Martin

Exercice de khôlle

Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel qu'on suppose de dimension finie n. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$r_k = rg(f^k)$$

1) Démontrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire

Montrons que $Im(f^{k+1}) \subset Im(f^k)$

Soit $x \in Im(f^{k+1})$ alors il existe $x' \in E$ tel que $f^{k+1}(x') = x$

or $f^{k+1}(x') = f^k(\underbrace{f(x')}_{\in E \text{ car } f \text{ automorphism}}) = x$, ainsi $x \in Im(f^k)$ et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$

On a donc $Im(f^{k+1}) \subset Im(f^k) \subset \dots \subset Im(f)$

Ainsi $0 \leq r_{k+1} \leq r_k \leq \dots \leq r_1 \leq r_0$

(r_k) étant une suite d'entiers décroissante et minorée,

(r_k) stationne à partir d'un certain rang

2) On note $p = \min\{k \in \mathbb{N},\ r_k = r_{k+1}\}$ Montrer que $p \leq n$

D'après la question 1) on a :

$r_0 = rg(f^0) = rg(Id) = n \geq r_1 \geq \dots \geq r_k \geq r_{k+1}$

On raisonne par l'absurde $r_0, \dots, r_{n+1}$ deux à deux à deux distincts

comme ils sont deux à deux distincts on a alors

$\underset{\overset{\parallel}{n}}{r_0} > r_1 > \dots > r_n > r_{n+1}$ or comme $r_0 > r_1 \Rightarrow r_1 \leq n-1$

de même $r_n \leq n - n = 0$ mais $r_{n+1} \leq n - (n+1) = -1$

Or la dimension ne peut pas être negative on en déduit que il existe un rang $p < n+1$ tel que $r_p = r_{p+1}$
D'où l'innegalité $p \leq n$.

3) On introduit la suite des noyaux itérés $(Ker(f^k))$

(a) Montrer que pour tout $k \geq p$, $Ker(f^k) = Ker(f^{k+1})$

Montrons que $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$
Soit $x \in Ker(f^{k})$ montrons que $x \in Ker(f^{k+1})$
d'après la définition de Ker,
$f^k(x) = 0_E$ en composant par $f : E \to E$ comme $0_E \in E$

$f(f^k(x)) = \underbrace{f(0_E) = 0_E}_{f \text{ est un endomorphisme}}$ ainsi $f^{k+1}(x) = 0_E \Rightarrow x \in Ker(f^{k+1})$

On applique le theorème du rang pour k et pour $k+1$ comme E est de dimension finie

Pour k $\dim(Ker(f^k)) + r_k = \dim(E) = n$
Pour $k+1$ $\dim(Ker(f^{k+1})) + r_{k+1} = \dim(E) = n$
Or comme on a supposé $k \geq p$; $r_k = r_{k+1}$ (Question 2)
$\dim(Ker(f^k)) = \dim(E) - r_k = \dim(E) - r_{k+1} = \dim(Ker(f^{k+1}))$
Par transitivité
$\dim(Ker(f^k)) = \dim(Ker(f^{k+1}))$
D'après le critère d'égalité de deux sous espaces vectoriels, on a $Ker(f^k) = Ker(f^{k+1})$ comme $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$

Martin Exercice de khôlle (suite)

(b) En deduire la decomposition
$E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$

Montrons que $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont en somme directe
(*) Comme $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont inclus dans E,
montrons que $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0_E\}$
Par double inclusion :

$\boxed{\supset}$ Inclusion trivial

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p)$ mq $x = 0_E$

Comme $x \in \mathrm{Im}(f^p)$, $\exists x' \in E, f^p(x') = x$

En composant par f^p (comme $x \in E$) on a : $f^{2p}(x') = f^p(x)$

Or $x \in \mathrm{Ker}(f^p)$: $f^{2p}(x') = 0_E$
D'après la question 3) a) $\mathrm{Ker}(f^{2p}) = \mathrm{Ker}(f^p)$ car $2p \geqslant p$
or $x' \in \mathrm{Ker}(f^{2p})$ donc $x' \in \mathrm{Ker}(f^p)$

On en deduit $f^p(x') = 0_E$

Ainsi : $x = 0_E$, (*) d'après le critère pour que deux sous espaces vectoriels soient en somme directe :
L'ecriture $\mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$ a du sens

D'après le theorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f^p)) + \dim(\mathrm{Im}(f^p))$$

Or d'après la formule de grassmann :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)) \quad (**)$$

De plus comme $\begin{cases} \mathrm{Ker}(f^p) \subset E \\ \mathrm{Im}(f^p) \subset E \end{cases}$

$\forall x \in \mathrm{Ker}(f^p) \subset E$

$\forall y \in \mathrm{Im}(f^p) \subset E$, x et y appartienne à E

Donc $x+y$ ~~sont~~ est inclu dans E car E est stable par addition on en déduit que $\mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) \subset E$ et avec l'égalité $(**)$ le critère d'égalité pour deux sous espaces vectoriels nous donne (E est un sev trivial de E)

$$E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$$

Aissam

Exercice 2 : 1. $\boxed{\text{Démontrer que E et F sont des sev de } \mathbb{K}^3}$

$\boxed{\text{Soient } E = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : 2x + y + z = 0\}}$

$E = \{(x, -2x - z, z) \in \mathbb{K}^3 : y = -2x - z\}$

$E = \text{Vect}((1,-2,0);(0,-1,1))$

Soit $\boxed{F = \{(x,x,-x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,1,-1))}$

Donc F et E sont des sev de $\mathbb{K}^3$.

2. $\boxed{\text{Déterminer } E \cap F :}$

Soit $x \in F$, $x \in E$ alors on a :

$2x + x - x = 0 \Rightarrow x = 0$

Ainsi $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}}\}$ l'inclusion réciproque étant immédiate.

Exercice 12. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq b$. On pose pour tout $p \in [\![0,n]\!]$:

$$Q_p = (X-a)^{n-p}(X-b)^p$$

Démontrer que la famille $(Q_p)_{0 \leq p \leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$. Qu'en déduire ?

On raisonne par récurrence finie ; $\forall p \in [\![0,n]\!]$, on pose

$P(p)$: "La famille $(Q_p)_{0 \leq p \leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$"

Pour $p = 0$:

$$\forall \lambda_0 \in \mathbb{K}, \quad \lambda_0 Q_0 = \lambda_0 \underbrace{(X-a)^n}_{\neq 0 \Leftrightarrow X \neq a} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$, On suppose que $P(p)$ est vraie.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$

$\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_{p+1} Q_{p+1} = 0$

$\lambda_0 (X-a)^n + \lambda_1 (X-a)^{n-1}(X-b) + \dots + \lambda_{p+1}(X-a)^{n-(p+1)}(X-b)^p = 0 \quad *$

On évalue (*) en b :

$$\lambda_0 \underbrace{(b-a)^n}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$$

On factorise (*) par $(X-b)$:

$$\underbrace{(X-b)}_{\neq 0}\left[\lambda_1 (X-a)^{n-1} + \dots + \lambda_{p+1}(X-a)^{n-(p+1)}(X-b)^{p-1}\right] = 0$$

$$\lambda_1 (X-a)^{n-1} + \dots + \lambda_{p+1}(X-a)^{n-(p+1)}(X-b)^{p-1} = 0$$

Or d'après $P(p)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p+1} = 0$

Donc $P(p+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence $P(p)$ est vraie pour tout $p \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 1
On donne $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, x-z, 2x+y)$.

1. L'application f est-elle bijective ?
2. On note $E_f(-1) = \mathrm{Ker}(f+Id)$ et $E_f(2) = \mathrm{Ker}(f-2Id)$.
   Montrer que les sous-espaces $E_f(-1)$ et $E_f(2)$ sont des droites vectorielles dont on notera e_1 et e_2 les vecteurs générateurs.
3. Montrer que :
$$E = Ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2)$$

Frem

Exercice 1

1) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que l'on a les équivalences suivantes :

f injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Leftrightarrow f$ bijective $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$

On vérifie si l'application est injective :
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ 2x+y = 0 \\ x = z \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Il y vient, $\ker(f) = \mathrm{Vect}(1,-2,1) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
finalement f n'est pas bijective

2) On note $E_f(-1) = \ker(f+id)$ et $E_f(2) = \ker(f-2Id)$

Dans ce cas, $(x,y,z) \in \ker(f+Id) \Leftrightarrow (f+Id)(x,y,z) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 0 \\ x+y-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 0 \\ x = -2z \end{cases} \Rightarrow y = -3z$$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$(z \in \mathbb{R})$

finalement $\ker(f+Id) = \mathrm{Vect}(-2,-3,1)$

De même $(x,y,z) \in \ker(f - 2Id)$

$\Leftrightarrow (f - 2Id)(x,y,z) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-2y-z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-z=0 \\ -y=0 \quad L_2 \leftarrow L_1+L_2 \\ x=z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \quad (z \in \mathbb{R}) \\ y = 0 \end{cases}$

finalement $\ker(f - 2Id) = Vect(1,0,1)$

3) On rappelle que l'on a $E = \ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(E_f(-1)) + \dim(E_f(2)) \\ 0_E = \underset{\in \ker(f)}{x_1} + \underset{\in \ker(f+Id)}{x_2} + x_3) \in \ker(f - 2Id) \end{cases}$

Dans ce cas, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$0_E = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha = 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\beta = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \alpha = 0 = \beta = \gamma \end{cases}$

finalement $0_E = 0_E + 0_E + 0_E$ de plus $\ker(f)$

$E_f(-1)$ et $E_f(2)$ étant des droite vectorielles

on a $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\ker(f)) + \dim(E_f(-1)) + \dim(E_f(2))$

Ainsi $E = \ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2)$

Corentin | Exercice de khôlle | Pour le 12/10/2000

Montrer que l'ensemble
$$E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid Tr(A) = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En donner une base pour $n=2$.

