Khôlles semaine 5 MP

PAUL

1. *Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.*
2. *On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.*
3. *En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :*

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

1) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$
Montrons que $\sum_n y_n$ converge si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$\Leftarrow$) Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons l sa limite.
Soit $N \in \mathbb{N}$, on a pour $N \geq n$,

$$\sum_{n=0}^{N} y_n = \sum_{n=0}^{N} x_{n+1} - \sum_{n=0}^{N} x_n$$

$$= x_{N+1} - x_0$$

Donc par passage à la limite quand $N \to +\infty$, on en déduit que $\sum_n y_n$ converge.

$\Rightarrow$) Supposons que la serie $\sum_n y_n$ converg et notons S sa somme alors on a comme avant,

$$\sum_{n=0}^{N} y_n = x_{N+1} - x_0$$

$$x_{N+1} = \sum_{n=0}^{N} y_n + x_0$$

Encore par passage à la limite, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)\,n^n\sqrt{n}}\, e^{-1}\right)$$

$$= \ln\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}}\, e^{-1}\right)$$

$$= \ln\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right)$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) - 1$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$$

Donc par théorème de sommation des o pour les séries à termes positifs et Riemann la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

PAUL

3) D'après Q1) on sait que comme $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge car,

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

Notons $\ell \in \mathbb{R}$, la limite de $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, donc,

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell}$ car $\exp(\cdot)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, notons $k = e^{\ell}$ strictement positif. on a donc :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$$

D'où, pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

Enfin, en posant $C = \frac{1}{k} > 0$ on a pour $n\in\mathbb{N}$,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C n^n e^{-n}\sqrt{n}.$$

Mathilde
REBMANN
MP

Colle de Maths S3

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$; $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$; $u_n = \sqrt{ch(\frac{1}{n}) - 1}$

- $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

On a $\frac{-1+n}{n^2+1} \leq u_n$, or $\frac{-1+n}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$

or $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann avec $\alpha = 1$ donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de sommation des équivalents pour les suites à termes positifs : $\sum \frac{1}{n} \leq \sum u_n$ donc par le théorème de domination, $\sum u_n$ diverge.

- $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$

$\frac{-1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$ or en composant par la valeur absolue :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$$

or il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2$ donc d'après le théorème de comparaison, $\sum |u_n|$ converge donc $\sum u_n$ converge.

- $u_n = \sqrt{ch(1/n) - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

On donne un DL de $ch(x)$ quand $x \to 0$ à l'ordre 2 :
$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ donc comme $\frac{1}{n} \to 0$, $u_n = \sqrt{\frac{1}{2n^2}}$
d'où $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{n}$ or $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1$) donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge.

Mathias   Banque d'exercices

Exercice 2

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \ln(1+u_n)$ et $w_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ pour tout n. Démontrer que les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a donc :
$u_n > 0$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_n := \ln(1+u_n) > 0 \\ w_n := \dfrac{u_n}{1+u_n} > 0 \end{cases}$

- Supposons que :
$\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \to 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_n = \ln(1+\underbrace{u_n}_{\to 0}) = u_n + o(u_n) \text{ ie } v_n \sim u_n > 0 \\ w_n = u_n \times \dfrac{1}{1+\underbrace{u_n}_{\to 0}} = u_n + o(u_n) \text{ ie } w_n \sim u_n > 0 \end{cases}$
D'après le théorème de sommations des équivalents,
$\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.
- Supposons que $u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ diverge grossièrement
Dans ce cas, par composition des limites ($x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$), $v_n \not\to 0 \Rightarrow \sum v_n$ diverge grossièrement.
De même, $w_n \not\to 0 \Rightarrow \sum w_n$ diverge grossièrement.
On a donc $u_n \not\to 0 \Leftrightarrow v_n \not\to 0 \Leftrightarrow w_n \not\to 0$
$\left(u_n = e^{v_n} - 1 = \dfrac{w_n}{1+w_n} \right)$.
D'où, $\sum u_n$ diverge grossièrement $\Leftrightarrow \sum v_n$ diverge grossièrement $\Leftrightarrow \sum w_n$ diverge grossièrement.
Finalement, $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.

