathbb{R}[X] = F$.

Mathilde

Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $N(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_1+x_2|\}$
1. Montrer que N est une normée sur $\mathbb{R}^2$
2. Représenter la balle unité fermée par cette norme et comparer avec celle de $\|.\|_\infty$

1. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Séparation. Soit $N(x_1, x_2) = 0$ c'est-à-dire que
$$\max\{|x_1|, |x_1+x_2|\} = 0$$
Or on a : $|x_1| \geq 0$ et $|x_1 + x_2| \geq 0$
On a alors forcément $|x_1| = |x_1 + x_2| = 0$ et on en déduit que $x_1 = x_2 = 0$
- Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que :
$$N(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda| N(x_1, x_2).$$
On a $N(\lambda x_1, \lambda x_2) = \max\{|\lambda x_1|, |\lambda(x_1+x_2)|\}$
donc on a :
- soit $N(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda x_1| = |\lambda||x_1|$
- soit $N(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda(x_1+x_2)| = |\lambda||x_1+x_2|$

Dans tous les cas, on a, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
$N(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda| N(x_1, x_2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Inégalité triangulaire : Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On veut montrer que :
$N(x_1+y_1, x_2+y_2) \leq N(x_1, x_2) + N(x_2 y_2)$
On a : $|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1| \leq N(x_1, x_2) + N(y_1, y_2)$
et $|x_1 + y_1 + x_2 + y_2| \leq |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|$
$\leq N(x_1, x_2) + N(y_1, y_2)$

D'où : $N(x_1+y_1, x_2+y_2) \leq N(x_1, x_2) + N(y_1, y_2)$

2. On a :

Exercice. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $N(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty$ et $N'(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.

1. Vérifier que N et N' sont des normes sur E.
2. Démontrer que N et N' sont équivalentes.
3. Sont-elles équivalentes à $||\,.\,||_\infty$?

Frederic

Ex. 1. Soit $f \in E$ tel que : $N(f) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{|f(0)|}_{\leq 0} + \underbrace{||f'||_\infty}_{\leq 0} = 0$$

or $||.||_\infty$ est une norme.

donc $||f'||_\infty = 0 \Rightarrow f' = 0_E \Rightarrow f\ \forall t \in [0,1]$ on a $f(t) = cste$

or $f(0) = 0 \Rightarrow f = 0_E$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, f \in E$: $N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + ||\lambda f'||_\infty$
$= |\lambda| (|f(0)| + ||f'||_\infty)$
$= |\lambda| N(f)$

pour $(f,g) \in E^2$: $N(f+g) = |f(0) + g(0)| + ||f+g||_\infty$

d'après l'égalité triangulaire : $\leq |f(0)| + |g(0)| + ||f||_\infty + ||g||_\infty$

- Donc N est une norme.

Soit $f \in E$ tel que : $N'(f) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{||f||_\infty}_{\geq 0} + \underbrace{||f'||_\infty}_{\geq 0} = 0$$

donc $||f||_\infty = 0$ or $||.||_\infty$ est une norme alors $f = 0_E$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, f \in E$. $N'(\lambda f) = ||\lambda f||_\infty + ||\lambda f'||_\infty$

or $||.||_\infty$ est une norme donc : $= |\lambda|\, ||f||_\infty + |\lambda|\, ||f'||_\infty$
$= |\lambda|\, N'(f)$

Soit $(f,g) \in E^2$ $N'(f+g) = ||f+g||_\infty + ||f' + g'||_\infty$

d'après l'inegalité triangulaire : $\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$

$\leq N'(f) + N'(g)$

donc N' est une norme.

2. on sait que : $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$

$\Rightarrow |f(0)| + \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

$\Rightarrow N(f) \leq N'(f)$

Soit $x \in [0,1]$ tel que : $f(x) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

or $|f(x)| = |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt$

$\leq |f(0)| + \cancel{\int_0^x f(x)\, dt} + \int_0^x \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| dt$

$\leq |f(0)| + \cancel{x f(x)} + x \|f'\|_\infty$

$\|f\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$

$\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq |f(0)| + 2\|f'\|_\infty$

$N'(f) \leq 2N(f)$

~~donc~~ on a alors : $N(f) \leq N' \leq 2 N(f)$
les norme sont equivalent.

3. trouvons si il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :
$\alpha N(f) \leq \|f\|_\infty \leq \beta N(f)$

$\forall n \in \mathbb{R}^{+*}$

~~Soit $f = f_n(x)$~~ ~~$\forall m \in \mathbb{N}$~~, $\forall x \in [0,1]$ avec :

$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

donc $\alpha \left(\left| \frac{0^n}{n} \right| + \left\| \frac{x^{n'}}{n} \right\|_\infty \right) \leq \left\| \frac{x^n}{n} \right\|_\infty \leq \beta \left(\left| \frac{0^n}{n} \right| + \left\| \frac{x^{n'}}{n} \right\| \right)$

$\Rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{n}} \leq \alpha \left\| x^{n-1} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{x^n}{n} \right\|_\infty \leq \beta \left\| x^{n-1} \right\|_\infty$

or x^{n-1} est croissant sur $[0,1]$ donc $\max\limits_{x \in [0,1]} (x^{n-1}) = 1^{n-1} = 1$

de même pour $\frac{x^n}{n}$ donc $\max\left(\frac{x^n}{n}\right) = \frac{1}{n}$

alors : $\alpha \leq \frac{1}{n} \leq \beta$

or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to 0]{} +\infty$ donc il n'existe pas de β tel que $\frac{1}{n} \leq \beta$

alors $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas equivalente or $N' \sim N$
donc $\|\cdot\|_\infty$ et N' ne sont pas equivalente.

Pierre

1

Colle S8.

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ et $p \leq n$

Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|X\| = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right)$$

Montrer que $\| \, \|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n \iff \begin{cases} n = p \\ A \in GL_n(\mathbb{R}) \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i > 0 \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons : $n = p$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i > 0$

. Séparation Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

. Si $u = 0$, $\|u\| = 0$ est clair

. Si $\|u\| = 0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \Big(\underbrace{\alpha_i}_{>0} \underbrace{\Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big|}_{\geq 0} \Big) = 0$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| = 0$$

$\big\rfloor\ \alpha_i > 0\ \forall i \in [\![1,p]\!]$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!]\ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!]\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

$\big\rfloor\ p = n$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ [A\,{}^t u]_i = 0$$

$$\Rightarrow A\,{}^t u = 0$$

$\big\rfloor\ A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow u = 0$$

. <u>Homogénéité</u> Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $u := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\|\lambda u\| = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \lambda x_j \right| \right) \underset{\text{homogénéité de } |\cdot|}{=} |\lambda| \, \|u\|$$

. <u>Inégalité triangulaire</u> Soit $u := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$v := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\|u+v\| = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, (y_j + x_j) \right| \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right| \right)$$

inégalité triangulaire pour $|\cdot|$ $\leq \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right) + \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right) = \|u\| + \|v\|$

d'où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

. <u>Montrons que $n = p$</u>

Par l'absurde, supposons $p < n$.

