Benjamin

Khôlle semaine n° 7

Exercice :

1. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application : $\psi : E \longrightarrow E$
$$f \longmapsto F;$$
où $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, est un endomorphisme de E.

2. Soient $h \in \mathbb{R}$ et $\phi_h : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$$P \longmapsto Q, \quad \text{où } Q(x) = P(x+h).$$
Montrer que ϕ_h est un automorphisme.

1) Soit $f \in E$,

$$\psi(f) \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x f(t)dt \end{array} \right.$$

• f est continue sur $[0,1]$, donc $\psi(f)$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 0 par le théorème fondamental de l'analyse.
Ainsi, $\psi(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ et donc continue sur $[0,1]$.
Ainsi, $\psi(f) \in E$.

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f,g) \in E$, soit $x \in [0,1]$,

$$\psi(\lambda f + g)(x) = \int_0^x (\lambda f + g)(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \lambda f(t) + g(t)\,dt$$

linéarité de l'intégrale

$$= \lambda \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt$$

$$= \lambda\,\psi(f)(x) + \psi(g)(x)$$
$$= \left(\lambda\psi(f) + \psi(g)\right)(x)$$

Ainsi, $\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$ et $\varphi(\lambda f+g)$ coïncident sur leur intervalle de définition, elles sont égales.

On en conclut que φ est linéaire : c'est un endomorphisme de E.

2) • Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\phi_h(\lambda P+Q)(x) &= (\lambda P+Q)(x+h) \\
&= \lambda P(x+h) + Q(x+h) \\
&= \lambda\, \phi_h(P)(x) + \phi_h(Q)(x) \\
&= (\lambda\, \phi_h(P) + \phi_h(Q))(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\phi_h(\lambda P+Q) = \lambda \phi_h(P) + \phi_h(Q)$ et ϕ_h est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $\theta_h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto Q \text{ où } Q(x) = P(x-h) \end{array}\right.$

On remarque :

• θ_h est linéaire de la même façon que ϕ_h

• $\theta_h \circ \phi_h = \phi_h \circ \theta_h = id_{\mathbb{R}_n[X]}$

En effet, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\theta_h \circ \phi_h(P)(x) = \phi_h(P)(x-h) = P(x-h+h) = P(x)$$

$$\phi_h \circ \theta_h(P)(x) = \theta_h(P)(x+h) = P(x+h-h) = P(x)$$

Donc ϕ_h est bijective de bijection réciproque θ_h.

On en conclut que <u>ϕ_h est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$</u>.

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,\ y,\ z) \longmapsto (x+y-z,\ 2x+y-3z,\ 3x+2y-4z)$$

Déterminer $Ker\ f$ et $Im\ f$.

- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \in Ker(f) \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-3z=0 \\ 3x+2y-4z=0 \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow 3L_1 + L_3$ $\iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y-z=0 \\ -y-z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$

$\iff (x,y,z) \in Vect\left((2,-1,1)\right)$

Ainsi, $\underline{Ker(f) = Vect\left((2,-1,1)\right)}$

- $Im(f) = Vect\left(f(\underbrace{0,0,1}_{e_1}), f(\underbrace{0,1,0}_{e_2}), f(\underbrace{1,0,0}_{e_3})\right)$ $\left((e_1,e_2,e_3)\right.$ base de $\left.\mathbb{R}^3\right)$

$Im(f) = Vect\left(\underbrace{(-1,-3,-4)}_{u_1}, \underbrace{(1,1,2)}_{u_2}, \underbrace{(1,2,3)}_{u_3}\right)$ $u_1 = -2u_3 + u_2$

$\underline{Im(f) = Vect\left((1,1,2),(1,2,3)\right)}$

Exercice : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui dans la base canonique est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $Ker\ f$, une base de $Im\ f$ et l'équation définissant $Im\ f$.

$A = \mathrm{Mat}_B(f)$ avec $B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) = (e_1, e_2, e_3)$

• Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ↓ $\mathrm{Mat}_B(.)$ isomorphisme d'algèbres

$\iff \begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ 5x + y = 0 \\ 4x + 11y + 3z = 0 \end{cases}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \iff \begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ 5x + y = 0 \\ 10x + 2y = 0 \end{cases}$ $(L_2 = \frac{1}{2} L_3)$

$\iff \begin{cases} z = 17x \\ y = -5x \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$ $\underbrace{\qquad}_{\neq (0,0,0)}$

$\iff (x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,-5,17))$

Donc $\underline{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,-5,17))}$ dont $((1,-5,17))$ est une base.

• $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ ↓ $\mathrm{Mat}_B(f(e_i)) = A\,\mathrm{Mat}_B(e_i)$

$= \mathrm{Vect}(\underbrace{(-2,5,4)}_{u_1}, \underbrace{(3,1,11)}_{u_2}, \underbrace{(1,0,3)}_{u_3})$ ↓ $u_1 - 5u_2 = u_3 \times (-17)$

Donc $\underline{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)}$ avec (u_1, u_2) base de $\mathrm{Im}(f)$ car u_1 et u_2 non colinéaires.

$\mathrm{Im}(f)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$\forall (x,y,z) \in \mathrm{Im}(f),\ ax + by + cz + d = 0.$

* Avec $(x, y, z) \leftarrow (0,0,0) \in \mathrm{Im}(f)$:

$d = 0$

* Avec $\begin{cases} (x, y, z) \leftarrow u_1 \\ (x, y, z) \leftarrow u_2 \end{cases}$:

$$\begin{cases} -2a + 5b + 4c = 0 \\ 3a + b + 11c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -17a - 51c = 0 \\ 3a + b + 11c = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3c = a \\ b = -2c \end{cases} \qquad b \in \mathbb{R}$$

Avec $c = 1$, on a alors :

<u>$-3x - 2y + z = 0$ est une équation définissant $\mathrm{Im}(f)$.</u>

EXERCICE 3. — *Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit f l'application définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1 + x_2 + \ldots + x_n, x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n). \end{array} \right.$$

1. *Justifier que l'application f est un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de l'application f.*
3. *Déterminer la matrice A de l'application f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{K}^n$.*
4. *Démontrer : $\mathbf{K}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{id}_{\mathbf{K}^n})$.*
5. *Déterminer la matrice B de l'application f, dans une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{K}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbf{K}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{id}_{\mathbf{K}^n})$.*
6. *Quelle relation existe-t-il entre les matrices A et B ?*

1. Par définition, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.
- Reste à montrer la linéarité de f.

Soit $((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ et considérons $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

$f(\lambda_1(x_1, \cdots, x_n) + \lambda_2(y_1, \cdots, y_n)) = f((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1, \cdots, \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n))$
$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i \right)$

Et d'autre part, $\lambda_1 f(x_1, \cdots, x_n) + \lambda_2 f(y_1, \cdots, y_n)$
$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i \right)$

Ainsi, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

2. - Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{Ker}(f)$

$\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 & L_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 & L_n \end{cases}$. Toutes les lignes sont dépendantes, d'où $x_1 = -\sum_{i=2}^{n} x_i$, $x_1 \in \mathbb{K}$.

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((u_2, \cdots, u_n))$, avec $\begin{cases} u_2 = (-1, 1, 0, \cdots, 0) \\ \vdots \\ u_n = (-1, 0, \cdots, 0, 1) \end{cases}$

De plus, étudions la liberté de cette famille.

Soit $(\lambda_i)_{2 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^{n-1}$, $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n}$

$\iff \begin{cases} -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Et ainsi, $(u_2, \cdots, u_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

• Soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in Im(f)$

$\iff \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, (y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n)$

$$\iff \begin{cases} y_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \vdots \\ y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases} \iff y_1 = \dots = y_n$$

D'où, $Im(f) = Vect(u_1')$, avec $\begin{cases} u_1' = (1, \dots, 1) \\ u_1' \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \end{cases}$

3. $$A = Mat_{B_0}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & & & 1 \\ 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} /e_1 \\ \vdots \\ \\ \\ /e_n \end{matrix} \\ f(e_1) \quad \dots \quad f(e_n) & \end{array}$$

4. Montrons que $\mathbb{K}^n = Ker(f) \oplus Ker(f - n\,id_{\mathbb{K}^n})$

ie montrons (dimension finie) : $\begin{cases} (1) \; Ker(f) \cap Ker(f - n\,id_{\mathbb{K}^n}) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ (2) \; \underbrace{dim(\mathbb{K}^n)}_{=n} = \underbrace{dim(Ker(f))}_{=\#(u_1, \dots, u_n) = n-1} + dim(Ker(f - n\,id_{\mathbb{K}^n})) \end{cases}$

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \in Ker(f - n\,id_{\mathbb{K}^n})$

$$\iff (A - nI_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} (1-n)x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + (1-n)x_2 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + \dots + (1-n)x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = n x_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = n x_n \end{cases}$$

D'où, $Ker(f - n\,id_{\mathbb{K}^n}) = Vect(u_1)$, avec $\begin{cases} u_1 = (1, \dots, 1) \\ u_1 \neq 0_{\mathbb{K}^n} \text{ si } n \neq 0. \end{cases}$

Et $dim(Ker(f - n\,id_{\mathbb{K}^n})) = \#(u_1) = 1$.