David

Exercice 2

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n.
On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes.
Démontrer que la série $\sum v_n$ est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_n \leq v_n \leq w_n \Rightarrow 0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(v_n - u_n) \geq 0$
et $\sum (w_n - u_n)$ converge comme somme de de deux séries convergentes.

Ainsi, par le théorème de domination pour les séries à termes positifs,

$\sum (v_n - u_n)$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ converge

1/2

Exercice 3

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$ quand $n \to +\infty$.

On a $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

Soit $t \in [k, k+1]$, par croissance de $x \mapsto \ln(x)$,

$$\ln(k) \leq \ln(t) \leq \ln(k+1)$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \ln(k)dt \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt \leq \int_k^{k+1} \ln(k+1)dt$$

En sommant pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leq \int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(n-1) \leq \int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int_1^n \ln(t)dt + \ln(n-1) \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \geq \int_1^n \ln(t)dt$$

$$\Rightarrow [t\ln(t) - t]_1^n + \ln(n-1) \geq \ln(n!) \geq [t\ln(t)-t]_1^n$$

$$\Rightarrow n\ln(n) - n + 1 + \ln(n-1) \geq \ln(n!) \geq n\ln(n) - n + 1$$

$$\Rightarrow \ln(n^n) - n + 1 + \ln(n-1) \geq \ln(n!) \geq \ln(n^n) - n + 1$$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow\, 1}{1} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{-n+1}{\ln(n^n)}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{\ln(n-1)}{\ln(n^n)}} \geq \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} \geq \underset{\downarrow\, 1}{1} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{-n+1}{\ln(n^n)}}$$

Ainsi, par encadrement, $\boxed{\ln(n!) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n^n)}$

2/2

RAYBAUDI
Rose

L. 05/10/20

Colle S5

Exercice 1: Étudier la convergence et en cas de convergence, calculer la somme de la série de terme général $\frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \frac{1+\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\right)}{2^{n+1}}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\sqrt{n}}{2^{n+1}} \geqslant 0$$

On a: $\frac{3\sqrt{n}}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{3n^{3/2}}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge par Riemann donc d'après le théorème de sommation des petits o, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ converge.

D'après le théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Et enfin, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{2^{k+1}}$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\sqrt{k}}{2^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k}}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - 0$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$$

Et quand $n\to+\infty$, on a: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

De plus $\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées.

D'où finalement : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1$.

Exercice 2 : Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge.
On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
1) Montrer que $\sum n u_n$ et $\sum R_n$ ont la même nature.
2) Donner une relation entre leurs sommes lorsqu'elles convergent.

1) Soit $k \geq 1$. On remarque : $u_k = R_{k-1} - R_k$
En effet : $R_{k-1} - R_k = \sum_{i=k}^{+\infty} u_i - \sum_{i=k+1}^{+\infty} u_k$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k R_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k R_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k (k+1) - \sum_{k=1}^{n} k R_k$

$= \underbrace{-n R_n}_{\geq 0} + \sum_{k=0}^{n-1} R_k$

Montrons que $\sum n u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum R_n$ converge.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\sum R_n$ converge, $\sum R_n$ étant croissante (car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$), on a par le théorème de la limite monotone : $\sum_{k=0}^{n-1} R_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$

En particulier, $\sum_{k=1}^{n} k u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$
$\sum n u_n$ étant croissante car (u_n) est à termes positifs, et majorée, elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\sum n u_n$ converge. On a :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k \underset{k \geq n+1 \geq n}{\geq} n \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underbrace{n R_n}_{\geq 0} \geq 0$$

Comme $\sum n u_n$ converge, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k \longrightarrow 0$
Et donc par encadrement, $n R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
On avait : $\sum_{k=0}^{n-1} R_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k u_k}_{\to\, \ell \in \mathbb{R}} + \underbrace{n R_n}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ Donc $\sum R_n$ converge.