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

. $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

. $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \in E$

Montrons maintenant que E est stable par combinaison linéaire.

Soit A et $B \in E$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda_1 A + \lambda_2 B \in E$.

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = \lambda_1 \begin{array}{cc} f(e_1) \cdots f(e_n) & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array} + \lambda_2 \begin{array}{cc} f(v_1) \cdots f(v_n) & \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \cdots & \lambda_1 a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 b_{11} & \cdots & \lambda_2 b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2 b_{n1} & \cdots & \lambda_2 b_{nn} \end{pmatrix}$$

Or on sait que $Tr(A) = 0$ et $Tr(B) = 0$

D'où

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 a_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_2 b_{ii} = 0$$

Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_2 b_{ii} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 a_{ii} + \lambda_2 b_{ii} = 0$$

On vient de montrer que $\boxed{Tr(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = 0}$

maintenant, $\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \cdots & \lambda_1 a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 b_{11} & \cdots & \lambda_2 b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2 b_{n1} & \cdots & \lambda_2 b_{nn} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 b_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 b_{n1} & \cdots & \lambda_1 a_{nn} + \lambda_2 b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Donc $\lambda_1 A + \lambda_2 B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Tr(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = 0$

Donc $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire.

D'où $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Donner maintenant une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On note $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $Tr(C) = 0$

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$$

On $Tr(C) = 0$, d'où $a = -d$.

ainsi

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \end{array}$$

$$C = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où, $\boxed{Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Anna

On munit l'ensemble E, inclut dans $\mathbb{R}^2$, des lois :

$(x_1 ; x_2) + (y_1 ; y_2) := (x_1 + y_1 ; x_2 + y_2)$

$\lambda(x_1 ; x_2) := (\lambda x_1 ; 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

E est-il un espace vectoriel ?

Pour montrer que E est un espace vectoriel, on regarde si chacune de ses lois vérifie les points suivants :

- commutativité
- associativité
- opérateur neutre

* Pour la première loi :

- $x_1 + y_1 = y_1 + x_1$ et $x_2 + y_2 = y_2 + x_2$

  $\rightarrow$ c'est commutatif.

- Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}$ tel que $(z_1, z_2) + (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$.

  Donc • $((z_1, z_2) + (x_1, x_2)) + (y_1, y_2) = (z_1 + x_1 ; z_2 + x_2) + (y_1 ; y_2)$

  $= (z_1 + x_1 + y_1 ; z_2 + x_2 + y_2)$

  • $(z_1, z_2) + ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = (z_1, z_2) + (x_1 + y_1 ; y_1 + y_2)$

  $= (z_1 + x_1 + y_1 ; z_2 + x_2 + y_2)$

  Par commutativité dans $\mathbb{R}$, $((z_1, z_2) + (x_1, x_2)) + (y_1, y_2) = (z_1, z_2) + ((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$

  $\rightarrow$ c'est associatif.

- L'opérateur neutre d'une loi $(+)$ est 0.

  Donc $(0,0) + (x_1, x_2) = (0 + x_1 ; 0 + x_2)$

  Dans $\mathbb{R}$, l'opérateur neutre est 0, $(0,0) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

  De même pour (y_1, y_2).

  $\rightarrow (0,0)$ est l'opérateur neutre de la loi ici.

* Pour la deuxième loi :

- $\lambda x_1 = x_1 \lambda$ et $\lambda x_2 = x_2 \lambda = 0$

  $\rightarrow$ c'est commutatif.

- Soit $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda(x_1, x_2)(y_1, y_2)$

  Donc • $(\lambda(x_1 ; x_2))(y_1, y_2) = (\lambda x_1, 0)(y_1, y_2)$

  $= (\lambda x_1 y_1, 0)$

$\lambda((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = \lambda((x_1y_1;0)(0,0))$

$= (\lambda x_1 y_1 ; 0)$

Par commutativité dans $\mathbb{R}$, $(\lambda(x_1,x_2))(y_1,y_2) = \lambda((x_1,x_2)(y_1,y_2))$

→ c'est associatif.

- L'opérateur neutre dans une loi $(.)$ est 1.

Donc $\lambda(1,1) = (\lambda, 0)$

↳ ça ne marche pas pour le deuxième terme.

→ la loi ici n'a pas d'opérateur neutre.

Ainsi, E n'est pas un espace vectoriel.

Anna

1. La famille $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$, où $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$ et $v_3 = (0, -1, 5)$ est-elle libre ? Génératrice ?

2. Mêmes questions pour la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$, où $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ et $v_3 = (2, 3, 2)$.

---

1. Si la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, c'est-à-dire qu'elle vérifie des combinaisons linéaires nulles.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$, tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 5\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_2 - 0\lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow 5L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \end{cases} \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

La famille est donc liée.

Maéva Exercice de Colle Semaine 6 MP

Enoncé : Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = x + y + z = 0\}$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Montrons que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$

$F = \mathrm{Vect}((2,1,0),(-3,0,1))$ donc F est un sev de $\mathbb{R}^3$

D'autre part, soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: le triplet appartient à G ssi :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 4z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

Donc $G = \mathrm{Vect}((1,-2,1))$ donc G est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Montrons alors que F et G sont supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire, montrons que $\begin{cases} F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\} & (1) \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) & (2) \end{cases}$

Or, (1), Par double inclusion :

$\boxed{\supset}$ évident car F et G sev de $\mathbb{R}^3$ et l'intersection de deux sev de

$\mathbb{R}^3$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ donc $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset F \cap G$.

$\boxed{\subset}$ Soit $(x, y, z) \in F \cap G$, montrons que $(x, y, z) = (0,0,0)$

On a : $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ \quad 7y - 10z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \quad 3y - 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ \quad 7y - 10z = 0 \\ \quad\quad 16z = 0 & L_3 \leftarrow 7L_3 - 3L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$

Donc $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

(2) On utilise la formule de Grassmann :

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Or, d'après (1) $\dim(F \cap G) = 0$

Donc $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$

Or, $\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 1$

Donc $\dim(F + G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Ainsi $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$

Donc F et G sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

Marine

Exercice 2

Dans $E = \mathbb{R}^4$; on considère l'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in E | x = y \text{ et } x - y + t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et déterminer une base de F.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.
3. Le supplémentaire trouvé est-il unique ?

1) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x,y,z,t) \in E,\ x = y,\ x - y + t = 0\}$.

Soit $u \in F$, $u = (x, y, z, t)$ alors $\begin{cases} x - y + t = 0 \\ y = x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t + x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = y \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}.$

Ainsi $u = (y, y, z, 0) = y(1,1,0,0) + z(0,0,1,0)$.

D'où,

$$F = \text{Vect}(\underbrace{(1,1,0,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,0,1,0)}_{u_2}).$$

F est un sous espace vectoriel engendré par u_1 et u_2.
u_1 et u_2 étant non colinéaire, ils sont libres et donc (u_1, u_2) est une base de F.

2) Trouvons G, un sous espace vectoriel tel que, $E = F \oplus G$.
on prend $G = \text{Vect}(\underbrace{(1,0,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{e_4})$.

- on a $\dim E = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$
  et $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4$. car e_1, e_4 sont libres en tant que vecteurs de la base canonique.

- Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
  Soit $u \in F \cap G$, alors :
  $u \in F$: $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (x, x, y, 0)$.
  $u \in G$: $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(1,0,0,0) + \mu(0,0,0,1)$
  $u = (\lambda, 0, 0, \mu)$.

D'où en égalisant :

$u = (\lambda, 0, 0, \mu) = (x, x, y, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ x = 0 \\ y = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$ et ainsi $u = (0,0,0,0)$

On a bien $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

et donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ Ainsi $E = F \oplus G$, d'après la caractérisation de deux supplémentaires.

3) Le supplémentaire trouvé n'est pas unique, on aurait par exemple pû prendre

$G = Vect(\underbrace{(0,1,0,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{e_4})$.

Frederic

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. montrer f diagonalisable et determiner une base de vecteur propre.