D'où (2).

Montrons (1) (L'inclusion réciproque est triviale)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in Ker(f) \cap Ker(f - n\,id_{\mathbb{K}^n})$

$$\iff \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) = 0_{\mathbb{K}^n} \\ f(x_1, \dots, x_n) = \underset{\neq 0}{n}(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \iff (x_1, \dots, x_n) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}.$$

D'où (1).

Mathias

5. $$B = \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} /u_1 \\ \vdots \\ /u_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_n) \end{matrix} & \end{array}$$

Avec $\mathbb{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ par concaténation de bases.

6. Par théorème de changement de bases, $\exists P_{B_0 \to \mathbb{B}} \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = \underbrace{P_{B_0 \to \mathbb{B}}}_{= P} \, B \, \underbrace{P_{\mathbb{B} \to B_0}}_{= P^{-1}} .$$

D'où, A et B sont semblables.

Rose

Colle S7

On note $tr \left| \begin{array}{ccl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \end{array} \right.$ avec $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Déterminer une base de $Ker(tr)$

2) En déduire que $Ker(tr) = Vect\left((AB-BA),\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\right)$

3) On considère ϕ une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et telle que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\phi(AB) = \phi(BA)$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\phi = \lambda . tr$

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$M \in Ker(tr) \iff tr(M) = 0_{\mathbb{K}} \iff \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = 0_{\mathbb{K}} \iff m_{11} = -\sum_{i=2}^{n} m_{ii}$$

La matrice s'écrit en fait : $M = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} m_{ii} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$

Et ainsi :

$$Ker(tr) = \left\{ m_{22}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, m_{nn}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. m_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, m_{n,n-1}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

C'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!],\ Ker(tr) = Vect\Big(\underbrace{(E_{ij})_{i \neq j}, (E_{ii} - E_{11})_{i \in [\![2;n]\!]}}_{\mathcal{E}}\Big)$$

La famille est génératrice de $Ker(tr)$ et possède $n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$ vecteurs. tr étant une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Ker(tr)$ est de dimension $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - 1 = n^2 - 1$ (c'est un hyperplan

Ainsi, $\text{card}(\underline{\underline{e}}) = \dim(\text{Ker}(tr))$

D'où : $\underline{\underline{e}}$ est une base de $\text{Ker}(tr)$.

2) Montrons que $\text{Ker}(tr) = \text{Vect}((AB-BA), (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2)$

$\boxed{\subset}$. Soit $i \in [\![1;n]\!]$

On rappelle que pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$

Ici, on a : $E_{ii} - E_{11} = \underbrace{E_{i1}}_{A_1} \cdot \underbrace{E_{1i}}_{B_1} - \underbrace{E_{1i}}_{B_1} \underbrace{E_{i1}}_{A_1}$

. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$

Soit $l \in [\![1,n]\!]$.

$E_{ij} = E_{il}E_{lj} = \underbrace{E_{il}}_{A_2}\underbrace{E_{lj}}_{B_2} - \underbrace{E_{lj}}_{B_2}\underbrace{E_{il}}_{A_2}$ car $E_{lj}E_{il} = \underbrace{\delta_{ji}}_{=0 \text{ car } i \neq j} E_{ll}$

On a en fait :

$\forall M \in \text{Ker}(tr), \exists (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M = AB - BA$.

D'où : $\underline{\text{Ker}(tr) \subset \text{Vect}((AB-BA), (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2)}$

$\boxed{\supset}$ Soit $M \in \text{Vect}((AB-BA), (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2)$

$\exists \lambda \in \mathbb{K}, M = \lambda(AB - BA)$

$\Rightarrow tr(M) = \lambda(tr(AB) - tr(BA))$ par linéarité de tr

$\Rightarrow tr(M) = 0$ car la trace est centrale

D'où : $M \in \text{Ker}(tr)$

Et $\underline{\text{Vect}((AB-BA), (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2) \subset \text{Ker}(tr)}$.

3) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})}\}$ tel que :

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\phi(AB) = \phi(BA)$.

Montrons en fait que $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(tr)$.

. Soit $M \in \text{Ker}(tr)$:

$\exists (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \exists \lambda \in \mathbb{K}, M = \lambda(AB - BA)$.

ϕ étant linéaire : $\phi(M) = \lambda(\phi(AB) - \phi(BA)) = 0$

$\Rightarrow M \in \text{Ker}(\phi)$.

D'où $\underline{\text{Ker}(tr) \subset \text{Ker}(\phi)}$.

. Ker(tr) et Ker(ϕ) étant des noyaux de formes linéaires non nulles, on a :

$\dim(\text{Ker}(tr)) = \dim(\text{Ker}(\phi)) = n^2 - 1$ car ce sont des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2.

Ainsi : $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(tr)$

Or, deux formes linéaires non nulles du même espace ayant le même noyau sont proportionnels.

En effet, en considérant E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux formes linéaires sur E tels que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g) = H$, on a :

H étant un hyperplan de E :

$\exists\, u \in E \setminus H,\quad E = H \oplus \text{Vect}_{\mathbb{K}}(u)$

Soit $x \in E$.

$\exists!\, (h, \lambda) \in H \times \mathbb{K},\quad x = h + \lambda u$

On a : $\begin{cases} f(x) = \lambda f(u) \\ g(x) = \lambda g(u) \end{cases}$ car $h \in \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$

Or $g(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$ car $u \notin H$, d'où :

$\lambda = \dfrac{g(x)}{g(u)}$

Et ainsi $f(x) = \underbrace{\dfrac{f(u)}{g(u)}}_{\in \mathbb{K}^*} g(x)$ et ceci pour tout x de E.

Donc f et g sont proportionnels.

Finalement, ici, on a :

$\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\quad \phi = \lambda . tr$

Leonard

Révision d'algèbre linéaire II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ l'espace dual associé à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Établir que $f_A : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto tr(AX)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) On note alors $\Theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ définie par : $\Theta(A) = f_A$
Montrer que Θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) On a déjà que $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$f_A(\lambda X + \mu Y) = tr(A(\lambda X + \mu Y)) = tr(A\lambda X + A\mu Y)$

$= \lambda tr(AX) + \mu tr(AY) = \lambda f_A(X) + \mu f_A(Y)$

par linéarité de la trace

Ainsi f_A est linéaire c'est donc bien une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) On note $\Theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}^*)^*$ définie par $\Theta(A) = f_A$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ sont bien des espaces vectoriels.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$\Theta(\lambda A + \mu B) = f_{\lambda A + \mu B}$

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $f_{\lambda A + \mu B}(X) = tr((\lambda A + \mu B)X) = tr(\lambda AX) + tr(\mu BX)$

$= \lambda tr(AX) + \mu tr(BX) = \lambda f_A(X) + \mu f_B(X)$.

Ce résultat est vrai pour tous $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi $f_{\lambda A + \mu B} = \lambda f_A + \mu f_B$

et $\lambda f_A + \mu f_B = \lambda\Theta(A) + \mu\Theta(B)$.

Finalement, on a bien $\Theta(\lambda A + \mu B) = \lambda\Theta(A) + \mu\Theta(B)$ donc Θ est linéaire.

De plus $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*) = n^2$.

Soit $A \in \mathrm{Ker}(\Theta)$, $\Theta(A) = 0 \Rightarrow f_A = 0$
$\Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(AX) = 0$

avec $X = A^T$, on a $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} [AA^T]_{ii} = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [A^T]_{ki} = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}^2 = 0$ et $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ [A]_{ik}^2 \geq 0$.

Une somme de nombres tous positifs ou nuls est égale à 0 si et seulement si chaque terme est nul donc $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $[A]_{ik} = 0$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\Theta) \subset \{0\}$
et $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(\Theta)$
Donc $\mathrm{Ker}(\Theta) = \{0\}$.

Ainsi Θ est injective
comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*)$
Θ est bijective.

Ainsi Θ est bijective et linéaire : c'est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels

Pauline

Enoncé :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique B_0 est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.
3) En déduire une Base B_1 de $\mathbb{R}^3$ à relative à cette décomposition.
4) Écrire la matrice f dans la base B_1.
5) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1)
$$\begin{array}{ccc|ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\underset{C_3 \leftrightarrow C_1}{\Rightarrow} \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1}}{\Rightarrow} \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\Rightarrow} \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}.$$

On a :

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((\underbrace{1, 1, 1}_{= u_1}))$

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((\underbrace{-1, -1, 2}_{= u_2}); (\underbrace{0, 3, -3}_{= u_3}))$

2) Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

• $(1, 1, 1) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc :
$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
De plus, $(-1, -1, 2)$ et $(0, 3, -3)$ ne sont pas colinéaires, ainsi : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
On a : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

• Montrons que : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

[⊃] Vraie car $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

[⊂] Soit $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors :

$$\begin{cases} u \in \mathrm{Ker}(f) \\ u \in \mathrm{Im}(f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \lambda_1 u_1 \\ u = \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \end{cases}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 = 2\lambda_2 - 3\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\ \lambda_1 + \lambda_2 \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 3\lambda_3 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

$\Rightarrow u \in \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Ainsi : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et

$\underline{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$

3) On pose $\underline{B_1 = (u_1 ; u_2 ; u_3)}$

4)

$$\mathrm{mat}_{B_1}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} / u_1 \\ / u_2 \\ / u_3 \end{array}$$

- $f(u_1) = (0, 0, 0)$ car $u_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.
- $f(u_2) = A \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

or, $f(u_2) = 0 \times u_1 + 3 \times u_2 + 0 \times u_3$

- $f(u_3) = A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$

or, $f(u_3) = 0 \times u_1 + 0 \times u_2 + 3 \times u_3$.