D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))}_{= n} = \dim(\operatorname{Ker}(A)) + \operatorname{rg}(A)$$

OR $\operatorname{Im}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
d'où $\operatorname{rg}(A) \leq \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) = p < n$.

finalement $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = n - \underbrace{\operatorname{rg}(A)}_{< n} > 0$

Pierre 2

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$

alors $\exists X \in \mathrm{Ker}(A) \setminus \{0\}$. et alors $AX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

on pose $X' = {}^tX = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

De plus $\|X'\| \neq 0$ par séparation.

or,
$$\|X'\| = \sum_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right)$$

or $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{i^{\text{ème}} \text{ colonne de } AX} = 0$ car $AX = 0$

donc $\|X\| = 0$ CONTRADICTION

finalement, $n = p$.

. Montrons que $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Par l'absurde, supposons $A \notin GL(\mathbb{R})$. Alors le rang de A n'est pas maximal, ie $rg(A) < n$ et $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$

De la même manière qu'avant, on obtient une contradiction sur la séparation de la norme. D'où $A \in GL(\mathbb{R})$

. Montrons que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\alpha_i > 0$

Par l'absurde, supposons que : $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, tel que $\alpha_{i_0} \leq 0$

Comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Ainsi, soit $E_{i_0 1} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i_0^{\text{ème}}$ ligne $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$\exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tel que $E_{i_0,1} = AX$.

De plus, $\|X\| = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \underbrace{\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|}_{\delta_{i i_0}} \right) = \overbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i}^{=0} + \alpha_{i_0} \leq 0$

CONTRADICTION avec $\|\cdot\|$ norme (et donc positive) si $\alpha_{i_0} < 0$.

D'où $\alpha_{i_0} = 0$.

Donc $\|X\| = 0$ et $AX = 0$ CONTRADICTION avec $AX = E_{i,1} \neq 0$.

Finalement, $n = p$

$A \in GL_n(\mathbb{R})$

$\forall i \in [\![1,p]\!], \ \alpha_i > 0$

Malaurie

Exercice de colle semaine 8

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées telles que $u_0=0$.

On définit sur E la norme N_∞ : $N(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |U_n|$

On définit également : $N(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |U_{n+1} - U_n|$

① Montrer que N est une norme sur E.

② Montrer que : $\forall\, u \in E$, $N(u) \leq 2N_\infty(u)$ et qu'il existe une suite $u \in E\setminus\{0\}$ telle que $N(u) = 2N_\infty(u)$

③ Montrer que N_∞ et N ne sont pas équivalentes

①* Séparation :

. Soit $u\in E$ tel que $N(u)=0$.

$\forall\ n\in\mathbb{N}\quad 0 \leq |U_{n+1} - U_n| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |U_{n+1}-U_n| = N(u) = 0$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$.

Or $U_0 = 0$, d'où (U_n) est la suite nulle.

. Soit $u = 0_E$. $N(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |0-0| = 0$

* Homogénéité :

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

. Si $\lambda=0$, on a immédiatement $N(\lambda u) = |\lambda| N(u) = 0$.

. Supposons $\lambda\neq 0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$|\lambda U_{n+1} - \lambda U_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplicativité} \\ \text{de la valeur} \\ \text{absolue}}}{=} |\lambda|\,|U_{n+1} - U_n| \leq \underbrace{|\lambda| N(u)}_{\text{indépendant de } n},$$

Par passage au sup sur $n\in\mathbb{N}$, on obtient :

$N(\lambda u) \leq |\lambda| N(u)$

En substituant dans cette inégalité $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$

$u \leftarrow \lambda u$

on obtient : $N(\frac{1}{\lambda} \times \lambda u) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda u)$

On multiplie par $|\lambda|$:

$$|\lambda| N(u) \leq N(\lambda u)$$

Finalement, on a $|\lambda| N(u) = N(\lambda u)$

* Inégalité triangulaire

Soit $(u,v) \in E^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_{n+1} + v_{n+1} - (u_n + v_n)| \underset{\substack{\text{inégalité triangulaire} \\ \text{pour } |\,|}}{\leq} |u_{n+1} - u_n| + |v_{n+1} - v_n| \leq \underbrace{N(u) + N(v)}_{\text{indépendant de } n}$$

Par passage au sup sur $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$N(u+v) \leq N(u) + N(v).$$

Finalement, N est une norme sur E

② * Soit $n \in \mathbb{N}$. $|u_{n+1} - u_n| \underset{\substack{\text{inégalité triangulaire} \\ \text{pour } |\,|}}{\leq} |u_{n+1}| + |u_n| \leq \underbrace{2 N_\infty(u)}_{\text{indépendant de } n}$

Par passage au sup sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient : $N(u) \leq 2 N_\infty(u)$

* Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. $u_0 = 0$ et $|u_n| \leq 1$ d'où $u = (u_n) \in E$.

$N(u) = 2$ et $N_\infty(u) = 1$ d'où $N(u) = 2 N_\infty(u)$.

③ On va utiliser le critère séquentiel, et comme on a déjà des suites, il va s'agir de suites de suites.
On cherche une suite $(u^{(i)})_{i \in \mathbb{N}} = (u_n^{(i)})_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ i \in \mathbb{N}}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge pour une des deux normes mais pas pour l'autre.
Or, par l'inégalité trouvé en question 2, on a : $\forall i \in \mathbb{N}$, $N(u^{(i)}) \leq 2 N_\infty(u^{(i)})$
Ainsi, $N(u^{(i)})$ diverge $\Rightarrow N_\infty(u^{(i)})$ diverge et $N_\infty(u^{(i)})$ converge $\Rightarrow N(u^{(i)})$ converge.
On cherche donc une suite qui converge pour N mais pas pour N_∞.
Par exemple, on peut construire une suite tel que la différence entre deux termes consécutifs soit constante et tel que le plus grand terme tendent vers l'infini en l'infini.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$u_n^{(0)} = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

$u_n^{(1)} = (0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

$u_n^{(2)} = (0, 1, 2, 1, 0, \dots, 0, \dots)$

$\vdots$

Soit $i \in \mathbb{N}$, $u_n^{(i)} = (0, 1, 2, \dots, i-1, i, i-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0, \dots)$

Ainsi, $N(u_n^{(i)}) = 1 \xrightarrow[i \to +\infty]{} 1$ et $N_\infty(u_n^{(i)}) = i \xrightarrow[i \to +\infty]{} +\infty$

Finalement, N et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Julien

Exercice de khôlle
Semaine n°8.