2) Calculer alors $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} A^{2p}$

trouvons les valeur de λ telle que $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (4-\lambda)((5-\lambda)^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow (4-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda+6) = 0$

donc on obtient les valeurs de 4 et 6

trouvons une base de $\mathrm{Ker}(f - 4\,id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - 6\,id_E)$

on cherche $X \in \mathbb{R}^3$ telle que $f - 4\,id_E = 0$

$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$ donc la base de $\mathrm{Ker}(f - 4id_E)$ est $((1,0,1),(0,1,0))$ note e_1' et e_2'

On cherche $X \in \mathbb{R}^3$ telle que $f - 6\,id_E = 0$

soit $\begin{cases} -x \quad - y = 0 \\ x - 2y - y = 0 \\ -x \quad - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ x - 2y - y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = y \\ -x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -y \\ x = -y \end{cases}$

alors $e_3' = (-1,1,1)$ d'apres le theoreme de changement de base dans la base e_1', e_2', e_3'

$A = PDP^{-1}$ tel que,

or D diagonale donc c'est diagonalisable. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

2) trouvons P^{-1}:

trouvons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que

$e_1 = a e_1' + b e_2' + c e_3' \Rightarrow \begin{cases} 1 = a - c \\ 0 = b - c \\ 0 = a + c \end{cases}$

donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{2}$

trouvons $e_2 = a e_1' + b e_2' + c e_3'$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a - c \\ 1 = b - c \\ 0 = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a - c \\ 1 = b - a \\ 0 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c \\ 1 = b \\ a = 0 \end{cases}$$

trouvant $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $e_3 = a e_1' + b e_2' + c e_3'$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a - c \\ 0 = b - c \\ 1 = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a - c \\ 0 = b - c \\ 1 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \quad b = \frac{1}{2}$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, montrons par reccurence que $A^{2P} = PD^{2P}P^{-1}$

initialisation : $n = 1$: on a $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$

Héredité : soit $P \in \mathbb{N}$ On suppose $A^{2P} = PD^{2P}P^{-1}$

montrons $A^{2(p+1)} = PD^{2(p+1)}P^{-1}$

or $A^{2(p+1)} = A^{2P} \times A^2 = PD^{2P}P^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}$
$= PD^{2P+2}P^{-1}$

d'après le principe de reccurence on a : $A^{2P} = PD^{2P}P^{-1}$

donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2P)!} A^{2P} = \sum_{p=0}^{+\infty} P \frac{D^{2P}}{(2P)!} P^{-1}$

$$= P \begin{pmatrix} ch(4) & 0 & 0 \\ 0 & ch(4) & 0 \\ 0 & 0 & ch(6) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{ch(4)+ch(6)}{2} & 0 & \frac{ch(4)-ch(6)}{2} \\ \frac{-ch(4)-ch(6)}{2} & ch(4) & \frac{ch(4)+ch(6)}{2} \\ \frac{ch(4)-ch(6)}{2} & 0 & \frac{ch(4)+ch(6)}{2} \end{pmatrix}$$

Pierre

Exercice 1
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note :

$$F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall j \in [\![0,n]\!] - \{i\},\ P(a_j) = 0\}$$

Montrer que $F_0, \dots F_n$ désignent des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'ils vérifient :

$$F_0 \oplus \dots \oplus F_n = \mathbb{R}_n[X]$$

On veut montrer que $\forall i \in [\![0;n]\!]$ F_i est un sous espace vectoriel.

- Le polynôme nul vérifie $\forall j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\}$, $P(a_j) = 0$ donc $0_{\mathbb{R}_n[X]} \in F_i$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$: $\lambda \underset{=0}{P(a_j)} + \underset{=0}{Q(a_j)} = 0$
$\iff (\lambda P + Q)(a_j) = 0$

Et ainsi, F_i est stable par combinaison linéaire, c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

Reste à montrer qu'ils vérifient $F_0 \oplus \dots \oplus F_n = \mathbb{R}_n[X]$.

- On remarque que $\forall j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\}$, a_j est racine de P donc on peut factoriser P :

. $P \in F_0 \iff \forall j \in [\![1;n]\!]$, $P(a_j) = 0$

$\iff P(X) = \lambda (X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$

donc $F_0 = \text{vect}(\underbrace{(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)}_{Q_0})$.

Q_0 est un polynôme et donc F_0 est généré par ce polynôme. donc, $\dim(F_0) = 1$.

De la même façon, $F_1 = \text{vect}((X-a_0)(X-a_2)\dots(X-a_n))$.

En itérant le processus, $\forall i \in [\![0;n]\!]$, F_i est généré par un polynôme Q_i et est donc de dimension 1.

- La dimension de la somme des F_i est donc $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

- De plus, il existe λ_i, $i \in [\![0;n]\!]$ tels que :

$0_{\mathbb{R}_n[X]} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i$

on évalue en a_0 $\rightarrow$ C'est-à-dire : $0_{\mathbb{R}_n[X]} = \lambda_0 \underbrace{Q(a_0)}_{\neq 0} + \underbrace{\lambda_1 Q(a_0) + \dots + \lambda_n Q(a_0)}_{= 0}$

Donc $\lambda_0 = 0$.

On itère le processus en évaluant le polynôme en tous les a_i et montre donc que tous les λ_i sont nuls.

Ainsi on a $\begin{cases} \dim\left(\sum_i F_i\right) = \dim \mathbb{R}_n[X] \\ 0_{\mathbb{R}_n[X]} = 0_{F_0} + 0_{F_1} + \dots + 0_{F_n} \end{cases}$

Et donc d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels en dimension finie, les F_i sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Colle 86 Dorian

Exercice 1
On donne $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, x-z, 2x+y)$.

1. L'application f est-elle bijective ?
2. On note $E_f(-1) = \text{Ker}(f+Id)$ et $E_f(2) = \text{Ker}(f-2Id)$.
Montrer que les sous-espaces $E_f(-1)$ et $E_f(2)$ sont des droites vectorielles dont on notera e_1 et e_2 les vecteurs générateurs.
3. Montrer que :
$$E = Ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2)$$

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, x-z, 2x+y) \end{array} \right.$ une application linéaire.

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z, x-z, 2x+y) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-2z=0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y-2z=0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}$$

Donc $Ker(f) = Vect((\underbrace{1,-2,1}_{e_0}))$

$Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc f n'est pas injective
Ainsi f est non bijective.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f+id) \Leftrightarrow (2x+y+z,\ x+y-z,\ 2x+y+z) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 0 \\ x+y-z = 0 \\ 2x+y+z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y+3z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x+y-z = 0 \\ -y+3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 3z \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f+id) = \mathrm{Vect}((\underbrace{-2,3,1}_{e_1}))$

$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f-2id) \Leftrightarrow (-x+y+z,\ x-2y-z,\ 2x+y-2z) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ x-2y-z = 0 \\ 2x+y-2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f-2id) = \mathrm{Vect}((\underbrace{1,0,1}_{e_2}))$

Dorian

3. $Ker(f)$, $E_f(-1)$ et $E_f(2)$ sont des sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0, -1 et 2 respectivement et donc ils sont en somme directe.

On a $Ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2) \subset \mathbb{R}^3$

On $\dim(Ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2)) = \dim(Ker(f)) + \dim(E_f(-1)) + \dim(E_f(2))$

$$= 1+1+1$$
$$= 3$$
$$= \dim(\mathbb{R}^3)$$

Ainsi, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus E_f(-1) \oplus E_f(2)$

Valentin.

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que la famille $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Q}^{m+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k \ln(p_k) = 0$

Or $\lambda \in \mathbb{Q}$, c'est à dire qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, tel que $\forall k \in [\![0,m]\!], \lambda_k = \frac{p}{q}$, en multipliant par leur ppcm on obtient $\forall k \in [\![0,m]\!], \lambda_k \in \mathbb{Z}$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_k \ln(p_k) = \sum_{k=0}^{m} \ln(p_k)^{\lambda_k} = 0$$

$$= \ln\left(\prod_{k=0}^{m} p_k^{\lambda_k}\right) = 0$$

nécessairement on a : $\prod_{k=0}^{m} p_k^{\lambda_k} = 1$

$$\Rightarrow \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j>0}}^{m} p_j^{\lambda_j} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ \lambda_k<0}}^{p} p_k^{\lambda_k} = 1$$

$$\Rightarrow \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j>0}}^{m} p_j^{\lambda_j} = \prod_{\substack{k=1 \\ \lambda_k<0}}^{p} p_k^{-\lambda_k} \quad \text{avec } -\lambda_k > 0$$

Or d'après le théorème fondamentale de l'arithmétique la décomposition en produit de facteur premier est unique. Donc nécessairement, on a pour tous $k \in [\![0,m]\!]$, $\lambda_k = 0$ et la famille est libre.

Exercice 3 Soit Q un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. On définit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $f(P)$ est le reste de la division de P par Q. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$ dont on déterminera les caractéristiques.

Clara

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & R \end{array} \right.$$ avec R le reste de la division de P par Q.

Montrons que f est un projecteur $\Leftrightarrow \begin{cases} f \circ f = f & (2) \\ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X]) & (1) \end{cases}$

(1) Soient $P, Q' \in \mathbb{R}[X]$, Soit $\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \alpha Q') &= f(\lambda(A(x)Q(x) + R(x)) + \alpha(A'(x)Q(x) + R'(x))) \\ &= f((\lambda A(x) + \alpha A'(x))Q(x) + \lambda R(x) + \alpha R'(x)) \\ &= \lambda R(x) + \alpha R'(x) \\ &= \lambda f(P) + \alpha f(Q') \end{aligned}$$

$P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$
$Q'(x) = A'(x)Q(x) + R'(x)$
avec $\deg(R) \leq \deg(Q) - 1$
$\deg(R') \leq \deg(Q) - 1$

donc f est une application linéaire, de plus $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par définition de l'application, donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

(2) On a : $f(P) = R$

On compose par f : $f(f(P)) = f(R) = R = f(P)$

car $R = 0.Q + R$

donc f est un projecteur

On note $n = \deg(Q)$.

donc $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & R \end{array} \right.$ car $\deg R \leq \deg(Q) - 1$.