5) Par changement de base :

$A = P_{B_0 B_1} \, Mat_{B_1}(f) \, P_{B_1 B_0}$.

- $$P_{B_0 B_1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{array}$$

- $$P_{B_1 B_0} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ /u_1 \\ /u_2 \\ /u_3 \end{array}$$

- $e_1 = \frac{1}{3} u_1 - \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{3} u_3$

- $e_2 = \frac{1}{3} u_1 + \frac{1}{3} u_2 + \frac{1}{3} u_3$.

- $e_3 = \frac{1}{3} u_1 + \frac{1}{3} u_2 + 0 \times u_3$.

Par récurrence on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$A^n = P_{B_0 B_1} \left(Mat_{B_1}(f) \right)^n P_{B_1 B_0}$.

Clarisse

Khôlles semaine 7

Exercice 4
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 1 vérifiant :

$$P(0) = 1 \text{ et } AB = P(A)$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$
on suppose que tous les a_k sont nuls à partir d'un rang m.

$$* P(0) = \sum_{k=0}^{m} a_k 0^k = a_0 = 1$$

$$* P(A) = AB \Rightarrow \sum_{k=0}^{m} a_k A^k = AB$$

$$\Rightarrow a_0^{\times I_n} + a_1 A + \cdots + a_m A^m = AB$$

$$\Rightarrow a_0 I_n + (a_1 + \cdots + a_m A^{m-1}) A = AB$$

$$\Rightarrow a_0 I_n = A \underbrace{(B - (a_1 + \cdots + a_m A^{m-1}))}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = D$$

or $a_0 = 1$
Donc $AD = I_n$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Alors A est inversible d'inverse $D = A^{-1}$ et $DA = I_n$

De plus,

$$AB = I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m = P(A)$$

$$\times A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1} + a_1 + \cdots + a_m A^{m-1}$$

or $B \times A = (A^{-1} + a_1 + \cdots + a_m A^{m-1}) A$
$= I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m = P(A)$

Ainsi, $AB = BA$, les matrices A et B commutent

Pierre. Colle S7 16/10/2020

Exercice 2

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On note H le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{\cosh, \sinh\}$ et $F = \{f \in H : f(\ln(2)) = 0\}$.

1. Déterminer la dimension de H.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.

3. Quelle est la dimension de F ?

4. Soit $\phi : H \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$.
Montrer que ϕ est un isomorphisme.

1) $(\cosh, \sinh)$ est clairement libre donc H est de dimension 2.

2) . $0_H \in F$

. Soit $f, g \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $(\lambda f + g)(\ln(2)) \overset{f,g \in F}{=} \lambda f(\ln(2)) + g(\ln(2)) = 0$

d'où F est un sous espace vectoriel de H.

3) comme $F \subset H$, $\dim(F) \leq \dim(H) = 2$.

. Si $\dim(F) = 0$: $F = \{0\}$ or $\frac{4}{5}\cosh - \frac{4}{3}\sinh \in F$

et $\frac{4}{5}\cosh - \frac{4}{3}\sinh \neq 0$ donc $\dim(F) \neq 0$.

. Si $\dim(F) = 2$ alors $F = H$. or $\cosh \in H$
et $\cosh \notin F$

d'où $\dim(F) = 1$.

4) . $\dim(H) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

. Soit $f \in H$. $f \in \operatorname{Ker}(\phi) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-\ln(2)) = 0 \\ f \in F \end{cases}$

d'où $\quad Ker(\phi) \subset F$.

aussi, $\dim Ker(\phi) \leq \dim(F)$.

. Si $\dim Ker(\phi) = 1$, alors $F = Ker(\phi)$.

Cependant, $\frac{4}{5}\cosh - \frac{4}{3}\sinh \in F$.

et $\phi\left(\frac{4}{5}\cosh - \frac{4}{3}\sinh\right) = (2, 0)$.

d'où $Ker(\phi) \not\supset F$

finalement, $\dim(Ker(\phi)) = 0$

Donc $Ker(\phi) = \{0\}$ et en dimension finie,

<u>ϕ est un isomorphisme</u>.

EXERCICE 1. — *Soit f l'application définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1 + 3x_2, 3x_1 + x_2). \end{array} \right.$$

1. *Justifier que l'application f est un endomorphisme de $\mathbf{K}^2$.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de l'application f. Qu'en déduire?*
3. *Déterminer la matrice A de l'application f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbf{K}^2$. Quelle propriété remarquable possède la matrice A?*
4. *Déterminer l'ensemble $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(f)$ des $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbf{K}^2}) \neq \{0_{\mathbf{K}^2}\}$.*
5. *Démontrer : $\mathbf{K}^2 = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbf{K}^2})$.*
6. *Donner une matrice $P \in GL_2(\mathbf{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ telles que $A = P D P^{-1}$.*
7. *Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.*

1/ Soient $\begin{cases}(x_1, x_2) \\ (y_1, y_2)\end{cases} \in \mathbb{K}^2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$

$= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 3\lambda_1 y_1 + 3\lambda_2 y_2, 3\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$

$= \lambda_1 (x_1 + 3y_1, 3x_1 + y_1) + \lambda_2 (x_2 + 3y_2, 3x_2 + y_2)$

$= \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2)$

donc f est linéaire et de ce fait, c'est un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$

2/ $\mathrm{Ker}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2, f(x_1, x_2) = 0_{\mathbb{K}^2}\}$

$f(x_1, x_2) = 0_{\mathbb{K}^2}$

$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 8x_2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}^2}\} \Rightarrow f$ injective

De plus, par théorème du rang,

$\underbrace{\dim(\mathbb{K}^2)}_{=2} = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=0} + \dim(\mathrm{Im}(f))$

donc • $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{K}^2) = 2$

• $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{K}^2$

donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^2 \Rightarrow f$ est surjective

Ainsi f est bijective et d'après le résultat de la question 1/, on en déduit que f est un isomorphisme

3/ $B_0 = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1)) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0) = (1,3) \\ f(0,1) = (3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow Mat_{B_0}(f) = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

On a $Mat_{B_0}(f) \times Mat_{B_0}(f^{-1}) = Mat_{B_0}(id)$
$= I_2$

Ainsi la matrice $A = Mat_{B_0}(f)$ est inversible de matrice inverse $A^{-1} = Mat_{B_0}(f^{-1})$

4/ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $Ker(f - \lambda id_{\mathbb{K}^2}) \neq \{0_{\mathbb{K}^2}\}$

$\Leftrightarrow det(A - \lambda id_{\mathbb{K}^2}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

On, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$

donc $det(A - \lambda id_{\mathbb{K}^2}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = 4$

Ainsi, $Spec_{\mathbb{K}}(f) = \{-2, 4\}$

5/ On a $Ker(f + 2id_{\mathbb{K}^2})$

$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2, f(x_1, x_2) + (2,2) = 0\}$

$f(x_1, x_2) + (2,2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = -3x_2 + 2 \\ -8x_2 - 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} \end{cases}$ donc $Ker(f + 2id_{\mathbb{K}^2}) = \{(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})\}$

De même, $Ker(f - 4id_{\mathbb{K}^2}) = \{(1,1)\}$

Soit $u = (x, y) \in Ker(f - 4id_{\mathbb{K}^2}) \cap Ker(f + 2id_{\mathbb{K}^2})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}x_1 = x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 = x_2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{7}{2}x_1 = x_2 \\ -4x_1 = 0 \end{cases}$

donc $u = (0,0)$

Ainsi, $Ker(f - 4\,id_{K^2}) \cap Ker(f + 2\,id_{K^2}) = \{0_{K^2}\}$ (*)

De plus (**) $\dim(K^2) = 2 = \dim(Ker\, f - 4\,id_{K^2}) + \dim(Ker\, f + 2\,id_{K^2})$

Par (*) et (**), $K^2 = Ker(f - 4\,id_{K^2}) \oplus Ker(f + 2\,id_{K^2})$

Margaux

EXERCICE 3. — *Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit f l'application définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1 + x_2 + \dots + x_n, x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n). \end{array} \right.$$

1. *Justifier que l'application f est un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de l'application f.*
3. *Déterminer la matrice A de l'application f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{K}^n$.*
4. *Démontrer : $\mathbf{K}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{id}_{\mathbf{K}^n})$.*
5. *Déterminer la matrice B de l'application f, dans une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{K}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbf{K}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{id}_{\mathbf{K}^n})$.*
6. *Quelle relation existe-t-il entre les matrices A et B ?*

1) f est l'application canoniquement associée à la matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ donc f est linéaire. De plus, on a

$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$

2) Soit $u \in \mathbb{K}^n$, alors $u = (x_1, \dots, x_n)$

$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0$

$\iff x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_n$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((\underbrace{-1, 1, 0, \dots, 0}_{u_1}), (\underbrace{-1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0}_{u_2}),$
$(\underbrace{-1, 0, 0, \dots, 0, 1}_{u_{n-1}}))$

Regardons si $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est libre.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}^{n-1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i = 0$

Alors $\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_{n-1} = 0 \end{cases}$

$\iff \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

donc $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

On a alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \#(u_1, \dots, u_{n-1}) = n-1$.