Exercice :

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $\| \ \|_\infty$ et $A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que : $\forall f \in A,\ \| f \|_\infty > 1$.
3. Calculer $\mathrm{d}(0;A)$. On pourra considérer les fonctions f_n définies pour $n \in \mathbb{N}^*$par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in [0;\frac{1}{n}] \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n};1] \end{cases}$$

1) On veut montrer que $A \in E$. On montre plutôt que $A = \overline{A}$:

· On a toujours $A \subset \overline{A}$.

· Montrons donc que $\overline{A} \subset A$:

· Soit $f \in \overline{A}$, donc il existe $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|.\|_\infty} f$;

Alors $\|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |f_n(0) - f(0)| \leqslant \sup_{t \in [0;1]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Par théorème d'encadrement, $f_n(0) - f(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or comme $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $f_n(0) = 0$, donc $f(0) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \left|\int_0^1 f_n(t) - f(t)\, dt\right| \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\, dt$.

Or pour tout $t \in [0;1]$, $0 \leq |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty$, donc par croissance de l'intégrale, on a :

$0 \leq \left|\int_0^1 f_n(t) - f(t) dt\right| \leq \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$\left|\int_0^1 f_n(t) dt - \int_0^1 f(t)\, dt\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt}$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \int_0^1 f_n(t)\, dt$.

Par passage à la limite dans une inégalité large, il vient :
$\underline{1 \leq \int_0^1 f(t)\, dt}$.

On conclut donc que $\underline{f \in A}$, et donc que $\underline{\bar{A} \subset A}$.

Enfin, comme $\underline{A = \bar{A}}$, on en déduit que $\underline{A \subsetneq E}$.

2) Soit $f \in A$, donc :
$f(0) = 0$, $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, $\int_0^1 f(t)\, dt \geq 1$.

On suppose par l'absurde que $\|f\|_\infty \leq 1$, donc :

$\underline{\forall t \in [0;1],\ 0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty \leq 1}$.

De plus, comme $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, on a :
$\underline{f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} f(0) = 0}$

Julien

Exercice de TD (?)
Semaine n°8

Or $f(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ se réécrit par :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \geq 0, \quad |t| \leq \eta \Rightarrow |f(t)| \leq \varepsilon$. (*)

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$, soit $\eta > 0$ tel que (*) soit vérifiée, on a alors :

$$0 \leq \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt = \int_0^\eta \underbrace{|f(t)|}_{\leq \frac{1}{2}}\,dt + \int_\eta^1 \underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|_\infty = 1}\,dt$$

$$= \frac{\eta}{2} + (1-\eta)$$

$$= 1 - \frac{\eta}{2} < 1 \quad (\eta > 0)$$

Or par hypothèse, $f \in A \Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1$, on a donc $1 < 1$, $\oint$.

Ainsi, si $f \in A$, alors $\|f\|_\infty > 1$.

3) On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{F}([0;1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : \left| \begin{array}{l} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in [0;\frac{1}{n}] \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n};1]. \end{cases} \end{array} \right.$$

· Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $(n+1)x \xrightarrow[t \to \frac{1}{n}]{} (n+1) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ ie $f_n(t) \xrightarrow[t \to \frac{1}{n}]{} f_n(\frac{1}{n})$,

donc $f_n \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) = E$.

· Montrons donc que $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

· Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

· $f_n(0) = (n+1) \cdot 0 = 0$

· $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(t)\,dt$

$= \int_0^{\frac{1}{n}} (n+1)t\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{(1+\frac{1}{n})}_{\geq 0}\,dt$

$= \underbrace{(n+1) \cdot \frac{1}{n}}_{\geq 1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^1 (1+\frac{1}{n})\,dt}_{\geq 0 \text{ (l'intégrale est croissante)}} \geq 1$

Ainsi, $f_n \in A$, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in A^{\mathbb{N}}$.

· Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0; \frac{1}{n}]$, $(n+1)t \leq 1 + \frac{1}{n}$.
Donc $f_n(t)$ atteint son maximum de $1 + \frac{1}{n}$ sur $[0,1]$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f_n(t)| = \max_{t \in [0;1]} |f_n(t)| = 1 + \frac{1}{n}$

Or par Q2), on a :
$\forall f \in A$:
$1 \leq d(0;A) \leq \|f\|_\infty$
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq d(0;A) \leq \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
Par théorème d'encadrement, on a enfin $d(0,A) = 1$.

Sirine Exercice Khôlle.

Exercice 3
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit pour $f \in E$ $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.
Vérifier que $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1$ sont deux normes sur E.
Montrer que, pour tout $f \in E$, $||f||_1 \leq ||f||_\infty$.

* $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

- séparation : Soit $f \in E$ tel que $N_\infty(f) = 0$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = 0$$
$$\Rightarrow \forall x \in [0,1], |f(x)| = 0$$
$$\Rightarrow f = 0.$$

- homogénéité : Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
  montrons que $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$.

  - si $\lambda = 0$, c'est vraie.
  - supposons $\lambda \neq 0_\mathbb{R}$.
    Soit $x \in [0,1]$, $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq \overbrace{|\lambda| N_\infty(f)}^{\text{indépendant de } x}$.
    Par passage au sup sur $x \in [0,1]$:
    $$N_\infty(\lambda f) \leq |\lambda| N_\infty(f).$$

    Avec $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$ et $f \leftarrow \lambda f$, il vient.
    $$|\lambda| N_\infty(f) \leq N_\infty(\lambda f).$$
    Par antisymétrie :
    $$N_\infty(\lambda f) = |\lambda| . N_\infty(f)$$

- inégalité triangulaire : Soit $f, g \in E$, soit $x \in [0,1]$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g).$$
passage au sup : $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

Ainsi, N_∞ est une norme sur E.

* séparation : Soit $f \in E$ tel que $\|f\|_1 = 0$.

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(t)|\,dt = 0$$

or $\forall t \in [0;1]$, $|f(t)| \geq 0$ et $|f|$ est continue

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ |f(t)| = 0$$

$$\Rightarrow f = 0.$$

- homogénéité : Soit $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

on a :

$$N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)|\,dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\,dt = |\lambda| . N_1(f).$$

- inégalité triangulaire : Soit $f, g \in E$.

par inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et par linéarité de l'intégrale :

$$N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g).$$

Finalement, N_1 est une norme sur E.