Abengue
Emilie

Exercice 7. On considère 3 réels a, b, c et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

1) à quelle condition A est inversible ?

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé A.
Démontrer que l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$g = f^3 - cf^2 - bf - a\,id_{\mathbb{R}^3}$ est nul

3) En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A lorsque A est inversible.

4) Déterminer une base de $\ker(g)$ lorsque A n'est pas inversible

---

1) A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$

En développant selon la première ligne :

$\det(A) = (-1)^4 \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a.$

Il faut donc que $a \neq 0$.

2) Revenons à la représentation matricielle et montrons que $Mat_{can}(g) = A^3 - cA^2 - bA - aI_3 = 0$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & b & a \\ 0 & c & b+c^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & b & a \\ 0 & c & b+c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ac & ab+ac^2 \\ b & a & bc+ac \\ c & b+c^2 & cb+bc+c^2b \end{pmatrix}$

On a $A^3 - cA^2 - bA - aI_3$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si $Mat_{can}(g) = 0$, $g = 0$

3)

Nous avons d'après 2,

$0 = A^3 - cA^2 - bA - aI_3$

$aI_3 = A^3 - cA^2 - bA$

$I_3 = \frac{1}{a}A^3 - \frac{c}{a}A^2 - \frac{b}{a}A$ ↳ $a \neq 0$ d'après 1)

$I_3 = A\left(\frac{1}{a}A^2 - \frac{c}{a}A - \frac{b}{a}I_3\right)$

Donc A est inversible à droite ce qui en dimension finie revient à dire que A est inversible.

Et on a $A^{-1} = \frac{1}{a}A^2 - \frac{c}{a}A - \frac{b}{a}I_3$.

4) Le noyau de f est celui de A.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

(nous sommes dans le cas où $a = 0$)

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x+bz \\ y+cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + bz = 0 \\ y + cz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -bz \\ y = -cz \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} -bz \\ -cz \\ z \end{pmatrix}$ $z \in \mathbb{R}$.

Ce qui nous permet de dire que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-b, -c, 1))$.

~ Fin ~

Yann
MP

Exercice de Khôlle S6 :

1. Soit $(e_1, e_2, , ..., e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $F = \text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_n)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on note $F_a = \text{Vect}(e_1 + a, e_2 + a, ..., e_n + a)$

(a) Montrer que $F_a \oplus G = E$.

(b) Soient $a \in G$ et $b \in G$. Montrer que : $a \neq b \Longrightarrow F_a \neq F_b$.

(a) On cherche à montrer que $F_a \oplus G = E$, c'est à dire, montrons que $\begin{cases} F_a \cap G = \{0_E\} \\ F_a + G = E \end{cases}$

- Soit $x \in F_a \cap G$, montrons que $x = 0_E$

$$x \in F_a \Rightarrow x \in \text{Vect}(e_1 + a, e_2 + a, ..., e_n + a)$$
$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + a) \quad \text{avec } (\lambda_i, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$$
$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = x - a \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \in F \cap G$$

Or $(e_1, ..., e_n)$ est une famille libre, d'où

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$$

On a donc bien $x = 0_E$

- Montrons maintenant que $E \subset F_a + G$

Soit $x \in E$, alors $\exists (u, v) \in F \times G$ tels que

$$x = u + v$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + v$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + v + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + a)}_{\in F_a} + \underbrace{v - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a}_{\in G}$$

D'où $x \in F_a + G$

Et ainsi, $F_a \oplus G = E$

(b) Soit $a \in G$ et $b \in G$

Montrons que $a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b$

On procède par contraposée en montrant que $F_a = F_b \Rightarrow a = b$

$e_1 + a \in \text{Vect}(e_1 + a, e_2 + a, \dots, e_n + a)$

$\Rightarrow e_1 + a \in F_a$

Or $F_a = F_b$

Donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$e_1 + a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + b) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - e_1 = a - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{p} \lambda_i e_i + (\lambda_1 - 1) e_1 = a - b \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \in F \cap G$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{p} \lambda_i e_i + (\lambda_1 - 1) e_1 \in \{0_E\}$$

De plus, $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre,

On a alors $\lambda_1 = 1$ et $\forall i \in [\![2, n]\!], \lambda_i = 0$

En remplaçant dans $(*)$, $e_1 + a = e_1 + b$

$\Rightarrow a = b$

Donc par contraposée, $a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b$

Soit $m \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_m[x]$

$F = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$ $G = \{P \in E,\ P = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$
$F \subset E$ $G \subset E$
Montrez que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.

- $0_E \in F$, en effet 0_E désigne le polynôme nul tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ 0_E(x) = 0$, donc en particulier $0_E(0) = 0$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, (a,b) \in F^2$, $(\lambda a + b)(0) = \lambda a(0) + b(0) = 0$
Ainsi F est stable par combinaison linéaire.
F est un sous espace vectoriel de E.

- $0_E \in G$, en effet 0_E est le polynôme constant nul.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}, (a,b) \in G^2$, $\forall x \in \mathbb{R}\ (\lambda a + b)(x) = \lambda a(x) + b(x)$
$\exists (\mu_a, \mu_b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) = \mu_a$ et $b(x) = \mu_b$
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda a + b)(x) = \lambda \mu_a + \mu_b \in \mathbb{R}$
Donc $(\lambda a + b) \in G$, donc G est stable par combinaison linéaire.
Enfin G est un sous espace vectoriel de E.

- Montrons que $F \oplus G = E \Rightarrow \forall p \in E, \exists! (f,g) \in F \times G$ tel que $p = f + g$.
On raisonne par analyse synthèse.
(A) Si $p \in E \Rightarrow \exists! (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que
$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k x^k = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x^k\right)}_{f} + \underbrace{(\lambda_0)}_{g} = f + g$
(S) vérifions que $f \in F$, $f(0) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \in F$
Vérifions que $g \in G$, $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow g \in G$
Nous n'avons trouvé que 1 seul f et 1 seul g (unicité de l'écriture polynomiale) f et g sont donc unique. Donc $F \oplus G = E$ ■

Bertrem

Énoncé :

Montrer que les sous-espaces $F = \text{Vect}\{x, x(x-1)\}$ et $G = \text{vect}\{x^2+4\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Résolution :

Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$

ie $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = 0_{\mathbb{R}_2[X]} & (1) \\ \text{Dim}(\mathbb{R}_2[X]) = \text{Dim}(F) + \text{Dim}(G) & (2) \end{cases}$

(1) Soit $P \in F \cap G$ alors,

$P(x) = \alpha x + \beta[x(x-1)]$ car $P \in F$

$P(x) = \gamma(x^2+4)$ car $P \in G$

Par unicité de l'écriture polynomiale :

$P(x) = \alpha x + \beta(x^2 - x) - \gamma(x^2+4) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

Or, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, ie :

$P(x) = (\beta - \gamma)x^2 + (\alpha - \beta)x + 4\gamma = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$\iff \begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 4\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

Ainsi $P \in F \cap G$ est bien le polynôme nul de $\mathbb{R}_2[X]$.

ie $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$

Or comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$

on a : $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$

(2) On a : $\begin{cases} \text{Dim}(F) = 2 & \text{car } x \text{ et } x(x-1) \text{ sont non colinéaire} \\ \text{Dim}(G) = 1 & \text{car } x^2+4 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ \text{Dim}(\mathbb{R}_2[X]) = 3 \end{cases}$

Ainsi $\text{Dim}(F) + \text{Dim}(G) = 3 = \text{Dim}(\mathbb{R}_2[X])$

Par conséquent $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$

F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Mathilde

Montrer que la famille $((X+k)^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $((X+k)^n)$ avec $k \in [\![0,n]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$(X+k)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i k^{n-i}$.

On peut représenter cette famille dans une matrice :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} x^n & (x+1)^n & & (x+k)^n & & (x+n)^n \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & \dots & k^n & \dots & n^n \\
0 & n & & nk^{n-1} & \dots & n\times n^{n-1} \\
0 & \binom{n}{2} & & \binom{n}{2}k^{n-2} & \dots & \binom{n}{2}n^{n-2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} /1 \\ /X \\ /X^2 \\ \vdots \\ /X^n \end{array}
\end{array}$$

par n-linéarité de déterminant, on a :

$$\begin{array}{c} \\ n \\ \binom{n}{2} \\ \binom{n}{3} \\ \vdots \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & \dots & k^n & \dots & n^n \\
0 & 1 & \dots & k^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\
0 & 1 & \dots & k^{n-2} & \dots & n^{n-2} \\
0 & 1 & \dots & k^{n-3} & \dots & n^{n-3} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

On reconnait un déterminant de Vandermonde tel que :

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix}
1 & 2^n & 3^n & \dots & n^n \\
\vdots & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
1 & 2 & 3 & \dots & n
\end{vmatrix}$$

donc le déterminant est différent de 0 donc la famille $((X+k)^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.