D'après le théorème du rang,

$\dim(\mathbb{K}^m) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = m - (m-1) = 1$

Par ailleurs,

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_m))$ avec $e_1, \dots, e_m$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^m$.

On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{u_m})$.

(u_m) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3)

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_m) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1 \\ \\ e_m \end{array} \end{array}$$

4) Mq $\mathbb{K}^m = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - m\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^m})$

$\iff \begin{cases} \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - m\mathrm{id}) = \{0\} & (1) \\ \dim(\mathbb{K}^m) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - m\mathrm{id})) & (2) \end{cases}$

(1) Soit $u = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$. $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - m\mathrm{id})$

alors $\begin{cases} f(u) = 0 \\ f(u) = mu \end{cases}$ et donc $mu = 0$

Supposons $m \in \mathbb{N}^*$, alors $u = 0$.

donc comme l'autre inclusion est directe, (1) démontré.

(2) Soit $u = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, $x \in \mathrm{Ker}(f - m\mathrm{id})$. Alors :

$f(u) = mu \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx_1 \\ \vdots \\ mx_m \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x_1 + \dots + x_m = mx_1 \\ x_1 + \dots + x_m = mx_2 \\ \dots \\ x_1 + \dots + x_m = mx_m \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1(1-m) + \dots + x_m = 0 \\ mx_1 = mx_2 & (L_2 - L_1) \\ \dots \\ mx_1 = mx_m \end{cases}$

$\iff x_1 = x_2 = \dots = x_m$

et donc $\mathrm{Ker}(f - m\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(\overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^{u_m})$

et donc on a bien $\dim(\mathbb{K}^m) = m = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - m\mathrm{id}))$

Margaux

Finalement, $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{id})$

5) Par concaténation des bases dans une somme directe, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_{n-1}) \# (u_n) = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Ainsi,

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} f(u_1) & \dots & & f(u_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mid u_1 \\ \mid u_2 \\ \vdots \\ \mid u_n \end{array} \end{array}$$

Car $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $u_{n-1} \in \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{id})$

6) Par théorème de changement de bases :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)}_{A} = \underbrace{P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}}_{P} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{B} \underbrace{P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}}}_{P^{-1}}$$

avec $P = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}(\mathrm{id})$

$$= \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mid e_1 \\ \mid e_2 \\ \vdots \\ \mid e_n \\ \end{array} \end{array}$$

Semaine 7

1/2

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_2 + 5x_3,\ 6x_3) \end{array} \right.$

1) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.
2) Déterminer son noyau et son image. Qu'en déduire ?
3) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = A$ avec $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$.
Quelle propriété remarquable possède A ?
4) Déterminer $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$ des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{K}^3}) \neq \{0_{\mathbb{K}^3}\}$.
5) Démontrer $\mathbb{K}^3 = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$

6) Donner $P \in GL_3(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
7) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

---

1) • $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$

• Par opérations sur les n-uplets, f est linéaire.

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$

2) • Soit $u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases}$

Le système est échelonné, on trouve $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

• Comme $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$ par le théorème du rang, il vient : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

Donc $\underline{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^3}$.

3) Il vient : $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$\underline{A \text{ est triangulaire supérieure.}}$

4) On résout : $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$

$\iff \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{K}^3}\}$

$\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3) \neq \{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})}\}$

$\iff A - \lambda I_3 \notin GL_3(\mathbb{K})$

$\iff \det(A - \lambda I_3) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\iff (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) = 0$

$\iff \underline{\lambda \in \{1 ; 4 ; 6\}}$.

5) • Soit $u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, alors : $\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases}$

d'où $\underline{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))} = \mathrm{Vect}(u_1) = K_1$

2/2

• Soit $u \in Ker(f-4id)$, alors : $\begin{cases} -3x+2y+3z=0 \\ 5z=0 \\ 2z=0 \end{cases}$

donc $\underline{Ker(f-4id) = Vect((3,2,0))} = Vect(u_2) = K_2$

• Soit $u \in Ker(f-6id)$, alors : $\begin{cases} -5x+2y+3z=0 \\ -2y+5z=0 \\ z \in \mathbb{K} \end{cases}$

donc $\underline{Ker(f-6id) = Vect((8,2,5))} = Vect(u_3) = K_3$

• En recherchant la liberté de (u_1, u_2, u_3), on tombe sur un système échelonné, et donc (u_1, u_2, u_3) est libre.

• On a : $\underline{\dim(K_1+K_2+K_3) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)}$.

• Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que $\begin{cases} (\lambda_1, 0, 0) \in K_1 \\ (3\lambda_2, 2\lambda_2, 0) \in K_2 \\ (8\lambda_3, 2\lambda_3, 5\lambda_3) \in K_3 \end{cases}$

On résout : $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a unicité de la décomposition du $0_{\mathbb{K}^3}$.

Donc $\underline{K_1 ; K_2 \text{ et } K_3 \text{ sont en somme directe}}$.

On en conclut que $\underline{K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 = \mathbb{K}^3}$

6) Par la question 5), $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une famille libre de cardinal égal à $\dim(\mathbb{K}^3)$.

C'est donc une base de $\mathbb{K}^3$.

Par formule de changement de bases :

$$A = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g) \cdot P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}}_{=P} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}}_{=P^{-1}}$$ avec $P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} \in GL_3(\mathbb{K})$.

et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

7) Si • $n = 0$, $A^0 = I_3$.

• $n > 0$, par récurrence rapide, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$

• $n < 0$, alors P, ; est inversible, D également.

Rapidement, on trouve $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

Ainsi, $A = PDP^{-1} \Rightarrow A \cdot P = PD \Rightarrow A \cdot PD^{-1} = P \Rightarrow A \cdot PD^{-1}P^{-1} = I_3$.

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Encore, par récurrence rapide, avec n : $A^{-n} = PD^{-n}P^{-1}$

d'où $\underline{A^n = PD^nP^{-1}}$

Sinine De la même façon, on a :

$$\mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^2}) = \mathrm{Vect}(\overbrace{(1;1)}^{u_2})$$

Or $u_1 \neq \{0_{\mathbb{K}^2}\}$ et $u_2 \neq \{0_{\mathbb{K}^2}\}$ donc u_1 est une base de E_{-2}, d'où $\dim(E_{-2}) = 1$
et u_2 est une base de E_4 d'où $\dim(E_4) = 1$.

Ainsi on a : $\dim(\mathbb{K}^2) = 2 = \dim(E_{-2}) + \dim(E_4)$.

Reste à montrer que : $E_{-2} \cap E_4 = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$

Soit $(x;y) \in E_{-2} \cap E_4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in E_{-2} \\ (x,y) \in E_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 6y = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = 0.$$

D'où $E_{-2} \cap E_4 \subset \{0_{\mathbb{K}^2}\}$. L'inclusion réciproque étant immédiate, $E_{-2} \cap E_4 = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$.

Finalement, on a bien :

$$\mathbb{K}^2 = E_{-2} \oplus E_4.$$

6) Par concaténation des bases dans une somme directe, on a : $(u_1;u_2)$ base de $\mathbb{K}^2$.

On note $\mathcal{B}_1 = (u_1;u_2)$.

Par théorème de changement de base, il vient :

$$\mathcal{M}at_{B_0}(f) = P_{B_0 \to B_1} \; \mathcal{M}at_{B_1}(f) \cdot P_{B_1 \to B_0}$$

$$\Rightarrow \quad A = P \times D \times P^{-1}$$

avec $P = \mathcal{M}at_{B_1, B_0}(id_{\mathbb{K}^2}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \end{array} \end{array}$

$D = \mathcal{M}at_{B_1}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /u_1 \\ /u_2 \end{array} \end{array}$

$P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

7) Par récurrence triviale sur $n \in \mathbb{N}$,
on montre que $A^n = P . D^n . P^{-1}$

Sirine Exercice Khôlle :

EXERCICE 1. — *Soit f l'application définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1 + 3x_2\,,\, 3x_1 + x_2)\,. \end{array} \right.$$

1. *Justifier que l'application f est un endomorphisme de $\mathbf{K}^2$.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de l'application f. Qu'en déduire ?*
3. *Déterminer la matrice A de l'application f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbf{K}^2$. Quelle propriété remarquable possède la matrice A ?*
4. *Déterminer l'ensemble $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(f)$ des $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que $\mathrm{Ker}\left(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbf{K}^2}\right) \neq \{0_{\mathbf{K}^2}\}$.*
5. *Démontrer : $\mathbf{K}^2 = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(f)} \mathrm{Ker}\left(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbf{K}^2}\right)$.*
6. *Donner une matrice $P \in GL_2(\mathbf{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.*
7. *Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.*

1) f est l'application linéaire canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

donc f est linéaire et $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ d'où $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$.