* Soit $f \in E$. On a :

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 N_\infty(f)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad N_1(f) \leq N_\infty(f).$$

Exercice 1 :

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$

Pour $f \in E$, on note :

$N_1(f) = \|f\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f'\|_\infty$

1. Justifier que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E

3. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Émilie

Exercice 2 : Soient $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{C}^n$ et l'application $N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ par $\forall (z, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$N((z, \dots, z_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i |z_i|$$

Donner une CNS pour que N soit une norme

Exercice 1

1) Montrons que E est un sous espace vectoriel de $F = \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$.

- $E \subset F$
- l'application nulle appartient à E car évaluée en 0 elle donne 0 et elle est continue et dérivable sur $[0,1]$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in E^2$. Montrons que $\lambda f + g \in E$. Sur $[0,1]$ $\lambda f + g$ est continue et dérivable car elle est composée de fonction continues et dérivables sur $[0,1]$.

Et par propriété des fonctions, $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$. Ainsi E est stable par combinaison linéaire.

D'après la caractérisation des sous espaces vectorels, E est un sous espace vectorel de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$

2) On revient à la definition

1) • $N_1(0) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |0| = 0$

• Soit $f \in E$, $N_1(f) = 0$.

Alors puisque $\forall x \in [0,1]$ $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$ par théorème d'encadrement on a $\forall x \in [0,1]$ $f(x) = 0$.

Donc f est la fonction nulle. La propriété de séparation est vérifiée

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, montrons que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$

Si $\lambda = 0$ on a bien $0 = 0$.

si $\lambda \neq 0$.

On a $\forall x \in [0,1]$, $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_\infty$. En passant au sup : $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$

En posant $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ et $g = \lambda f$ on obtient :

$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_\infty \Rightarrow |\lambda| \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$

Par antisymétrie on a $|\lambda| \|f\|_\infty = \|\lambda f\|_\infty$

- Soit $(f,g) \in E^2$

On a $\forall x \in [0,1]$ $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ par inégalité triangulaire

$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ → ne dépend pas de x

En passant au sup : $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

N_1 est donc une norme

2) . $N_2(0) = 0$

. Soit $f \in E$, $N_2(f) = 0$. Alors puisque

$\forall x \in [0,1]$, $0 \leq |f'(x)| \leq \|f'\|_\infty = 0$

On a $f'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1]$ $f(x) = c^{te}$ Or $f \in E$

Donc on a $f(0) = 0 = c^{te}$ Ce qui veut dire que $\forall x \in [0,1]$

$f(x) = 0$. f est donc la fonction nulle.

. Puisque $\|\cdot\|_\infty$ vérifie la propriété d'homogénéité et que la dérivée est linéaire, si on prend $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$

on $N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f)$

. ~~De même $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité triangulaire~~

$\forall (f,g) \in E^2$, $x \in [0,1]$:

$|f'(x) + g'(x)| \leq |f'(x)| + |g'(x)|$ inégalité triangulaire

$\leq N_2(f) + N_2(g)$ sur $[\cdot]$

En passant au sup : $N_2(f+g) \leq N_2(f) + N_2(g)$.

N_2 est donc une norme.

3) Si N_1 et N_2 étaient équivalentes toute suite de E tendant vers 0 pour N_1 tendrait vers 0 pour N_2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

En posant $f_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \to 1 + \frac{x}{n} \end{array} \right.$. $f_n \in E^{\mathbb{N}}$

Puisque f_n est continue sur un segment elle est bornée et atteint ses bornes $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ est atteint.

On a $N_1(f_n) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

$f_n \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ elle est dérivable.

Puisque $\forall x \in [0,1]$ $f_n'(x) = +\frac{1}{n}$

Emilie $N_2(f_n) = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

D'où N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

~Fin~

Benjamin

Khôlle semaine n° 8

Exercice :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et F un s.e.v. de E.

(a) Montrer que $\overline{F}$ est un s.e.v. de E.

(b) On suppose $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Montrer que $F = E$.

2. Sur $\mathbb{R}^2$, on définit $N(x_1\,;x_2)$ par :

$$N(x_1\,;x_2) = \sup_{t\in[0;1]} |x_1 + tx_2|$$

(a) Montrer que : $N(x_1\,;x_2) = \max(|x_1|, |x_1 + x_2|)$.

(b) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Tracer la boule fermée unité pour N.

Exercice 1 :

a) • $0_E \in F$ car F sous-espace vectoriel de E et $F \subset \overline{F}$.

Donc $0_E \in \overline{F}$

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in \overline{F}$

Alors,

$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{\|.\|} x$

$\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \xrightarrow{\|.\|} y$

Ainsi :

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda x_n + y_n \in F$ (car sous-espace vectoriel)

donc $(\lambda x_n + y_n) \in F^{\mathbb{N}}$

• Par opération sur les limites : $\lambda x_n + y_n \to \lambda x + y$

Ainsi, $\lambda x + y \in \overline{F}$

On en conclut que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Supposons que $\mathring{F} \neq \emptyset$:

$\exists x \in \mathring{F}$

Or $\mathring{F}$ est ouvert donc :

$\exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \subset \mathring{F} \subset F$

$\boxed{\subset}$ $F \subset E$ immédiat

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in E$.

- Si $x = y$: $y \in F$
- Si $x \neq y$:

On pose $z = x + \frac{x-y}{\|x-y\|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$

Alors : $\|z - x\| = \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} \frac{\varepsilon}{2} \right\| \overset{\text{homogénéité}}{=} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Donc $z \in B(x, \varepsilon) \subset F$

Or, $y = \underbrace{x}_{\in F} - \underbrace{(z - x)}_{\in F} \frac{2}{\varepsilon} \|x-y\|$

Donc par stabilité par combinaisons linéaires, $y \in F$ et $E \subset F$.

<u>On en conclut que $E = F$.</u>

<u>Exercice 2.</u>

a) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto x_1 + t x_2 \end{array} \right.$

f dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(t) = x_2$

- Si $x_2 \geq 0$:

t	0	1
f	x_1 $\nearrow$	$x_1 + x_2$

- Si $x_2 \leq 0$:

t	0	1
f	x_1 $\searrow$	$x_1 + x_2$

Donc dans tous les cas, $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| = \max(|x_1|, |x_1+x_2|)$.