• Comme $\mathrm{card}(((X+k)^n)_{k\in[\![0,n]\!]}) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ alors la famille est de plus génératrice, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Siaine

Exercice de Khôlle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $T_k := \frac{(X-a)^k}{k!}$

1) Démontrer que la famille $\mathcal{B} := (T_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Déterminer les coefficients de P dans la base $\mathcal{B}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On remarque que la famille $\mathcal{B}$ est échelonnée en degré, ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre.
De plus, $\text{Card}(\mathcal{B}) = n+1 = \dim \mathbb{C}_n[X]$.

Finalement, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
$\exists \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, tel que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k T_k$$

$$\iff P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{(X-a)^k}{k!} = \lambda_0 + \lambda_1 (X-a) + \dots + \lambda_n \frac{(X-a)^n}{n!}$$

* En évaluant en $X = a$:

$$P(a) = \lambda_0$$

* $$P'(X) = \lambda_1 + \lambda_2 (X-a) + \dots + \lambda_n \frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{(X-a)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Et en évaluant en $X = a$:

$$P'(a) = \lambda_1.$$

Soit $p \in [\![0;n]\!]$, par récurrence sur $p \in [\![0;n]\!]$, on note : $P(p)$: " $P^{(p)}(X) = \sum_{k=p}^{n} \lambda_k \frac{(X-a)^{k-p}}{(k-p)!}$ "

* Initialisation : $p = 0$:

$$P^{(0)}(X) = P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{(X-a)^k}{k!}$$

$P(0)$ est vraie.

* Hérédité. Soit $p \in [\![0;n]\!]$ tel que $P(p)$ soit vraie. On considère $p \in [\![0;n-1]\!]$ et montrons que $P(p+1)$ est vraie.

$$P^{(p+1)}(X) = \frac{d}{dX}\left(P^{(p)}(X)\right)$$

$$\overset{HR}{=} \frac{d}{dX}\left(\sum_{k=p}^{n} \lambda_k \frac{(X-a)^{k-p}}{(k-p)!}\right)$$

$$= \sum_{k=p}^{n} \lambda_k (k-p) \frac{(X-a)^{k-p-1}}{(k-p)!}$$

$$= 0 + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k \frac{(X-a)^{k-(p+1)}}{(k-(p+1))!}$$

$P(p+1)$ est encore vraie, d'après le principe de récurrence : $\forall p \in [\![0;n]\!]$: $P^{(p)}(X) = \sum_{k=p}^{n} \lambda_k \frac{(X-a)^{k-p}}{(k-p)!}$

En évaluant en $X = a$, on a : $\forall p \in [\![0;n]\!]$, $P^{(p)}(a) = \lambda_p$.

On peut ainsi réécrire le polynôme P de la façon suivante : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \times T_k$

Pierre

Kholle semaine 6.

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+2z=0\}$
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+z=0 \text{ et } x+2y-z=0\}$

1) Donner base de F et une base de G.
2) Démontrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ puis décomposer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dans $F \oplus G$.

1) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. $(x,y,z) \in F \iff (x,y,z) = y(-1,1,0) + z(-2,0,1)$

donc $F = \text{Vect}\left(\underbrace{(-1,1,0)}_{u_1}, \underbrace{(-2,0,1)}_{v_2}\right)$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \in G \iff \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$\iff \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+4y \quad =0 \end{cases} \iff (x,y,z) = y(-2,1,0)$

d'où $G = \text{Vect}\left(\underbrace{(-2,1,0)}_{u_3}\right)$

u_1 et u_2 sont clairement non colinéaires : (u_1, v_2) est une base de F et (u_3) base de G.

2) Soit $x \in F \cap G$. où $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
$x \in F \Rightarrow x+y+2z=0$
$x \in G \Rightarrow x+2y+z=0$ et $x+2y-z=0$

alors $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\overset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{\Rightarrow}} \begin{cases} x+y+2z=0 \\ y-z=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3-2L_1}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+2z=0 \\ y-z=0 \\ 2y-4z=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-2L_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+2z=0 \\ y-z=0 \\ -2z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow z=y=x=0$. d'où $u=0$.

ainsi $F \cap G = \{0\}$ car $\{0\} \subset F \cap G$.

De plus, soit $u \in \mathbb{R}^3$, $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
alors d'après $F \oplus G = E$, $\exists! (a,b) \in F \times G$, tels que $u = a+b$.
or $a \in F = Vect(u_1, u_2) \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tels que $a = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$.
et $b \in G = Vect(u_3) \Rightarrow \exists \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $b = \lambda_3 u_3$.

ainsi $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$.

d'où $(x,y,z) = (-\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ y = \lambda_1 + \lambda_3 \\ z = \lambda_2 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ y+x = -2\lambda_2 - \lambda_3 \\ z = \lambda_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z+2y-2x-4z = -\lambda_1 \\ y+x+2z = -\lambda_3 \\ z = \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x+2y+2z \\ \lambda_2 = z \\ \lambda_3 = -x-y-2z \end{cases}$

ainsi, $u = (x+2y+2z)u_1 + z u_2 + (-x-y-2z)u_3$
d'où $(x,y,z) = \underbrace{(-x-2y-4z, x+2y+2z, z)}_{\in F} + \underbrace{(2x+2y+4z, -x-y-2z, 0)}_{\in G}$

PAUL khôlles numéro 6

EXERCICE 5. — *Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par*

$$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ b - 2c + d = 0\}$$
$$G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4;\ a = d \text{ et } b = 2c\}.$$

Donner une base de F, de G et de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

1) On remarque :

$$F = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ c = \frac{b+d}{2} \right\}$$
$$= \left\{ \left(a, b, \frac{b+d}{2}, d\right) \in \mathbb{R}^4,\ c = \frac{b+d}{2} \right\}$$

On a donc,

$$F = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(1,0,0,0)}_{u_1}, \underbrace{\left(0,1,\tfrac{1}{2},0\right)}_{u_2}, \underbrace{\left(0,0,\tfrac{1}{2},1\right)}_{u_3} \right)$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, on en déduit que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre et génératrice de F c'est une base.

De même pour G on a :

$$G = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(1,0,0,1)}_{u_4}, \underbrace{(0,2,1,0)}_{u_5}\right)$$

les vecteurs u_4 et u_5 ne sont pas liés, ils génèrent G, ils forment donc une base.

2) Soit $x \in G \cap F$, alors $x = (a,b,c,d)$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ satisfaisant le système :

$$\begin{cases} b - 2c + d = 0 \\ b = 2c \\ a = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = 2c \\ d = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que $x = (0,2,1,0)$.

$F \cap G = \mathrm{Vect}((0,2,1,0))$

3) Par la formule de Grassman on a.

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

De plus, F et G sont des sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donc $F+G$ l'est aussi, en particulier $F+G \subset \mathbb{R}^4$.

Finalement, $F + G = \mathbb{R}^4$.

Gillien
Clarisse
Mp

Khôlle semaine 6

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{C}$, $\forall k \in [\![0, m]\!]$, on pose $T_k := \dfrac{(X-a)^k}{k!}$

1) Démontrer que la famille $\mathcal{B} := (T_k)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est une famille base de $\mathbb{C}_m[X]$

2) Soit $P \in \mathbb{C}_m[X]$. Déterminer les coefficients de P dans la base $\mathcal{B}$

1)
$$\mathcal{B} = \left(1, (X-a), \frac{(X-a)^2}{2!}, \dots, \frac{(X-a)^m}{m!}\right)$$

La famille étant échellonné en degré la liberté est établie.
De plus,
$$\underset{\substack{\vee \\ \text{de vecteurs de } \mathbb{C}_n[X]}}{\mathrm{Card}(\mathcal{B})} = m+1 = \dim(\mathbb{C}_m[X])$$

On a une famille libre de même dimension que $\mathbb{C}_n[X]$
$\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, P peut se décomposer dans la base $\mathcal{B}$.
$\exists! (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$, tel que :

$$P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 (X-a) + \lambda_2 \frac{(X-a)^2}{2!} + \dots + \lambda_m \frac{(X-a)^m}{m!}$$
$$P(X) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \frac{(X-a)^k}{k!}$$

$$\begin{cases} \forall i \in [\![0, m]\!], & P^{(i)}(X) = \displaystyle\sum_{k=i}^{m} \lambda_k \cdot \frac{k!}{(k-i)!} \frac{(X-a)^{k-i}}{k!} \\ \forall i \geq m, & P^{(i)}(X) = 0 \end{cases}$$

$P(a) = \lambda_0$

et on remarque que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P^{(i)}(a) = \lambda_i$

On a donc trouvé les coefficients de P dans la base $\mathcal{B}$.

Margaux

On considère 3 réels a, b, c et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

1) À quelle condition la matrice A est-elle inversible ?

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Démontrer que l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par $g := f^3 - cf^2 - bf - a\,id_{\mathbb{R}^3}$ est nul.