2) Soit $(x;y) \in \mathrm{Ker}(f)$

$$\iff f((x;y)) = (0;0)$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ \quad -8y = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y = 0.$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = 0_{\mathbb{K}^2}$ on en déduit que f est injective

De plus, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\mathbb{K}^2) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$
$$= \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Or $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}^2$ (c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$)

Par inclusion et égalité des dimensions, on a :

$\mathbb{K}^2 = \mathrm{Im}(f)$ d'où f est surjective.

On en déduit que f est un automorphisme.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application f dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{K}^2$.

La matrice A est inversible.

4) On cherche $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{K}^2}) \neq \{0_{\mathbb{K}^2}\}$$
$$\iff \det(A - \lambda I_2) = 0$$
$$\iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\iff (1-\lambda)^2 - 9 = 0$$
$$\iff \lambda \in \{-2 ; 4\}$$

5) Montrons que $\mathbb{K}^2 = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^2}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^2})$

$$\iff \mathbb{K}^2 = E_{-2} \oplus E_4$$

- Soit $(x;y) \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{K}^2})$

$$\Rightarrow f(x;y) + 2(x;y) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ \cancel{-3x + 3y = 0} \end{cases}$$
$$\Rightarrow x = -y.$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{K}^2}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(-1;1)}_{u_1})$.

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par $f(M) = AM$

1- Montrer que f est linéaire

Emilie

2- Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 2.

1) Soient $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$f(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \underset{(1)}{=} A\lambda_1 M_1 + A\lambda_2 M_2$

$\underset{(2)}{=} \lambda_1 AM_1 + \lambda_2 AM_2 = \lambda_1 f(M_1) + \lambda_2 f(M_2)$

(1) Par distributivité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(2) Par associativité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2)

Soit $\mathcal{B}_0 = \left(\underset{E_{11}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_{12}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_{21}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_{22}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$f(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$f(E_{12}) = AE_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f(E_{21}) = AE_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(E_{22}) = AE_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient alors

$$\underset{B_e}{\mathrm{Mat}}(g) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} g(E_{11}) & g(E_{12}) & g(E_{21}) & g(E_{22}) \\ \end{array}$$

$$\underset{B_e}{\mathrm{Mat}}(g) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} g(E_{11}) & g(E_{12}) & g(E_{21}) & g(E_{22}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \end{array}$$

Mathilde

Colle n°5

Exercice 2. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
3. L'endomorphisme f est-il surjectif?
4. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
5. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{array}$

Montrons que f est linéaire. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= f(\lambda_1 M_1) + f(\lambda_2 M_2) \\ &= \lambda_1 f(M_1) + \lambda_2 f(M_2) \\ &= \lambda_1 AM_1 + \lambda_2 AM_2 \end{aligned}$$

Donc f est linéaire et comme elle va de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est un endomorphisme.

2. Soit $M' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $f(M') = 0 \Leftrightarrow AM' = 0$

On résout $\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$ d'où $M' = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$

Une base de $\operatorname{Ker}(f)$ est donnée par $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

3. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{Rg}(f)$

or $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$

et d'après la question 2, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$ donc

$\operatorname{Rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2 < 4$ donc f n'est pas surjective.

4. On donne une base canonique $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: (e_1, e_2, e_3, e_4)

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ est donnée par

$\operatorname{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$

or on a $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;
$f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Donc $f(e_1)$ et $f(e_3)$ sont colinéaires
et $f(e_2)$ et $f(e_4)$ aussi donc comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$
une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

5. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
· Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $B = \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a & b \end{pmatrix}$

· Il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tels que $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$
On résout :
$$\begin{cases} -2a = c \\ a = 2c \\ -2b = d \\ b = 2d \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 5c & (L_1 + 2L_2) \\ a = 0 \\ 0 = 5d & (L_3 + 2L_4) \\ b = 0 \end{cases}$$
donc $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Or, on a montré que :
$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$
donc on a bien $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
d'après la caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace ambiant.

Malaurie

Exercice de colle.

Énoncé :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui, dans la base canonique $\{e_i\}$, est représenté par la matrice : $A = M_{\{e_i\}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice A' qui représente f dans la base $\{e_i'\}$, où :

$$\begin{cases} e_1' = (1,0,-1) \\ e_2' = (0,1,1) \\ e_3' = (1,0,1) \end{cases}$$

Résolution :

On remarque que $e_1' = e_1 - e_3$, $e_2' = e_2 + e_3$ et $e_3' = e_1 + e_3$

Ainsi, $$\begin{cases} f(e_1') = f(e_1) - f(e_3) = (2,0,-2) = 2e_1' \\ f(e_2') = f(e_2) + f(e_3) = (0,2,2) = 2e_2' \\ f(e_3') = f(e_1) + f(e_3) = (4,0,4) = 4e_3' \end{cases}$$

D'où, $A' = Mat_{(e_1', e_2', e_3')}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Valentin

Soit $m \in \mathbb{N}$, on considère l'application : $\varphi \left| \begin{array}{ll} \mathbb{C}_{m+1}[X] & \to \mathbb{C}_m[X] \\ P & \to (n+1)P - XP' \end{array} \right.$

1. Justifier que φ est une application linéaire
2. Déterminer le noyau de φ
3. L'application φ est-elle surjective ?

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_{m+1}[X]$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) &= (n+1)(\lambda P_1 + \mu P_2) - X(\lambda P_1 + \mu P_2)' \\ &= (n+1)\lambda P_1 + (n+1)\mu P_2 - X\lambda P_1' - X\mu P_2' \\ &= \lambda((n+1)P_1 - XP_1') + \mu((n+1)P_2 - XP_2') \\ &= \lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2) \end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire

2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

ie $\varphi(P) = 0_{\mathbb{C}_{n+1}[X]}$

$\Rightarrow (n+1)P - XP' = 0_{\mathbb{C}_{n+1}[X]}$

$\Rightarrow (m+1)\sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - X\left(\sum_{k=0}^{m+1} a_k X^k\right)' = 0_{\mathbb{C}_{n+1}[X]}$

$\Rightarrow (n+1)\sum_{k=0}^{m+1} a_k X^k - X\left(\sum_{k=0}^{m+1} a_k k X^{k-1}\right) = 0_{\mathbb{C}_{n+1}[X]}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m+1} ((n+1)-k)a_k X^k$

Ainsi :

- $m+1-k=0 \Rightarrow k = m+1$
- $a_k = 0,\ \forall k \in [\![0,m]\!]$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^{m+1})$

3 Par le théorème du rang on a : $\dim(\mathbb{C}_{n+1}[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = m+2-1 = m+1 = \dim(\mathbb{C}_m[X])$.

Ainsi φ est surjective.

Marine

Exercice 1

Soit $\left| \begin{array}{l} f:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X] \\ \quad P(X)\mapsto P(X+1) \end{array}\right.$ avec $n\geqslant 2$

1. Montrer que f est un isomorphisme

2. Former la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

3. Inverser la matrice A.

4. Calculer pour $i,j\in\mathbb{N}$ tels que $i<j$ on a : $\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{k}{i}\binom{j}{k}$

1) Montrons que f est linéaire.

Soit $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$, $\lambda\in\mathbb{K}$, alors $\forall X\in\mathbb{R}$:

$f(\lambda P+Q)(X) = (\lambda P+Q)(X+1) = \cancel{(\lambda P+Q)} = \lambda P(X+1)+Q(X+1) = \lambda f(P)+f(Q)$.

Montrons que f est bijective :

* Montrons que f est injective :

Soit $P\in \mathrm{Ker}(f)$: $f(P)=0$, P a plus de racines que son degré ($\deg(P)\leq n$), donc c'est le polynôme nul.

donc $\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.

* De plus f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie donc f est un isomorphisme.

2) On a $f(1)=1$ — on note $B_0=(1,X,\dots,X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$f(X)=X+1$

2ème colonne $f(X^2)=(X+1)^2 = X^2+2X+1$.

nème colonne $f(X^n)=(X+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$

$\downarrow$ jème colonne $j\in[\![0,n-1]\!]$.

$$D'où,\quad A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & \binom{j}{i} & \\ 0 & 0 & 0 & (0) & & 1 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} /1 \\ /X \\ /X^2 \\ \\ \leftarrow \text{ième ligne } i\in[\![0,n-1]\!] \\ /X^n \end{array}$$

$A=\mathrm{Mat}_{B_0}(f)$.