Ainsi, $\underline{N(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_1+x_2|)}$

b) • $N(0,0) = 0$

* Soit (x_1, x_2) tel que $N(x_1, x_2) = 0$:

$\max(|x_1|, |x_1+x_2|) = 0$

$\Rightarrow |x_1| = |x_1+x_2| = 0$

$\Rightarrow 0 = x_1$ et $x_1 + x_2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

Ainsi, $(x_1, x_2) = 0$

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$N(\lambda(x_1,x_2)) = N(\lambda x_1, \lambda x_2) = \max(|\lambda x_1|, |\lambda x_1 + \lambda x_2|)$

Or,

* Si $N(x_1,x_2) = |x_1|$:

$|x_1| \geq |x_1+x_2| \Rightarrow |\lambda||x_1| \geq |\lambda||x_1+x_2|$

$\Rightarrow |\lambda x_1| \geq |\lambda x_1 + \lambda x_2|$

Donc $N(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda x_1| = |\lambda| N(x_1, x_2)$

* Si $N(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$:

$|x_1+x_2| \geq |x_1| \Rightarrow |\lambda x_1 + \lambda x_2| \geq |\lambda x_1|$

Alors $N(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda x_1 + \lambda x_2| = |\lambda| N(x_1, x_2)$

Dans tous les cas, $N(\lambda(x_1,x_2)) = |\lambda| N(x_1,x_2)$

• Soient $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, inégalité triangulaire,

$\forall t \in [0,1], \ |x_1 + tx_2 + y_1 + ty_2| \leq |x_1+tx_2| + |y_1+ty_2|$

$\leq N(x_1,x_2) + N(y_1,y_2)$

↳ indépendant de t

Par passage au sup sur t :

$N((x_1+y_1, x_2+y_2)) = N((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) \leq N(x_1,x_2) + N(y_1,y_2)$

Ainsi, <u>N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.</u>

c) $\bar{B}(0,1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ N(x_1,x_2) \leq 1\}$

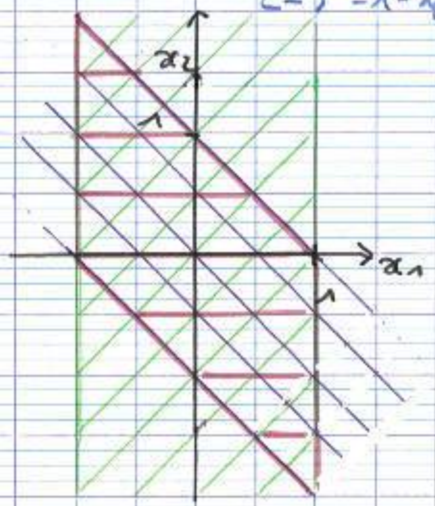
$= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \max(|x_1|, |x_1+x_2|) \leq 1\}$

$= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ |x_1| \leq 1 \text{ et } |x_1+x_2| \leq 1\}$

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$|x_1+x_2| \leq 1 \iff -1 \leq x_1+x_2 \leq 1$

$\iff -1-x_2 \leq x_1 \leq 1-x_2$



$|x_1| \leq 1$

$|x_1+x_2| \leq 1$

$\bar{B}(0,1)$

Clarisse

Khôlle semaine 8

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{C})$. Pour tout $f \in E$, on pose $N(f) = |f(0)| + \sup_{[0,1]} |f'|$

1) Montrer que N est une norme sur E.
2) Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
3) Ces deux normes sont-elles équivalentes?

1) Soit $f \in E$, f est dérivable et de dérivé continue sur $[0,1]$, $\sup_{[0,1]} |f'|$ est bien définie. La norme N est alors définie.

- Soit $f \in E$, tel que $f = 0_E \Rightarrow N(f) = 0$.
Soit $f \in E$, $N(f) = 0$

$\Leftrightarrow |f(0)| + \sup_{[0,1]} |f'| = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in [0,1], f'(t) = 0$ et $f(0) = 0$.

$\Leftrightarrow \forall t \in [0,1], f(t) = k$, $k \in \mathbb{C}$

$f(t) = f(0) = 0$

Ainsi $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0_E$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in E$,

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \sup_{[0,1]} |\lambda f'| = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \sup_{[0,1]} |f'|$$

car $\sup_{[0,1]} |f'| = \|f'\|_\infty$ par homogeneité de la norme $\|\cdot\|_\infty$

Soient $f, g \in E^2$

$$N(f+g) = |(f+g)(0)| + \sup_{[0,1]} |f' + g'|$$

$$N(f+g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{[0,1]} |f'| + \sup_{[0,1]} |g'|$$

Par inégalité triangulaire de la valeur absolue et de la norme $\|\cdot\|_\infty$

D'où $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$

2) D'après le théorème fondamental de l'analyse
$\forall t \in [0,1]$

$$\int_0^t |f'| = |f(t)| - |f(0)| \leq \int_0^1 |f'| \leq \int_0^1 \sup |f'|$$

D'où

$$\int_0^t |f'| \leq \sup_{t \in [0,1]} |f'|$$

$$|f(t)| \leq \underbrace{|f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'|}_{\text{indépendant de } t} = N(f)$$

et par passage à la borne supérieur on a :

$$\|f\|_\infty \leq N(f)$$

soit $n \geq 0$ $n \in \mathbb{N}$

3) On pose $f_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right.$ $f_n \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0_E$$

$$N(f_n) = |f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 0 + 1 \cancel{\xrightarrow[n \to +\infty]{}} 0$$

On a une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 au sens de $\|\cdot\|_\infty$ mais pas au sens de N, les deux normes ne sont pas équivalentes

Léonard Colle maths

Soit $p \geq 2$
1) Montrer que $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$
2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer alors que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.

1) Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ muni de $\|.\|$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$,
$\|M\| = \max\limits_{1 \leq j \leq p} \left(\sum\limits_{i=1}^{p} |[M]_{i,j}| \right)$

On cherche à utiliser la caractérisation séquentielle.
Soit donc $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$
On pose, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi(\lambda) = \det(\lambda I_p - M)$

χ est un polynôme non nul et possède ici au maximum p racines que l'on note ici $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ où $q \in \mathbb{N}$, $q \leq p$

Or si $\chi(\lambda)$ est non nul, $\lambda I_p - M$ est inversible.

$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N$, $\frac{1}{n} < \min(|\lambda_0|, \dots, |\lambda_q|)$ (par passage à la limite)

Ainsi $\forall n \geq N$, $\chi(\frac{1}{n})$ est différent de 0 donc $\frac{1}{n} I_p - M$ est inversible

Donc $M - \frac{1}{n} I_p$ est inversible. On peut donc poser $M_n = M - \frac{1}{n} I_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$
$\forall n \in \mathbb{N}$, M_n est inversible et $\|M_n - M\| = \frac{1}{n} \|I_p\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi $M_n \xrightarrow{\|.\|} M$ Par caractérisation séquentielle, $GL_p(\mathbb{R})$ est ~~dense~~ dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $A \in$ ~~$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$~~ $GL_n(\mathbb{C})$

$\lambda \neq 0$

On a $\chi_{AB} = \det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda AA^{-1} - AB) = \det(\lambda A(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}B))$

$\chi_{AB} = \lambda^n \det(A)\det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}B) = \lambda^n \det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}B)\det(A)$

$\chi_{AB} = \lambda^n \det(A^{-1}A - \frac{1}{\lambda}BA) = \det(\lambda I_n - BA)$

$\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\overline{GL_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que $A_k \longrightarrow A$.