3) En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A lorsque A est inversible.

4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ lorsque A n'est pas inversible

1) A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Or $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$

On développe selon la première ligne

$\det(A) = (-1)^{1+3}\, a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$

et ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible} \Leftrightarrow a \neq 0}$

2)

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & b & a+bc \\ 1 & c & b+c^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & b & a+bc \\ 1 & c & b+c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & ac & ab+ac^2 \\ b & a+bc & b^2+ac+bc^2 \\ c & b+c^2 & a+2bc+c^3 \end{pmatrix}$

$A^3 - cA^2 - bA - aI_3$

$= \begin{pmatrix} a & ac & ab+ac^2 \\ b & a+bc & b^2+ac+bc^2 \\ c & b+c^2 & a+2bc+c^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & ac & ac^2 \\ 0 & bc & ac+bc^2 \\ c & c^2 & bc+c^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ b & 0 & b^2 \\ 0 & b & cb \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ainsi $\boxed{g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$

3) On se place dans le cas où A est inversible, i.e $a \neq 0$.
Alors (en raisonnant encore sur les matrices des endomorphismes canoniquement associés) :

$$A^3 - cA^2 - bA = aI_3$$
$$\iff A(A^2 - cA - bI_3) = aI_3$$
$$\iff A\left(\frac{1}{a}A^2 - \frac{c}{a}A - \frac{b}{a}I_3\right) = I_3$$

et ainsi,
$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{a}A^2 - \frac{c}{a}A - \frac{b}{a}I_3}$$

4) On se place dans le cas où A n'est pas inversible, i.e $a = 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $(x, y, z) \in Ker(f)$
$\iff f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} az = 0 \\ x + bz = 0 \\ y + cz = 0 \end{cases}$$

Or $a = 0$ donc cela se ramène à :

$$\begin{cases} x + bz = 0 \\ y + cz = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -bz \\ y = -cz \end{cases} \quad (z \in \mathbb{R})$$

et ainsi, $(x, y, z) = (-bz, -cz, z) = z(-b, -c, 1)$
On en déduit que $Ker(f) = Vect((-b, -c, 1))$
Or $((-b, -c, 1))$ est libre car composée d'un seul vecteur non nul.
Finalement, $((-b, -c, 1))$ est une base de $Ker(f)$.

MATHEY
Ryan
MP

Semaine 6

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{C}_3[X]$ et $F = \{P \in E,\ P - XP' = 0\}$ et $G = \{P \in E,\ P'(0) = 0\}$.

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

A) Soit $P_1 \in \mathbb{C}_3[X]$ alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :
$P_1 = aX^2 + bX + c$.

$P_1 \in F$ alors : $P_1 - XP_1' = 0$
$P_1 - XP_1' = aX^2 + bX + c - X(2aX + b)$
$= -aX^2 + c$
$= 0$

Par unicité de l'écriture polynomiale $a = 0$, $c = 0$
Donc $F = \mathrm{Vect}(X)$ et $\dim(F) = 1$.

De même pour G,
Soit $P_2 \in \mathbb{C}_3[X]$, alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :
$P_2 = aX^2 + bX + c$

$P_2 \in G$ alors $P_2'(0) = 0$

$P_2'(X) = 2aX + b$
$P_2'(0) = b = 0$
Donc $G = \mathrm{Vect}(X^2, 1)$ et $\dim(G) = 2$.

B) $E = \mathrm{Vect}(X^2, X, 1)$ et $\dim(E) = 3$
or $F + G = \mathrm{Vect}((X) \# (X^2, 1))$
$= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1)$

et donc $\dim(F+G) = 3$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
Ainsi d'après la caractérisation des sous espaces vectoriel en somme directe, en dimension finie,
$E = F \oplus G$.

Daniel

EXERCICE 3. — *Soient* $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{K}^3 : x - 2y + z = 0\}$, $u = (1,1,1)$ *et* $v = (3,1,-1)$.

1. *Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{K}^3$.
2. *Soit* $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. *Démontrer que* $F \subset E$.
3. *A-t-on* $E = F$ *?*

1/ $E = \{(x = 2y - z : (x, y, z) \in \mathbb{K}^3\}$

$E = \{(2y - z, y, z) \in \mathbb{K}^3\}$

donc $E = \mathrm{Vect}((2,1,0),(-1,0,1))$

donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

2/ Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v)$

$u_1 \in F \iff \exists (x_1, y_2, z_3) \in \mathbb{K}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{K},$

$(x_1, y_2, z_3) = \lambda u + \mu v$
$= \lambda(1,1,1) + \mu(3,1,-1)$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \lambda + 3\mu \\ y_1 = \lambda + \mu \\ z_1 = \lambda - \mu \end{cases}$$

donc $u_1 = (\underbrace{\lambda + 3\mu}_{x_1}, \underbrace{\lambda + \mu}_{y_1}, \underbrace{\lambda - \mu}_{z_1})$

Or, $x_1 - 2y_1 + z_1 = \lambda + 3\mu - 2\lambda - 2\mu + \lambda - \mu$

$x_1 - 2y_1 + z_1 = 0$

donc $u_1 \in E \Rightarrow F \subset E$

3/ On a F qui est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$. Comme $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E) = 2$ alors $F = G$.

Colle semaine n° 6

Benjamin

Exercice. Pour $0 \leq k \leq n$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Puisque $\text{card}(P_0, \ldots, P_n) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, il suffit de montrer que la famille est libre.

• Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

(*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$

Montrons par récurrence forte sur $i \in [\![0, n]\!]$ $\mathcal{P}(i)$: "$\lambda_i = 0$".

• $i = 0$

On regarde le coefficient devant 1 dans (*) :

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k\right]_0 = [0]_0 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underbrace{[P_k]_0}_{=0 \text{ sauf si } k=0} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_0 = 0$ $\quad\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, supposons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_i = 0$

(*) devient alors :

$$\sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k P_k = 0$$

On regarde la composante devant X^{i+1} :

$$\left[\sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k P_k\right]_{i+1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k \underbrace{[P_k]_{i+1}}_{=0 \text{ sauf si } k=i+1} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_{i+1} = 0$ $\quad\mathcal{P}(i+1)$ est encore vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

Ainsi, $(P_0, ..., P_n)$ est libre, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Démontrer que tels que F, G et H sont en somme directe si et seulement si ($F \cap G = \{0\}$ et $(F+G) \cap H = \{0\}$).

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que F, G et H sont en somme directe.

- Soit $x \in F \cap G$,

$0_E = x - x + 0_E$ avec $x \in F$, $-x \in G$, $0_E \in H$

Donc puisque F, G et H sont en somme directe, par unicité de la décomposition de 0_E :

$0_E = 0_E = x = -x$

Ainsi, $F \cap G \subset \{0_E\}$ donc $F \cap G = \{0_E\}$

- Soit $x \in (F+G) \cap H$:

$\exists\, x_1 \in F, x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$

Donc,

$0_E = -x_1 - x_2 + x$ avec $-x_1 \in F$, $-x_2 \in G$, $x \in H$

Ainsi, par unicité de la décomposition de 0_E :

$x_1 = x_2 = x = 0_E$

Donc $(F+G) \cap H \subset \{0_E\}$ et alors $(F+G) \cap H = \{0_E\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$ et $(F+G) \cap H = \{0_E\}$

Soit $(x, y, z) \in F \times G \times H$ tel que $x + y + z = 0_E$

Alors, $x + y = -z$.

Or, $\begin{cases} z \in H \\ x+y \in F+G \end{cases}$ donc $-z = x+y \in (F+G)\cap H = \{0_E\}$

Ainsi, $-z = 0 \Rightarrow z = 0$

On a donc : $x = -y$ mais puisque $x \in F$, $-y \in G$, $x \in F\cap G = \{0_E\}$ et alors $0_E = x = y$

Par conséquent, 0_E se décompose de manière unique dans $F+G+H$: F, G et H sont en somme directe.

Exercice. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A) \subset (A+B)\cap(B+C)\cap(C+A).$$

Soit $u \in (A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A)$:

$\exists\, x_1 \in A\cap B$, $x_2 \in B\cap C$, $x_3 \in C\cap A$ tels que :

$u = x_1 + x_2 + x_3$

- $\begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in B \\ x_3 \in A \end{cases} \Rightarrow u = (x_1+x_3) + x_2 \in A+B$

- $\begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in C \\ x_3 \in C \end{cases} \Rightarrow u = x_1 + (x_2+x_3) \in A+C$

- $\begin{cases} x_1 \in B \\ x_2 \in B \\ x_3 \in C \end{cases} \Rightarrow u = (x_1+x_2) + x_3 \in B+C$

On en conclut : $u \in (A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)$ et on a l'inclusion.

Julien Exercice de khôlle

Exercice. Montrer que $P_1(X) = (X-1)^2$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.

· $P_1(X) = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$

$P_3(X) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. $(*)$

En évaluant $(*)$ en 0, 1 et (-1), il vient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$$

$$\iff \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0}.$$

Ainsi, $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$; de plus elle est de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$: c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

· On remarque que $X^2 + X + 1 = \frac{3}{4} \cdot P_1 + 0\, P_2 + \frac{1}{4} P_3$

Ainsi, les coordonnées de X^2+X+1 dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$\left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$

Julien Exercice de khôlle.