3) On cherche à trouver la bijection réciproque de f :

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]. \\ P(X) & \longmapsto & P(X-1) \\ \overset{\shortparallel}{y} & & \overset{\shortparallel}{x} \end{array} \right.$$

c'est l'unique $x \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(x) = y$.

En effet on vérifie : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall X \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}(P(X)) = P(X-1)$$

Et $f(P(X-1)) = P(X-1+1) = P(X)$.

De plus

$$f^{-1}(1) = 1.$$
$$f^{-1}(X) = X-1$$
$$f^{-1}(X^2) = (X-1)^2$$
$$\vdots$$
$$f^{-1}(X^n) = (X-1)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n-k}$$

d'où :

$j$ème colonne, $j \in [\![0, n-1]\!]$

$$\mathrm{Mat}_{B_0}(f^{-1}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f^{-1}(1) & \cdots & f^{-1}(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \binom{j}{i}(-1)^{j-i} \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \leftarrow i\text{ème ligne } i \in [\![0, n-1]\!]. \\ X^n \end{array}$$

On pose $\mathrm{Mat}_{B_0}(f^{-1}) = A^{-1}$, on vérifie qu'elle convient :

$$AA^{-1} = \mathrm{Mat}_{B_0}(f) \times \mathrm{Mat}_{B_0}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B_0}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B_0}(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathbb{R}]}$$

A est inversible à droite donc elle est inversible et $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{B_0}(f^{-1})$

Bastiam
18

Emmoncé :

Soit f l'application définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 3x_2, 3x_1 + x_2) \end{array} \right.$$

1- Justifier que l'application f est un endomorphisme

2- Determiner le noyau et l'Image de f. Qu'en déduire ?

3- Determiner la matrice A de f dans base cannonique $B_0 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{K}^2$. Quelle propriété remarquable possède la matrice A ?

4- Determiner l'ensemble $Spec_{\mathbb{K}}(f)$ des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $Ker(f - \lambda Id) \neq \{0_{\mathbb{K}^2}\}$

5- Démontrer $\mathbb{K}^2 = \bigoplus Ker(f - \lambda id)$

6- Donner une matrice $P \in GL_2(\mathbb{K})$ et une matrice $D \in M_2(\mathbb{K})$ diagonale telles que $PDP^{-1} = A$

7- Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Résolution :

1- • On a bien $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$

• Montrons que f est linéaire :

Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$

$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 3(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) ; 3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

$= \lambda_1(x_1 + 3y_1) + \lambda_2(x_2 + 3y_2) ; \lambda_1(3x_1 + y_1) + \lambda_2(3x_2 + y_2)$

$= \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2)$

Donc f est linéaire, f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$

2- $Ker(f) = \{x \in \mathbb{K}^2, f(x) = 0_{\mathbb{K}^2}\}$

$u = (x_1, x_2) \in Ker(f) \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ -8x_2 = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{cases}$

$x_1 = x_2 = 0$ d'où $Ker(f) = \{(0,0)\}$

Ainsi, f est injective, or f est un endomorphisme injectif donc un isomorphisme

D'où $Im(f) = \mathbb{K}^2$

3- Soit $B_0 = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$

$f(e_1) = (1x_1, 3x_1)$; $f(e_2) = (3x_2, 1x_2)$

Ainsi on a

$$A = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

4- On cherche les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que : $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathbb{K}^2}) \neq 0$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I_2)$ est non inversible

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$

$\Delta = 36 \Rightarrow \lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 4$

5- Montrons que $\mathbb{K}^2 = \mathrm{Ker}(f - 4id_{\mathbb{K}^2}) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2id)$

. Soit $(x, y) \in \mathbb{K}^2$

$(f + 2id)(x, y) = 0 \Leftrightarrow A + 2I_2 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ \cancel{3x + 3y = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{K} \end{cases}$

Donc $u_1 = (-1, 1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f + 2id)$ notée E_1

. De même on a $u_2 = (1, 1)$ base de $\mathrm{Ker}(f - 4id)$ notée E_2

. Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x_1 + x_2 = 0$

$\Leftrightarrow f(x_1) + f(x_2) = 0 \Leftrightarrow -2x_1 + 4x_2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 6x_2 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

Ainsi . E_1 et E_2 sont en sommes directes

. $E_1 \oplus E_2 \subset \mathbb{K}^2$

or $\mathrm{Dim}(E_1 \oplus E_2) = 2 = \dim(\mathbb{K}^2)$

Donc $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{K}^2$

$\mathrm{Ker}(f + 2id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 4id) = \mathbb{K}^2$

Bastien
MP

6. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ |u_1 \\ |u_2 \end{array} = D$$

$$P = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_0}(id) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ |e_1 \\ |e_2 \end{array}$$

Par théorème de changement de bases on a :

$$A = P D P^{-1} \quad \text{avec } P^{-1} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ |u_1 \\ |u_2 \end{array}$$

7. On a par récurrence sur $n \in \mathbb{Z}$,

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}}_{D^n} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 4^n \\ (-1)\times(-2)^n & 4^n \end{pmatrix} = A^n$$

Maéva | Exercice de colle semaine 7 | MP

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On définit f par :

$$f \left| \begin{array}{l} M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM + MA \end{array} \right.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et donner sa matrice représentative dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$

2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Préciser le rang de f

1) Montrons que f est un endomorphisme. D'une part, l'application est bien de $M_2(\mathbb{R})$ vers $M_2(\mathbb{R})$.

D'autre part montrons que f est linéaire :

Soit $M_1, M_2 \in M_2(\mathbb{R})$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Mq $f(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda f(M_1) + \mu f(M_2)$

$$\begin{aligned} f(\lambda M_1 + \mu M_2) &= A\lambda M_1 + \lambda M_1 A + A\mu M_2 + \mu M_2 A \\ &= \lambda(AM_1 + M_1 A) + \mu(AM_2 + M_2 A) \\ &= \lambda f(M_1) + \mu f(M_2) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Ainsi, f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

De plus, on a : $\mathrm{Mat}_B(f) = $

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \\ /e_4 \end{array} \end{array}$$

2) On cherche le rang de la matrice de f dans la base canonique.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow 2L_4 + L_3$$

Donc $rg(f) = 3$, d'après le théorème du rang,

$\dim(Ker(f)) + rg(f) = \dim(M_2(\mathbb{R}))$

or, $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, $rg(f) = 3$:

Donc $\dim(Ker(f)) = 1$

Cherchons alors la base de $Ker(f)$. Càd, Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Mq $M \in Ker(f) \Leftrightarrow f(M) = 0$

$\Leftrightarrow AM + MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a - c - b & 2b - d - a \\ 2c - d - a & 2d - c - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ -a + 2b - d = 0 \\ -a + 2c - d = 0 \\ -b - c + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ 3b - c - 2d = 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1) \\ -b - 3c - 2d = 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1) \\ -b - c + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ 3b - c - 2d = 0 \\ 8c - 8d = 0 & (L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2) \\ \underbrace{-4c + 4d}_{L_4 = -\frac{1}{2} L_3} = 0 & (L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = d \\ c = d \\ c = d \end{cases} \quad d \in \mathbb{R}$$

D'où $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

et $\dim(\ker(f)) = 1$.

D'autre part, déterminons une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Soit $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Montrons que ces trois vecteurs sont libres.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ on a le système suivant; mq $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & (L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1) \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & (L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1) \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 8\lambda_3 = 0 \ (L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2) \\ -4\lambda_3 = 0 \ (L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$

Donc la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est libre donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ car $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f) = 3$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 4
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 1 vérifiant :

$$P(0) = 1 \text{ et } AB = P(A)$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Fredenc · P etant un polynome, alors pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ on peut ecrire P sous la forme:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{or } P(0) = 1$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{n} a_k \times 0^k = 1$$

$$\Rightarrow a_0 = 1$$

et on a: $AB = P(A)$

$$\Rightarrow AB = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

$$\Rightarrow AB = I_n + \sum_{k=1}^{n} a_k \times A^k$$

$$\Rightarrow I_n = AB - \sum_{k=1}^{n} a_k A^k$$

$$\Rightarrow I_n = A\left(B - \sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}\right)$$

donc A est inversible avec $A^{-1} = B - \sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}$

$$\Rightarrow B = A^{-1} + \sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}$$

$$\text{donc } BA = \left(A^{-1} + \sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}\right) = I_n + \sum_{k=1}^{n} a_k A^k = P(A)$$

or $AB = P(A)$ donc $BA = P(A) = AB$

alors $BA = AB$

A et B sont donc commutative.

Exercice. Montrer que $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P - XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Erem

On a $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$

De plus, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X) - X(\lambda P' + Q')(X)$$
$$= \lambda P(X) + Q(X) - X\lambda P'(X) + (-XQ'(X))$$
$$= \lambda f(P) + f(Q)$$

d'où f linéaire.