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_{A_kB} = \chi_{BA_k}$

ie $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} [\lambda I_n - A_kB]_{j,\sigma(j)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} [\lambda I_n - BA_k]_{j,\sigma(j)}$

Comme ce sont des expressions polynomiales en les coefficients de la matrice, on peut passer à la limite quand $k \to +\infty$

On obtient donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le résultat est donc prouvé).

Margaux

Soit $(E, \| \|)$ un evn.

1) Mq $\forall x, y \in E$, $\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$

2) En déduire $\|x\|+\|y\| \leq 2 \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$

3) La constante 2 peut-elle être améliorée ?

4) On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Mq $\forall x, y \in E$, $(\|x\|+\|y\|)^2 \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

5) En déduire que $\|x\|+\|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$

6) La constante $\sqrt{2}$ peut-elle être améliorée ?

1) Soit $x, y \in E$.

$$2\|x\| = \|2x\| = \|x - y + y + x\|$$
$$\leq \|x-y\| + \|x+y\|$$

d'où $\|x\| \leq \frac{1}{2}(\|x-y\| + \|x+y\|)$

de même, $\|y\| \leq \frac{1}{2}(\|x-y\| + \|x+y\|)$

et ainsi,

$$\boxed{\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|}$$

2) Si $\|x+y\| \geq \|x-y\|$,

$\|x\| + \|y\| \leq 2\|x+y\|$

Si $\|x-y\| \geq \|x+y\|$,

$\|x\| + \|y\| \leq 2\|x-y\|$

et ainsi,

$$\boxed{\|x\|+\|y\| \leq 2 \max(\|x+y\|, \|x-y\|)}$$

3) La constante 2 ne peut pas être améliorée. En effet, avec l'evn $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$ et les vecteurs, $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$,

$\|x\|_\infty + \|y\|_\infty = 1+1 = 2$

$2\max(\|x+y\|_\infty, \|x-y\|_\infty) = 2 \times 1 = 2$ donc 2 est atteint.

Il ne peut donc pas être réduit.

4) Soit $x, y \in E$. Soit $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalaire.

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$

d'où

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

et ainsi,

$$\boxed{(\|x\|+\|y\|)^2 \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}$$

5) On a

$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2 \max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$

et ainsi,

$$\boxed{\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x+y\|, \|x-y\|)}$$

6) La constante $\sqrt{2}$ ne peut pas être améliorée.

Sur $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2)$, avec $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$,

$\|x\|_2 + \|y\|_2 = 1 + 1 = 2$

$\sqrt{2} \max(\|x+y\|, \|x-y\|) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

donc la constante est atteinte, elle ne peut pas être réduite.

Colle numéro 8

PAUL

Exercice 1 : Pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$, on définit

$$f_n : \begin{vmatrix} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x} \end{vmatrix}$$

Et Pour tout $x\epsilon[1,+\infty[$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

Soit $E = \mathcal{B}([1,+\infty[,\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \quad \|_\infty$

1. Montrer que pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$, $S_n \in E$

2. Etudier la convergence de la suite $(S)_n$ dans $(E, \| \quad \|_\infty)$

1) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in E$, c'est à dire que la suite de fonction S_n est bornée

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1,+\infty[$, on a :

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right|$$

$$\text{inégalité triangulaire} \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \|f_n\|_\infty$$

or si on regarde pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [1,+\infty[$, on a :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n+1} \quad (\text{indépendant de } x)$$

Donc par passage au sup sur $x \in [1,+\infty[$, on a :

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc finalement,

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_n\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

Donc finalement la serie de fonction S_n est bornée. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in E$.

2) Montrons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|.\|_\infty)$
Soit $x \in [1, +\infty[$ fixé, on note alors

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \times f_{n+1}(x) \leq 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad |f_n(x)| = \dfrac{1}{n+x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad |f_{n+1}(x)| - |f_n(x)| = \dfrac{1}{n+1+x} - \dfrac{1}{n+x} \leq 0$

car $n+1+x > n+x$, $x \in [1, +\infty[$ fixé.
Donc la suite $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. D'après le critère spécial des series alternées, la serie $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour x fixé.
On note sa somme S,
D'après le critères on a l'inégalité, pour $x \in [1, +\infty[$

$$0 \leq |S(x) - S_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+x}$$

$$\leq \frac{1}{n+1}$$

Donc par passage au sup sur $x \in [1, +\infty[$, on a,

$$0 \leq \|S - S_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc par théoreme d'encadrement, on en déduit que :

$$S_n \xrightarrow{\|.\|_\infty} S$$

Rose

Colle 58

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p,q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$

et $\|X\|_q = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}$

1) Établir que pour tous $a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (Young)

2) En déduire que pour tous $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$,

$\sum_{k=1}^n |x_k||y_k| \leq \|X\|_p \|Y\|_q$ (Hölder)

3) Montrer alors que $\|.\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$

Soient $p,q > 1$

1) Soient $a, b \geq 0$. Comme $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
avec $b > 0$

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) = \ln\left(\frac{1}{p} a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right) b^q\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)$$
$$= \ln(a) + \ln(b)$$
$$= \ln(ab)$$

Et par croissance de $x \mapsto e^x$, on a

$$\forall p,q > 1, \forall a \geq 0, \forall b > 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2) Montrons que : $\forall X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{k=1}^n |x_k||y_k| \leq \|X\|_p \|Y\|_q$

- Pour $X = 0_{\mathbb{R}^n}$ ou $Y = 0_{\mathbb{R}^n}$

On a : $0 \leq 0$ et l'inégalité est vérifiée.

- Pour $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $Y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on a :

Soit $k \in [\![1, n]\!]$

$$\frac{|x_k|}{\|X\|_p} \cdot \frac{|y_k|}{\|Y\|_q} \leq \frac{|x_k|^p}{p\|X\|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q\|Y\|_q^q}$$

En sommant pour k allant de 1 à n :

$$\frac{1}{\|X\|_p \|Y\|_q} \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |y_k| \leq \frac{1}{p\|X\|_p^p} \underbrace{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}_{\|X\|_p^p} + \frac{1}{q\|Y\|_q^q} \underbrace{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}_{\|Y\|_q^q}$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Et finalement, $\sum_{k=1}^{n} |x_k| \, |y_k| \leq \|X\|_p \, \|Y\|_q$.