Exercice. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$ qui sont affines sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

· La fonction $: \begin{vmatrix} [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{vmatrix}$ appartient à E.

· Soient $f, g \in E$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :
$\exists\, a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ tels que :

$f_{|[-1;0]} : \begin{vmatrix} [-1;0] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax+b \end{vmatrix}$ $\qquad f_{|[0;1]} \begin{vmatrix} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto cx+d \end{vmatrix}$

$g_{|[-1;0]} : \begin{vmatrix} [-1;0] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a'x+b' \end{vmatrix}$ $\qquad g_{|[0;1]} \begin{vmatrix} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto c'x+d' \end{vmatrix}$

Or f et g sont continues sur $[-1;1]$ donc en 0, ce qui implique que $d = b$ et $d' = b'$.

Ainsi, on a :

$\lambda f + \mu g_{|[-1;0]} : \begin{vmatrix} [-1;0] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda a x + \lambda b + \mu a' x + \mu b' = (\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b') \end{vmatrix}$

$\lambda f + \mu g_{|[0;1]} \begin{vmatrix} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda c x + \lambda b + \mu c' x + b' = (\lambda c + \mu c')x + (\lambda b + \mu b') \end{vmatrix}$

Ainsi, $\lambda f + \mu g$ est affine sur $[-1;0]$ et sur $[0;1]$.

De plus, une combinaison linéaire de fonctions continues sur un segment est continue sur ce même segment.

Donc $\lambda f + \mu g \in E$, et par caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1;1], \mathbb{R})$.

On cherche donc une base de E.

On pose :

$$f_1 : \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in [-1;0] \\ x, & \text{si } x \in [0;1] \end{cases} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \in [-1;0]. \\ 0, & x \in [0;1]. \end{cases} \end{cases}$$

(f_1, f_2, f_3) est une famille de E. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tels que :

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E$. $(\forall\forall)$

On évalue $(\forall\forall)$ en (-1), 0, et 1 :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi, (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E.

Soit $f \in E$, $f : \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} ax+b, & x \in [-1;0] \\ cx+b, & x \in [0;1] \end{cases} \end{cases}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$f = b f_1 + c f_2 + a f_3$, donc (f_1, f_2, f_3) est génératrice de E : c'en est une base.

Laetitia

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $((X+k)^n)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

* $\mathrm{Card}\left(((X+k)^n)_{0 \leq k \leq n}\right) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

Il suffit de montrer que la famille est libre.

* Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i k^{n-i} = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![0;n]\!], \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \binom{n}{i} k^{n-i} = 0.$$

On représente cette égalité sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \binom{n}{0} 0^0 + \lambda_1 \binom{n}{0} 1^0 + \dots + \lambda_n \binom{n}{0} n^0 \\ \lambda_0 \binom{n}{1} 0^1 + \lambda_1 \binom{n}{1} 1^1 + \dots + \lambda_n \binom{n}{1} n^1 \\ \vdots \\ \lambda_0 \binom{n}{n} 0^n + \lambda_1 \binom{n}{n} 1^n + \dots + \lambda_n \binom{n}{n} n^n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

$$\Rightarrow M \times \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}, \text{ avec } M = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} 0^0 & \binom{n}{0} 1^0 & \dots & \binom{n}{0} n^0 \\ \binom{n}{1} 0^1 & \binom{n}{1} 1^1 & \dots & \binom{n}{1} n^1 \\ \vdots & & & \\ \binom{n}{n} 0^n & \binom{n}{n} 1^n & \dots & \binom{n}{n} n^n \end{pmatrix}$$

On calcule $\det(M) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} 0^0 & \binom{n}{0} 1^0 & \dots & \binom{n}{0} n^0 \\ \binom{n}{1} 0^1 & \binom{n}{1} 1^1 & \dots & \binom{n}{1} n^1 \\ \vdots & & & \\ \binom{n}{n} 0^n & \binom{n}{n} 1^n & & \binom{n}{n} n^n \end{vmatrix}$

Par linéarité du déterminant, on obtient :

$$\det(M) = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \begin{vmatrix} 0^0 & 1^0 & \dots & n^0 \\ 0^1 & 1^1 & \dots & n^1 \\ \vdots & & & \\ 0^n & 1^n & \dots & n^n \end{vmatrix}$$

En posant $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $a_i = i$, donc deux à deux distincts, on obtient un determinant de Vandermonde, et :

$$\det(\Pi) = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0.$$

Ainsi, la matrice Π est inversible.

En notant Π^{-1} son inverse, on obtient :

$$\Pi^{-1} \Pi \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \Pi^{-1} \times 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

$$\Rightarrow I_n \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

Ainsi, $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\lambda_k = 0$.

La famille $((X+k)^n)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est donc libre et de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pauline

Énoncé : On considère $F = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y-z=0 \}$

et $G = \{ (a-b ; a+b ; a-3b) ;\ a, b \in \mathbb{R} \}$.

1) Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer $F \cap G$.

1) $F = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y-z=0 \}$

$= \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y=z \}$

$= \text{Vect}\left(\underbrace{(1;0;1)}_{=u_1} ; \underbrace{(0;1;1)}_{=u_2} \right)$

$G = \{ (a-b ; a+b ; a-3b) ;\ a ; b \in \mathbb{R} \}$

$= \text{Vect}\left(\underbrace{(1;1;1)}_{=u_3} ; \underbrace{(-1;1;-3)}_{=u_4} \right)$.

Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $v \in F \cap G$, alors :

Analyse : $\begin{cases} v \in F \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2. \\ v \in G \Rightarrow \exists \lambda_3 ; \lambda_4 \in \mathbb{R},\ v = \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4. \end{cases}$

Ainsi : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$.

On a :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 - 3\lambda_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \quad (\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1) \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \quad (\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_2). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4\lambda_4 \\ \lambda_2 = -2\lambda_4 \\ \lambda_3 = -3\lambda_4 \end{cases} ; \lambda_4 \in \mathbb{R}.$$

Si $v \in F \cap G$ alors $\exists \lambda_4 \in \mathbb{R}$,

$$v = \lambda_4(-4u_1 - 2u_2) = \lambda_4(-3u_3 + u_4)$$
$$= \lambda_4(-4; -2; -6).$$

$F \cap G \subset \mathrm{Vect}((-4; -2; -6))$.

<u>Synthèse</u> : Vérifions que $(-4; -2; -6) \in F \cap G$.

Pauline.

Or ; $(-4;-2;-6) = -4u_1 - 2u_2$

et $(-4;-2;-6) = u_4 - 3u_3$

Donc $(-4;-2;-6) \in F \cap G$.

Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré ;

$\mathrm{Vect}((-4;-2;-6)) \subset F \cap G$.

Ainsi : $F \cap G = \mathrm{Vect}((-4;-2;-6))$.

Léonard

Sujet de la semaine 6

On se propose de déterminer tous les sev de $\mathbb{C}[X]$ stables par dérivation

1) Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ stable par dérivation, non réduit à $\{0_{\mathbb{C}[X]}\}$.

a) Soit P un polynôme non nul de F et $n = \deg(P)$, démontrer $\mathbb{C}_n[X] \subset F$

b) On suppose que F est de dimension finie,

démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{C}_n[X] = F$.

2) Conclure.

1) a) Soit P un polynôme non nul de degré n de F un sev de $\mathbb{C}[X]$ stable par dérivation.

On a par récurrence immédiate que :

$\forall \ell \in [\![0, n]\!], \deg(P^{(\ell)}) = n - \ell$

Par le théorème des degrés échelonnés, la famille $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$

De plus $\mathrm{Card}(P, \dots, P^{(n)}) = n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$

Cette famille est donc aussi génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$: c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

On a ainsi $\mathbb{C}_n[X] = \mathrm{vect}(P, P', \dots, P^{(n)})$.

On rappelle que $P \in F$, comme F est stable par dérivation les dérivées successives de P appartiennent encore à F.

Par minimalité $\mathbb{C}_n[X] = \mathrm{vect}(P, \dots, P^{(n)}) \subset F$.

b) Supposons maintenant que F est de dimension finie.

On introduit l'ensemble $A = \{\deg(P) : P \in F \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}\}$

On remarque que A est une partie de $\mathbb{N}$ qui est non vide (puisque F n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{C}[X]}\}$)

Par l'absurde, supposons que A n'est pas majoré
Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(Q)$ ne majore pas A. Ainsi il existe
$P \in F \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$ tel que $\deg(P) > \deg(Q)$.

En ce cas, Q peut s'écrire comme une combinaison linéaire en les dérivées successives de P ie $Q \in \mathrm{Vect}(P, P', \dots, P^{(n)}) = \mathbb{C}_n[X] \subset F$
Ainsi $\mathbb{C}[X] \subset F$.

Par passage aux dimensions, on a $\dim(\mathbb{C}[X]) \leqslant \dim(F) < +\infty$
Ce qui est absurde puisque $\mathbb{C}[X]$ a une dimension infinie (alors que $\dim(F)$ est finie).