On a $P \in \ker(f) \Leftrightarrow P - XP' = 0$
$\Leftrightarrow P = XP$

avec $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$

$$P - XP' = \sum_{k=1}^{m} (a_k - k a_k) X^k + a_0$$

d'où $a_0 = 0$ et $a_k(1-k) = 0 \quad \forall k \in [\![1, n]\!]$
d'où $a_k = 0$ pour $k \neq 1$
finalement $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X)$

Enfin soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$

$Q \in \mathrm{Im}(f)$ si $Q = P - XP'$
Il vient $b_k = a_k(1-k) \quad \forall k \in [\![0, n]\!]$
d'où $b_1 = 0$ et finalement
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X^k, k \neq 1)$

Bombardelli
Martin

Exercice de Khôlle

Soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v c'est à dire que $v(\mathrm{Ker}(u)) \subset \mathrm{Ker}(u)$

Montrons que $v(\mathrm{Ker}(u)) \underset{(1)}{\subset} \mathrm{Ker}\, u$ et $v(\mathrm{Im}\, u) \underset{(2)}{\subset} \mathrm{Im}(u)$

1) Soit $x \in v(\mathrm{Ker}(u))$ ie $\exists\, y \in \mathrm{Ker}(u)$,

$x = v(y)$ Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(u)$

On compose par u :

$$u(x) = u(v(y))$$
$$u(x) = v(u(y)) \quad u \circ v = v \circ u$$
$$= v(0_E) \quad y \in \mathrm{Ker}(u)$$
$$= 0_E \quad v \in \mathcal{L}(E)$$

ainsi $x \in \mathrm{Ker}(u)$

2) Soit $x \in v(\mathrm{Im}(u))$ mq $x \in \mathrm{Im}(u)$ ie: $\exists\, t \in E$, $u(t) = x$ (3)

ie: $\exists\, y \in \mathrm{Im}(u)$, $x = v(y)$ (1)

ie: $\exists\, q \in E$, $u(q) = y$ (2)

$$x = v(y) \quad (1)$$
$$x = v(u(q)) \quad (2)$$
$$x = u(v(q)) \quad (u \circ v = v \circ u)$$
$$x = u(t) \quad t = v(q)$$

On a bien (3)

MATHEY
Ryan
MP

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.
$f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sont libres alors $Rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$
$= 3$
$= \dim(\mathbb{K}^3)$.

Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^3$, on en déduit que f est surjective

f étant surjective et injective elle est donc bijective.

3) $$\mathrm{Mat}_{B_0} f = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

$\mathrm{Mat}_{B_0} f$ est une matrice triangulaire supérieure de rang 3 car $Rg(f) = Rg(\mathrm{Mat}_{B_0}(f))$

4) $\mathrm{Ker}(f - \lambda id) = \{ X \in M_{3,1}(\mathbb{K}) \quad (f-\lambda id)X = 0$
$X = (X, Y, Z) \in \mathbb{K}^3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ & 4-\lambda & 5 \\ & & 6-\lambda \end{pmatrix}}_{f - \lambda id_{\mathbb{K}_3}} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0_{\mathbb{K}_3}}$$

On cherche les valeurs de λ tel que $X = (X, Y, Z)$
$\neq (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}})$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)X + 2Y + 3Z = 0 \\ (4-\lambda)Y + 5Z = 0 \\ (6-\lambda)Z = 0 \end{array} \right.$$ $\leftarrow$ On prend L_3 en pivot

$L_1 \leftarrow (6-\lambda)L_1 - 3L_3$
$L_2 \leftarrow (6-\lambda)L_2 - 5L_3$
L_3

$$\begin{cases} (6-\lambda)\left((1-\lambda)X + 2Y\right) = 0 \\ (4-\lambda)(6-\lambda)Y = 0 \leftarrow L_2 \text{ devient pivot.} \\ (6-\lambda)Z = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{(4-\lambda)}L_2$
L_2
L_3

$$\begin{cases} (6-\lambda)(1-\lambda)X = 0 \\ (4-\lambda)(6-\lambda)Y = 0 \\ (6-\lambda)Z = 0 \end{cases}$$

Par intégrité dans $\mathbb{K}$ et $(X,Y,Z) \neq (0,0,0)$ on obtient :

$$\begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ 4-\lambda = 0 \\ 6-\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 6 \end{cases}$$

Ainsi on obtient $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f) = \{1; 4; 6\}$.

5) Montrons que $\mathbb{K}^3 = \mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{K}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 4\,id_{\mathbb{K}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 6\,id_{\mathbb{K}^3})$.

Soit $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$

$f(u) - 1\,id_{\mathbb{K}^3} = (2x_2 + 3x_3 ; 3x_2 + 5x_3 ; 5x_3)$

$$\mathrm{Ker}(f - 1\,id_{\mathbb{K}^3}) \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution $\mathrm{Ker}(f - 1\,id_{\mathbb{K}^3}) = \{(1; 0; 0) = v_1\}$

$\mathrm{Ker}(f - 4\,id_{\mathbb{K}^3}) = \{(3, 2, 0) = v_2\}$

$\mathrm{Ker}(f - 6\,id_{\mathbb{K}^3}) = \{(8, 2, 5) = v_3\}$

Ces 3 vecteurs sont libres

De plus $\dim(v_1 + v_2 + v_3) = 3 = \dim \mathbb{K}^3$

Mathieu
Ayman
MP

$\mathrm{Ker}(f - id)$, $\mathrm{Ker}(f - 4\,id)$, $\mathrm{Ker}(f - 6\,id)$ sont en sommes directe si et seulement si la décomposition de 0_E est unique.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient directement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ie.
Ainsi on a bien l'unicité de la décomposition de 0.

et donc $\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3})$

MATHEY

Rayan

MP

EXERCICE 2. — *Soit f l'application définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\, 4x_2 + 5x_3, 6x_3)\,. \end{array} \right.$$

1. *Justifier que l'application f est un endomorphisme de $\mathbf{K}^3$.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de l'application f. Qu'en déduire?*
3. *Déterminer la matrice A de l'application f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{K}^3$. Quelle propriété remarquable possède la matrice A?*
4. *Déterminer l'ensemble $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(f)$ des $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que $\mathrm{Ker}\big(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbf{K}^3}\big) \neq \{0_{\mathbf{K}^3}\}$.*
5. *Démontrer :* $\mathbf{K}^3 = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(f)} \mathrm{Ker}\big(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbf{K}^3}\big)$.
6. *Donner une matrice $\mathrm{P} \in GL_3(\mathbf{K})$ et une matrice diagonale $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P\,D\,P}^{-1}$.*
7. *Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.*

Exercice 2 :

1) Pour montrer que f est un endomorphisme on doit montrer que c'est une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^3$.
Par définition $f \mid \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

Soit $\underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{U} \in \mathbb{K}^3$, $\underbrace{(y_1, y_2, y_3)}_{V} \in \mathbb{K}^3$.

Montrons que $f(\alpha U + \beta V) = \alpha f(U) + \beta f(V)$.

$(\alpha U + \beta V) = (\alpha x_1 + \beta y_1 ; \alpha x_2 + \beta y_2 ; \alpha x_3 + \beta y_3)$.

$f(\alpha U + \beta V) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + 2\alpha_2 + 2\beta y_2 + 3\alpha x_3 + 3\beta y_3 ;$
$4\alpha x_2 + 4\beta y_2 + 5\alpha x_3 + 5\beta y_3 ;$
$6\alpha x_3 + 6\beta y_3)$.

$$f(\alpha U+\beta V) = (\alpha(x_1+2x_2+3x_3) + \beta(y_1+2y_2+3y_3);$$
$$\alpha(4x_2+5x_3) + \beta(4y_2+5y_3);$$
$$\alpha(6x_3) + \beta(6y_3)).$$

$$= \alpha f(U) + \beta f(V).$$

Ainsi f est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.

2)° $\ker(f)$:

On cherche $(x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{K}^3$ tel que
$f(x_1', x_2', x_3') = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}; 0_{\mathbb{K}})$.

Ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} x_1' + 2x_2' + 3x_3' = 0 \\ 4x_2' + 5x_3' = 0 \\ 6x_3' = 0 \end{cases}$$

On trouve directement $(x_1', x_2', x_3') = (0_{\mathbb{K}}; 0_{\mathbb{K}}; 0_{\mathbb{K}})$.

ie $\ker(f) = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}})$
$= 0_{\mathbb{K}^3}$

On peut en déduire que f est Injective.

• $\mathrm{Im}(f)$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit (e_1, e_2, e_3) une base de E
tq $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\})$.

$f(e_1) = (1,0,0)$
$f(e_2) = (2;4;0)$
$f(e_3) = (3;5;6)$

Yann
MP

Exercice de Khôlle

Exercice 1. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P + (1-X)P' \end{array}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$.

1) _ $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$

_ Montrons maintenant que f est linéaire :
Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_3$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}_3[X]$,

On a $\begin{cases} \lambda_1 f(u_1) = \lambda_1 (u_1 + (1-x) u_1') \\ \lambda_2 f(u_2) = \lambda_2 (u_2 + (1-x) u_2') \end{cases}$

Montrons que $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2)$:

$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$

$= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + (1-x)(\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2')$

$= \lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_1' (1-x) + \lambda_2 u_2 + \lambda_2 u_2' (1-x)$

$= \lambda_1 (u_1 + (1-x) u_1') + \lambda_2 (u_2 + (1-x) u_2')$

$= \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2)$

f est donc linéaire
_ Ainsi, f est un isomorphisme.

2) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.
Alors $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$\varphi(P)$

$= a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + (1-X)(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2)$

$= a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 - a_1X - 2a_2X^2 - 3a_3X^3$

$(*)$ $= (a_0 + a_1)X^0 + 2a_2X + (-a_2 + 3a_3)X^2 + (-2a_3)X^3$

$= a_0 + a_1 + (2X - X^2)a_2 + (3X^2 - 2X^3)a_3$

D'où $Im(\varphi) = Vect(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$

$(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$ est une base de $Im(\varphi)$
D'où $\dim(Im(\varphi)) = 3$.

3) φ étant un endomorphisme, on a d'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}_3[X])}_{4} = \dim(Ker(\varphi)) + Rg(\varphi)$$
$$= \dim(Ker(\varphi)) + \underbrace{\dim(Im(\varphi))}_{3}$$

D'où $\dim(Ker(\varphi)) = 1$

On résoud maintenant $(*) = 0$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ -a_3 + 3a_3 = 0 \\ -2a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -a_1 \\ a_1 = a_1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

D'où $P = a_1X - a_1 = a_1(X-1)$
$(X-1)$ est donc une base de $Ker(\varphi)$

Dauchez
Léo

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}^2 \\ P \to (P(0), P(1)) \end{array} \right.$$

1) Montrer que f est linéaire
2) Former la matrice de f dans les bases canoniques
3) Montrer que f est un isomorphisme

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P,Q) \in \mathbb{R}_1[X]^2$

$f(\lambda P+Q) = ((\lambda P+Q)(0), (\lambda P+Q)(1)) = (\lambda P(0)+Q(0), \lambda P(1)+Q(1))$

$= \lambda(P(0), P(1)) + (Q(0), Q(1)) = \lambda f(P) + f(Q) \Rightarrow f$ linéaire

2) Base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$: $C_{\mathbb{R}_1[X]} = (1, X)$

Base canonique de $\mathbb{R}^2$: $C_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1))$

$f(1) = (1(0), 1(1)) = (1,1) = (1,0) + (0,1)$

$f(X) = (X(0), X(1)) = (0,1)$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{C_{\mathbb{R}_1[X]}, C_{\mathbb{R}^2}} f = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(1) & f(X) \\ \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,0) \\ (0,1) \end{array} \end{array}$

3) $\det(\mathrm{Mat}_{C_{\mathbb{R}_1[X]}, C_{\mathbb{R}^2}}(f)) = 1 \neq 0$, la matrice est inversible
donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_1[X]}\} \Rightarrow f$ est injective. (1)

Le théorème du rang nous donne $\mathrm{Rg}(f) = 2$
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$, or $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ est surjective (2)

(1)+(2) $\Rightarrow f$ est un isomorphisme.

Théorème

Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par :

$u(P) = P(X+1)$ et $v(P) = P(X-1)$

Déterminer $rg(u-v)$

On a d'après le théorème du rang :

$\dim(u-v) = \dim(\ker(u-v)) + rg(u-v)$

or $(u-v) \in \mathbb{R}_n[X]$ d'où $\dim(u-v) = n+1$

Reste à déterminer $\dim(\ker(u-v))$

Or $\ker(u-v) = \{u(P) - v(P) = 0,\ P \in \mathbb{R}[X]\}$

On cherche donc $u(P) = v(P)$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$\Rightarrow P(X+1) = P(X-1)$

Pour ; $X=0$: $P(1) = P(-1)$ $\quad X=4$: $P(5) = P(3)$

$X=1$: $P(2) = P(0)$

$X=2$: $P(3) = P(1)$

On a alors $P(1) = P(-1) = P(3) = P(5) = \dots$

Ainsi , avec $k \in \mathbb{Z}$, $P(2k+1)$ est racine de $u-v$

Or un polynome a un nombre de racine égal ou inférieur à son degré. Ici , $u-v$ a une infinité de racine , il est alors le polynome nul, étant le seul polynome avec une infinité de racine.

On a alors $P(2k+1) - a = 0$, P est un polynome constant. Ainsi , $\ker(u-v) = a$, $a \in \mathbb{K}$

D'où $\dim(\ker(u-v)) = 1$

$\dim(u-v) = \dim(\ker(u-v)) + rg(u-v)$

$\Rightarrow rg(u-v) = n+1 - 1 = n$

Exercice 1. Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $u(P) = \frac{1}{2}(1-X^2)P'' + XP' - P$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_0$ de $\ker(u)$ et une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{I}m(u)$.
3. Montrer que $\ker(u) \oplus \mathcal{I}m(u) = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Ecrire la matrice de u dans la base relative à cette décomposition.

Laetitia

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Vérifions que $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$

$P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow P' \in \mathbb{R}_1[X],\ P'' \in \mathbb{R}_0[X]$

D'où $\frac{1}{2}(1-X^2)P'' \in \mathbb{R}_{0+2}[X] = \mathbb{R}_2[X]$

$XP' \in \mathbb{R}_{1+1}[X] = \mathbb{R}_2[X]$

Ainsi, $\frac{1}{2}(1-X^2)P'' + XP' - P \in \mathbb{R}_2[X]$

. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

$u(\lambda P + \mu Q) = \frac{1}{2}(1-X^2)(\lambda P+\mu Q)'' + X(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q)$

$= \lambda\left(\frac{1}{2}(1-X^2)P'' + XP' - P\right) + \mu\left(\frac{1}{2}(1-X^2)Q'' + XQ' - Q\right)$

$= \lambda u(P) + \mu u(Q)$.

Donc u est une application linéaire.

D'où u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

2. . Soit $P \in Ker(u)$.

$P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ P = aX^2 + bX + c$.

$u(P) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-X^2)2a + X(2aX+b) - (aX^2+bX+c) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -a + 2a - a = 0 \\ b - b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ a = c,\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow P = a(X^2+1) + bX, \quad a, b \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow P \in Vect(X^2+1, X) \Rightarrow Ker(u) \subset Vect(X^2+1, X)$.

Or $X^2+1, X \in Ker(u)$. Donc $Vect(X^2+1, X) \subset Ker(u)$

Ainsi, $Ker(u) = Vect(X, X^2+1)$.

. $Im(u) = Vect(u(1), u(X), u(X^2))$ car $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On obtient : $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(-1, 0, \frac{1}{2}) = \mathrm{Vect}(1)$

On pose alors : $B_0 = (X, X^2+1)$, $B_1 = (1)$.

3. Par concaténation des bases, la famille $B = (1, X, X^2+1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$.

Comme la famille est échelonnée en degré, elle est libre.

En effet, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda_1 + \lambda_2 X + \lambda_3 (X^2+1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

De plus, $\mathrm{Card}(B) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

Donc B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$. (*)

Par ailleurs, par la formule de Grassmann,

$$\dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) - \dim(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u))$$
$$= 2 + 1 - 3 = 0 = \dim(0_{\mathbb{R}_2[X]})$$

Or $\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$

Ainsi $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. (**)

Par (*) et (**), $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

4. $$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(1) & u(X) & u(X^2+1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /1 \\ /X \\ /X^2+1 \end{array}$$

Paul — Kholle n°7. — MP

Exercice 2
Soit Q un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$.
Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $f(P)$ est le reste de la division de P par Q.
Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$ dont on déterminera les caractéristiques.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On note f l'endomorphisme tel que $f(P)$ est le reste de la division de P par Q, qu'on notera $R \in \mathbb{R}[X]$,

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$f(P) = R \quad \text{avec } R[X]$$

Donc par le théorème de la division euclidienne,

$$\exists ! (B, R) \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} P = BQ + R \\ 0 \leq \deg(R) < \deg(Q) \end{cases}$$

Si de plus, on effectue la division de R par Q comme $\deg(R) < \deg(Q)$ le reste est encore R, donc,

$$f \circ f(P) = f(R) = R = f(P)$$

Donc f est bien un projecteur.
D'après notre connaissance des projecteur on sait que

$$\mathbb{R}[X] = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

et de plus, que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - id_{\mathbb{R}[X]})$

Regardons, si $P \in \mathrm{Im}(f) = \ker(f - id_{\mathbb{R}[X]})$ alors,

$$f(P) - id_{\mathbb{R}[X]}(P) = 0$$

$$\Rightarrow f(P) = P.$$

Donc le reste de la division de P par Q est P. comme avant, on en déduit que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si $P \in \ker(f)$, alors,

$$f(P) = 0$$

Donc que le reste de la division de P par Q est nul.

$$\exists!(B,R) \in \mathbb{R}[X], P = BQ + \underbrace{R}_{=0} \quad 0 \leq \deg(R) < \deg(Q)$$

on en déduit que Q divise P.