Et ainsi l'inégalité de Hölder est vraie pour tout $X, Y \in \mathbb{K}^n$.

3) Montrons que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

. $\|0_{\mathbb{K}^n}\|_p = 0$

De plus, si on considère $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\|X\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|x_k|^p}_{\geq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!], \ |x_k|^p = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!], \ |x_k| = 0 \quad \text{ie } x_k = 0$$

D'où $X = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Et $\|.\|_p$ vérifie l'axiome de séparation.

. Soient $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\|\lambda X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} = |\lambda| . \|X\|$$

Et $\|.\|_p$ est homogène.

. Soient $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

Montrons que $\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$. On a :

$\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ par inégalité triangulaire sur la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

De plus, $|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k| . |x_k + y_k|^{p-1}$.

Ainsi :

$$(\|X+Y\|_p)^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| . |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k| . |x_k + y_k|^{p-1}$$

$$\leq \|X\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k + y_k|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q} + \|Y\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k + y_k|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}$$

d'après 2)

Or on sait que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow q=\frac{p}{p-1}$, et donc :

$$(\|X+Y\|_p)^p \leq \|X\|_p \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p}_{(\|X+Y\|_p)^p}\Big)^{1/q} + \|Y\|_p \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p}_{(\|X+Y\|_p)^p}\Big)^{1/q}$$

$$= (\|X\|_p + \|Y\|_p)\,(\|X+Y\|_p)^{p/q}$$

$$\Leftrightarrow (\|X+Y\|_p)^{p-\frac{p}{q}} \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Or $p-\frac{p}{q} = p\left(1-\frac{1}{q}\right) = p\cdot\frac{1}{p} = 1$, d'où finalement :

$$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Et ainsi $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire.
Donc $\|.\|_p$ est bien une norme sur $\mathbb{K}^n$.

David

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{C})$. Pour tout $f \in E$, on pose :
$$N(f) = |f(0)| + \sup_{[0,1]} |f'|$$
1/ Montrer que N est une norme sur E.
2/ Montrer que : $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq N(f)$.
3/ Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

1/ On montre que f vérifie ces 3 points :

* Séparation : soit $f \in E$.
$$N(f) = 0 \Rightarrow \underbrace{|f(0)|}_{\geq 0} + \underbrace{\sup_{[0,1]} |f'|}_{\geq 0} = 0$$
donc $f(0) = 0$ et,
$$\sup_{[0,1]} |f'| = \underbrace{-|f(0)|}_{\leq 0}$$
donc $|f'| = 0 \Leftrightarrow f' = 0$
$$\Rightarrow f \text{ est constante}$$
Or, f est nulle en 0 et constante,
$$f = 0$$

* Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.
$$|\lambda f(0)| + |\lambda f'| = |\lambda|(|f(0)| + |f'|)$$
$$\leq |\lambda| N(f)$$
Par passage au sup sur $[0,1]$,
$$N(\lambda f) \leq |\lambda| N(f).$$
En spécialisant $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$ et $f \leftarrow \lambda f$, on a :
$$N(f) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda f)$$
$$\Rightarrow |\lambda| N(f) \leq N(\lambda f)$$
Par antisymétrie, $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
De plus, pour $\lambda = 0$, cela est vrai (trivial).

* Inégalité triangulaire : soit $(f,g) \in E^2$,

$$|f+g| + |(f+g)'| = |f+g| + |f'+g'|$$
$$\leq |f| + |f'| + |g| + |g'|$$
$$\leq N(f) + N(g)$$

Par passage au sup sur $[0,1]$:

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g)$$

2/ $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty := \sup_{[0,1]} |f|$

$\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

Par passage à la valeur absolue et par inégalité triangulaire,

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right|$$
$$\leq |f(0)| + \int_0^x \underbrace{|f'(t)|}_{\leq \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|} dt$$
$$\leq |f(0)| + x\left(\sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|\right)$$
$$|f(x)| \leq |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

Par passage au sup sur $[0,1]$,

$$\|f\|_\infty \leq N(f)$$

3/ Soit $f \in E$, $f : x \longmapsto x^n$

$$N(f) = \sup_{[0,1]} |n x^{n-1}| = n \text{ et } \|f\|_\infty = 1$$

Supposons (*) : $\dfrac{N(f)}{\|f\|_\infty} \leq \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Or, $\dfrac{N(f)}{\|f\|_\infty} = n \longrightarrow +\infty$

donc (*) est fausse $\Rightarrow$ N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Laetitia

EXERCICE 2. — Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose : $N(P) := \sup_{t\in[0,1]} |P'(t) + P(t)|$. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

. Existence :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

Le polynôme $P'+P$ est continu sur $[0;1]$.

Par le théorème de l'image continue d'un compact, le polynôme $P'+P$ est borné sur $[0;1]$.

En posant $B = \{ |P'(t)+P(t)|, t \in [0;1]\}$, on a :

B est un ensemble non vide et borné. Par le théorème de la borne supérieure, $\sup(B)$ existe $\Rightarrow N(P)$ existe.

. Positivité :

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\forall t \in [0;1]$, $|P'(t)+P(t)| \geq 0$

0 ne dépend pas de t. Par passage au sup,

$N(P) \geq 0$.

. Séparation :

. $N(0_{\mathbb{R}[X]}) = 0$

. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $N(P) = 0 \Rightarrow \sup_{t\in[0;1]} |P'(t)+P(t)| = 0$

$\Rightarrow \forall t \in [0;1]$, $0 \leq |P'(t)+P(t)| \leq 0$

$\Rightarrow \forall t \in [0;1]$, $P'(t)+P(t) = 0$

$\Rightarrow P'+P = 0$.

Si P n'est pas constant, $\deg(P') = \deg(P-1)$.

Or $P' = -P \Rightarrow \deg(P') = \deg(P)$ ↯

D'où P est constant. Dans ce cas, $P' = 0$

$\Rightarrow P = 0$

. Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$.

$N(\lambda P) = \sup_{t \in [0,1]} |\lambda P'(t) + \lambda . P(t)|$

Soit $t \in [0,1]$ $|\lambda P'(t) + \lambda . P(t)| \leq |\lambda||P'(t)| + |\lambda| . |P(t)|$

$\leq |\lambda| . N(P)$.

Par passage au sup, comme $|\lambda| . N(P)$ ne dépend pas de t :

$N(\lambda P) \leq |\lambda| N(P)$.

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$, $P \leftarrow \lambda P$

On obtient alors $|\lambda| . N(P) \leq N(\lambda P)$, encore vrai si $\lambda = 0$

Par antisymétrie, $N(\lambda P) = |\lambda| . N(P)$,

. Inégalité triangulaire :

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

Soit $t \in [0,1]$.