Ainsi, si l'une des deux séries converge, l'autre converge nécessairement.
Par contraposée, si l'une diverge, l'autre diverge.
Finalement, les deux séries ont la même nature.

2) Finalement, on a aussi montré, par passage à la limite dans $\sum_{k=0}^{n-1} R_k = nR_n + \sum_{k=1}^{n} k u_k$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k .$$

Donin de Rosière Benjamin

Colle semaine n°5

On note (p_n) la suite des nombres premiers ($p_1=2$).
Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

$1 > \frac{1}{p_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n} \geq 0$

Donc par théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{p_n}$ et $\sum -\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ ont même nature.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} -\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p_k}\right)$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{p_k} \in]-1,1[$, donc par calcul de somme de série géométrique convergente :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p_k}\right)^i\right) \qquad (*)$$

Soit $m \in [\![2,p_n]\!]$, le théorème fondamental de l'analyse donne :

$\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{N}$ tels que $m = p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$,

$$2^{\alpha_k} \leq p_k^{\alpha_k} \leq p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n} \leq m \leq p_n \qquad (p_1\geq 2,\dots,p_n\geq 2)$$

$\Rightarrow e^{\alpha_k \ln(2)} \leq p_n$

$\Rightarrow \alpha_k \leq \frac{\ln(p_n)}{\ln(2)}$

Or $\alpha_k \in \mathbb{N}$ donc $\alpha_k \leq E\left(\frac{\ln(p_n)}{\ln(2)}\right) = \rho_n$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k \leq \rho_n$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq p_n$ et soit $k \in \mathbb{N}$.
Puisque $\sum \left(\frac{1}{p_k}\right)^i$ est une série à termes positifs, elle est croissante et :

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{1}{p_k}\right)^i \geq \sum_{i=0}^{p_n} \left(\frac{1}{p_k}\right)^i \geq 0$$

Donc quand $N \to +\infty$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p_k}\right)^i \geq \sum_{i=0}^{p_n} \left(\frac{1}{p_k}\right)^i \geq 0$$

On en déduit dans (*) :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geq \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{p_n} \left(\frac{1}{p_k}\right)^i \right)$$

En distribuant, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geq \sum_{i_1=0}^{p_n} \cdots \sum_{i_n=0}^{p_n} \left(\frac{1}{p_1^{i_1}} \cdots \frac{1}{p_n^{i_n}} \right)$$

Soit $m \in [\![2, p_n]\!]$, de même que ci-dessus, on a : $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ et tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \leq p_n$.

Ainsi, $\frac{1}{m} \in \bigcup_{i_1=0}^{p_n} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{p_n} \left\{ \frac{1}{p_1^{i_1}} \times \cdots \times \frac{1}{p_n^{i_n}} \right\}$

On en déduit que : $\sum_{i_1=1}^{p_n} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} \left(\frac{1}{p_1^{i_1} \cdots p_n^{i_n}} \right)$ est une somme de termes positifs ayant au moins pour termes $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{p_n}$.

Ainsi :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geq \sum_{m=1}^{p_n} \frac{1}{m} \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \right) \geq \ln\left(\sum_{m=1}^{p_n} \frac{1}{m} \right)$$

Or, $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $\sum_{m=1}^{p_n} \frac{1}{m} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car la série harmonique est divergente.

Ainsi, par théorème de comparaison :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Donc $\sum_{k\geq 1} -\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ diverge.

On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ est une série divergente.

Aissame Baï

Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum U_n$, où $U_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$

$$U_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^\alpha} \leq \frac{n\sqrt{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$$

Or si $\alpha - \frac{3}{2} > 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$ converge d'après riemann. De plus U_n étant une série a terme positif étant majoré par la $\sum \frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$ alors la série $\sum U_n$ converge $\Leftarrow \alpha > \frac{5}{2}$.