Finalement A est majoré. Par "bon ordre" : $n = \max(A)$ existe bien.

De la question 1a on sait déjà que $\mathbb{C}_n[X]$ est inclus dans F, reste à prouver l'inclusion réciproque.
Soit P un polynôme de F de degré $n = \max(A)$. Comme F est stable par dérivation $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une famille de polynôme de F, de plus cette famille est libre (théorème des degrés echelonnés). $\mathrm{Card}(P, P', \dots, P^{(n)}) = n+1 = \dim(F)$
(De la même manière que $\mathbb{C}_n[X]$ a des polynômes de degré n au maximum et est de dimension $n+1$, F a des polynômes de degré $n = \max(A)$ au maximum et est de dimension $\{n+1\}$).

Ainsi $F \subset \mathrm{vect}(P, P', \dots, P^{(n)}) = \mathbb{C}_n[X]$. Par double inclusion $\mathbb{C}_n[X] = F$ avec $n = \max(A)$.

2) On sépare plusieurs cas :
1er cas : $F = \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$ est un sev de $\mathbb{C}[X]$ stable par dérivation.
2ème cas : F est un sev de $\mathbb{C}[X]$ non réduit au singleton $\{0\}$

Léonard.

et de dimension finie. Dans ce cas on a montré à la question précédente que les $\mathbb{C}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}$) sont les sev de $\mathbb{C}[X]$ stable par dérivation.

$3^{ème}$ cas : F est un sev de $\mathbb{C}[X]$ non réduit au vecteur nul et de dimension infinie.

On réintroduit l'ensemble $A = \{\deg(P) : P \in F \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}\}$ qui est une partie de $\mathbb{N}$ non vide.
Si A est majorée on récupère par bon ordre (cf qu 1b) que F est égal à $\mathbb{C}_n[X]$ mais en passant aux dimensions F serait de dimension finie ce qui est une contradiction vu que le $3^{ème}$ cas correspond à dim(F) infinie.
Finalement A n'est majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$, n ne majore pas A. On rappelle que $\mathbb{C}_n[X] \subset F$ (cf qu 1a), donc pour tous $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X] \subset F$.
Or $\mathbb{C}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}_n[X]$ donc $\mathbb{C}[X] \subset F$

Mais par définition F est un sev de $\mathbb{C}[X]$ donc $F \subset \mathbb{C}[X]$.
Par double inclusion $F = \mathbb{C}[X]$. (On rappelle que $\mathbb{C}[X]$ est un sev de $\mathbb{C}[X]$).
Finalement, $\{0_{\mathbb{C}[X]}\}$, $\mathbb{C}_n[X]$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{C}[X]$ sont tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[X]$ stables par dérivation.

Mathias

Banque d'exercices

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x - 2y + z = 0\}$$
$$G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2x - y + 2z = 0\}$$

1. Donner une base B_F de F, une base B_G de G, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$ et donner sa dimension.
3. Démontrer que la famille $B := B_F \# B_G$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

* $(x,y,z) \in F \iff x = 2y - z$, $(y,z) \in \mathbb{R}^2$

$F = \mathrm{Vect}(\underbrace{(2,1,0)}_{f_1}, \underbrace{(-1,0,1)}_{f_2})$. La famille (f_1, f_2) engendre F. Comme f_1 et f_2 sont non colinéaires, elle est de plus libre. $B_F := (f_1, f_2)$ est une base de F.

* $(x,y,z) \in G \iff y = 2x + 2z$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$G = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,2,0)}_{g_1}, \underbrace{(0,2,1)}_{g_2})$. La famille (g_1, g_2) engendre G. Comme g_1 et g_2 sont non colinéaires, elle est de plus libre. $B_G := (g_1, g_2)$ est une base de G.

- $\dim(F) = \# B_F = 2$
- $\dim(G) = \# B_G = 2$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in F \cap G$

$$\iff \begin{cases} (x,y,z) \in F \\ (x,y,z) \in G \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \quad (z \in \mathbb{R}) \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où, $F \cap G = \mathrm{Vect}(\underbrace{(-1,0,1)}_{h_1})$. h_1 engendre $F \cap G$ et comme $h_1 \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $B_{F\cap G} := (h_1)$ est une base de $F \cap G$.

Et de plus, $\dim(F \cap G) = \# \mathcal{B}_{F\cap G} = 1$.

3. $\mathcal{B} := \mathcal{B}_F \# \mathcal{B}_G = (f_1, f_2, g_1, g_2)$. Une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement liée.

Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Par Grassmann, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

D'après Q1 et Q2., $\dim(F+G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Or, $F + G \subset \mathbb{R}^3$ comme somme de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, d'après le critère d'égalité de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$F + G = \mathbb{R}^3$. Or, $\underbrace{F+G}_{\dim 3} \subset \underbrace{\mathrm{Vect}(f_1, f_2) + \mathrm{Vect}(g_1, g_2)}_{\dim 4}$

$F + G \subset \mathrm{Vect}(f_1, f_2, g_1, g_2) = \mathcal{B}$

D'où, $\mathbb{R}^3 \subset \mathcal{B}$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

4. F et G ne sont pas supplémentaires car $F \cap G = \mathrm{Vect}(h_1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

RAYBAUDI Rose

Colle S6

12/10/2020

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

1) À quelle condition la matrice A est-elle inversible ?

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Démontrer que l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par $g := f^3 - cf^2 - bf - a\,id_{\mathbb{R}^3}$ est nul.

3) En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A lorsque A est inversible.

4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ lorsque A n'est pas inversible.

1) $A \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Or $\det(A) = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

2) Soit $g := f^3 - cf^2 - bf - a\,id_{\mathbb{R}^3}$

Montrons que g coïncide avec l'endomorphisme nul sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

- $g(e_1) = f^3(e_1) - c.f^2(e_1) - b.f(e_1) - a.e_1$
  $= f^2(e_2) - cf(e_2) - b.e_2 - a.e_1$
  $= f(e_3) - c.e_3 - b\,e_2 - a\,e_1$
  $= (a, b, c) - (0, 0, c) - (0, b, 0) - (a, 0, 0)$
  $= 0_{\mathbb{R}^3}$

- De même, $g(e_2) = g(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Et ainsi, g est nul.

3) On se place dans le cas où $a \neq 0$.

On a : $f^3 - cf^2 - bf - a\,id_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

$\Leftrightarrow f\,(f^2 - cf - b\,id) = a.\,id_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{a} f^2 - \frac{c}{a} f - \frac{1}{a} b\,id\right) = id_{\mathbb{R}^3}$.

En composant par f^{-1} ($A^{-1} = \mathrm{Mat}_{e_{can\mathbb{R}^3}}(f^{-1})$ existe) : $f^{-1} = \frac{1}{a} f^2 - \frac{c}{a} f - \frac{b\,id}{a}$

Et $A^{-1} = \big(\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}an\,\mathbb{R}^3}(f)}_{A}\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}an\,\mathbb{R}^3}(f^{-1})$

$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{a} A^2 - \frac{c}{a} A - \frac{b}{a} I_3}$

Or $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & b & a+bc \\ 1 & c & b+c^2 \end{pmatrix}$

Ainsi : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 0 & b/a & 1+\frac{bc}{a} \\ 1/a & c/a & (b+c^2)/a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ c/a & 0 & cb/a \\ 0 & c/a & c^2/a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b/a & 0 & 0 \\ 0 & b/a & 0 \\ 0 & 0 & b/a \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -b/a & 1 & 0 \\ -c/a & 0 & 1 \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

4) On se place dans le cas où $a=0$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = 0$

$\Leftrightarrow A.u = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + bz = 0 \\ y + cz = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -bz \\ y = -cz \end{cases}, \ z \in \mathbb{R}$

Donc $u = (-b, -c, 1).z$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\big((-b, -c, 1)\big)$

$(-b, -c, 1)$ étant libre dans $\mathbb{R}^3$ car non nul, et générateur de $\mathrm{Ker}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Théorème

Dans $M_2(\mathbb{R})$ muni des lois habituelles, lequel de ces sous ensemble est un sev ?

$E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix}\}$

$F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\}$

- Pour E : On revient à la définition et on vérifie que : * $E \neq \emptyset$ et que $0_{M_2(\mathbb{R})} \in E$
  * E est stable par combinaison linéaire

* Pour $a = 2$, $b = -1$ et $c = 0$, on a $A \in E$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id_{M_2(\mathbb{R})} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

Ainsi $E \neq \emptyset$ et $0_{M_2(\mathbb{R})} \in E$.

* On vérifie que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (A,B) \in E^2$, $(uA + vB) \in E$.

Or en distribuant les scalaires dans les matrices A et B, on obtiendra :

$$\begin{cases} \underbrace{au + bu}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{a' + b'}_{\in \mathbb{R}} \\ u2c = 2c' \\ uc = c' \\ -ub = b' \end{cases}$$

Ainsi E est un sous espace vectoriel que $M_2(\mathbb{R})$

- Pour F : On peut tout de suite voir que l'élément nul de $M_2(\mathbb{R})$ n'appartient pas à F.
  D'où F n'est pas un sev de $M_2(\mathbb{R})$