$|(P+Q)'(t) + (P+Q)(t)| \leq |P'(t) + P(t)| + |Q'(t) + Q(t)|$

$\leq N(P) + N(Q)$.

Par passage au sup, comme $N(P) + N(Q)$ ne dépend pas de t :

$N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$.

Finalement, N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Pauline

Énoncé :

Pour tout $A \in M_p(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| := \sqrt{Tr(A^T A)}$.
Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur $M_p(\mathbb{R})$.

On pose :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \;\Big|\; \begin{array}{ccc} M_p^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (A, B) & \longmapsto & Tr(A^T B) \end{array}$$

montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire.

- Montrons que, pour tout $A \in M_p(\mathbb{R})$, $\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow A = 0$.

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$, tel que : $\langle A, A \rangle = 0$.

Or, $\forall (i, j) \in [\![1 ; p]\!]^2$:

$$[A^T A]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a'_{ik} a_{kj}.$$

De plus, $[A^T]_{ij} = a'_{ij} = a_{ji} = [A]_{ji}$
et ceci pour tout $(i, j) \in [\![1 ; p]\!]^2$.
Ainsi : $\forall (i, j) \in [\![1 ; p]\!]^2$

$$[A^T A]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ki} a_{kj}.$$

Donc, $Tr(A^T A) = \sum_{i=1}^{p} [A^T A]_{ii}$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ki}^2$$

$\Rightarrow \forall (i, k) \in [\![1, p]\!]^2$:
$a_{ki}^2 = 0$

$\Rightarrow \forall (i, k) \in [\![1, p]\!]^2$: $a_{ki} = 0$.

Ainsi, $A = 0$.

- De plus, $\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ki}^2 \geq 0$.

- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B, C \in M_p(\mathbb{R})$.

Par linéarité de la trace et de la transposée on a :
$\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle$

et $\langle A, \lambda B + \mu C \rangle = \lambda \langle A, B \rangle + \mu \langle A, C \rangle$

- Montrons que, pour tout $(A, B) \in M_p^2(\mathbb{R})$
$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$.

Or, $\langle A, B \rangle = Tr(A^T B) = Tr((A^T B)^T)$
$= Tr(B^T A)$
$= \langle B, A \rangle$

Ainsi, on a montré qu'il s'agissait bien d'un produit scalaire sur $M_p(\mathbb{R})$.
Ainsi, la norme définit pour tout $A \in M_p(\mathbb{R})$ par $\|A\| = \sqrt{Tr(A^T A)}$
est bien une norme sur $M_p(\mathbb{R})$, comme norme associée à un produit scalaire.

Mathias

Banque d'exercices

Soit $p \geq 2$.

1. Montrer que $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $M_p(\mathbb{K})$
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, les polynômes caractéristiques χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.

---

1. D'après la caractérisation séquentielle de la densité, $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $M_p(\mathbb{K})$.
$\iff \forall M \in M_p(\mathbb{K}), \exists (M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (GL_p(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}, M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} M$.

Avec pour tout $M \in M_p(\mathbb{K})$, $\|M\|_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |[M]_{ij}|$.
Soit $M \in M_p(\mathbb{K})$.
On cherche $M_n \in (GL_p(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ telle que $\|M_n - M\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} 0_{\mathbb{R}}$
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$M_n = M - \frac{1}{n} I_p$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\|M_n - M\|_\infty = \left|-\frac{1}{n}\right| \|I_p\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} 0_{\mathbb{R}}$.

Reste donc à montrer l'inversibilité de M_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, M_n est inversible $\iff \det(M_n) \neq 0$

Or $\chi(M) = \det(M - \lambda I_p)$ a un nombre fini de racines k; $\mathrm{Spec}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ avec $k \leq p$)
$(\lambda_i)_{1\leq i\leq k} \in \mathbb{K}^k$ de sorte qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} \neq (\lambda_i)_{1\leq i\leq k}$

$\underbrace{\det\left(M - \frac{1}{n} I_p\right)}_{M_n} \neq 0 \implies M_N \in GL_p(\mathbb{K})$.

Ainsi, $(M_n)_{n\geq N} \in (GL_p(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $M_p(\mathbb{K})$.

2. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$, montrons que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi(AB) = \chi(BA)$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\begin{cases} \chi(AB) = \det(AB - \lambda I_n) \\ \chi(BA) = \det(BA - \lambda I_n). \end{cases}$

Supposons que B soit inversible i.e. il existe $B^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $BB^{-1} = I_n$.

Ainsi, $\chi(AB) = \det(AB - \lambda I_n) = \det(I_n) \times \det(AB - \lambda I_n)$

$= \det(BB^{-1}) \times \det(AB - \lambda I_n) = \det(B) \times \chi(AB) \times \det(B^{-1})$

$= \det(B(AB - \lambda I_n)B^{-1}) = \det(BA - \lambda I_n) = \chi(BA)$

D'après la question 1, les matrices inversibles sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$. De plus $\chi : (M_n(\mathbb{C}))^2 \to \mathbb{C}[X]$ continue, en effet : χ_{AB} est un polynôme de dimension finie $p \leq n$ dont les coefficients sont des polynômes en les coefficients de AB, qui sont continus. Par prolongement d'identité, $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$, $\chi(AB) = \chi(BA)$.

Bital

Exercice 3
Pour tout $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit $N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}$.
Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Montrons que N est issue d'un produit scalaire.

On pose $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & ac + ad + bc + 5bd \end{array} \right.$

Montrons que φ est un produit scalaire.

- Immédiatement, φ est symétrique

- Soient $(a,b),(a',b'),(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi((a+\lambda a', b+\lambda b'),(c,d)) = (a+\lambda a')c + (a+\lambda a')d + (b+\lambda b')c + 5(b+\lambda b')d$

$= \varphi((a,b),(c,d)) + \lambda \cdot \varphi((a',b'),(c,d))$

Donc φ est linéaire pour sa première composante.

Comme φ est symétrique, φ est bilinéaire.

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi((a,b),(a,b)) = a^2 + 2ab + 5b^2 = (a+b)^2 + 4b^2 \geq 0$

donc φ est positive.

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi((a,b),(a,b)) = 0$

$\Rightarrow (a+b)^2 + 4b^2 = 0$

Comme on a une somme de termes positifs, on conclut :

$(a+b)^2 = 0$ et $4b^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $a = 0$ et $b = 0$.

Donc φ est bien définie

Finalement, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, φ est donc bien un produit scalaire.

Et $N \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\varphi(x,x)} \end{array} \right.$ est la norme associée au produit scalaire φ.

On en déduit que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.