$$U_n = \frac{\sum_{k=1}^{E(\frac{n}{2})-1} \sqrt{k} + \sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} \sqrt{k}}{n^\alpha}$$

$$\frac{(n-E(\frac{n}{2})+1)\sqrt{E(\frac{n}{2})}}{n^\alpha} \leq \frac{\sum_{k=E(\frac{n}{2})}^{n} \sqrt{k}}{n^\alpha} \leq U_n$$

pour n pair,

$$\frac{(\frac{n}{2}+1)(\sqrt{\frac{n}{2}})}{n^\alpha} \leq U_n$$

$$\frac{(\frac{n}{2}+1)\sqrt{\frac{n}{2}}}{n^\alpha} = \frac{\frac{n\sqrt{n}}{4} + \sqrt{\frac{n}{2}}}{n^\alpha} = \frac{n^{1+\frac{1}{2}}}{4n^\alpha} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1+\frac{1}{2}}}{4n^\alpha} > 0$$

$$\frac{n^{1+\frac{1}{2}}}{4n^\alpha} = \frac{1}{4n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$$

Or la série $\sum \frac{1}{4n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$ diverge si $\alpha - \frac{3}{2} \leq 1$ d'après riemann. D'après le théorème de sommation des équivalents si la série $\sum \frac{1}{4n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$ diverge alors la série $\sum \frac{(\frac{n}{2}+1)(\sqrt{\frac{n}{2}})}{n^\alpha}$ diverge. Finalement par le théorème de domination la série U_n diverge si $\alpha \leq \frac{5}{2}$.

MaPaurie

Exercice de khôlle semaine 5

Enoncé :

On considère la suite (U_N) définie par $U_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 1, \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{n}}$$

1) Déterminer la limite de (U_n) et un équivalent simple de U_n quand $n \to +\infty$.

2) Préciser alors la nature des séries $\sum \frac{1}{U_n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{U_n}$

Solution :

1) * On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$

* On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1}^2 = U_n^2 + \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{1}{n} > 0$$

Ainsi, la suite $(U_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{U_n^2} = |U_n| \underset{\underset{U_n \geq 0}{\uparrow}}{=} U_n$

D'où, par stricte croissance de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

* On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_{k+1}^2 - U_k^2 = \frac{1}{k}$

En sommant pour k allant de 1 à n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k+1}^2 - U_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \iff U_{n+1}^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

On en déduit que $(U_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la série harmonique.

Ainsi, $(U_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Comme elle est de plus croissante, par le théorème de convergence monotone, $U_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Par continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

* On sait que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. De plus comme $U_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $U_n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} U_n^2$

Ainsi, $U_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \underset{\substack{\uparrow \\ x\mapsto\sqrt{x} \text{ est} \\ \text{continue sur } \mathbb{R}^+}}{\Rightarrow} U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)}$ ~~$x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante~~

Finalement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \text{ et } U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)}}$

2) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{1}{U_n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\ln(n)}} \underset{\uparrow}{\geq} \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$

concavité de $\ln$ sur $\mathbb{R}^+$
(ie $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(x) \leq x$)

Ainsi, par
- le théorème de Riemann ($\frac{1}{2} \leq 1$),
- le théorème de domination sur les séries à termes positifs
- le théorème de sommation des séries à termes positifs

on a $\boxed{\sum_{n\geq1} \frac{1}{U_n} \text{ diverge}}$

* On vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternée.

(H1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1}} \times \dfrac{(-1)^n}{U_n} = \dfrac{-1}{\underbrace{(U_{n+1}U_n)}_{>0}} \leq 0$

(H2) Comme $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\dfrac{1}{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par théorème d'opération sur les limites.

(H3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1}}\right| - \left|\dfrac{(-1)^n}{U_n}\right| = \dfrac{U_n - U_{n+1}}{\underbrace{U_{n+1}U_n}_{>0}} \leq 0$ car $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Finalement, $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{U_n} \text{ converge}}$

Valentin

Exercice : Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n!}$
3. $u_n = 1-\cos(\dfrac{\pi}{n})$
4. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = n^{-3/2} = \dfrac{1}{n^{3/2}} > 0$ par Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ CV ($\frac{3}{2} > 1$)

Par théorème de sommation des équivalents pour les SATP, $\sum u_n$ CV

2. $u_n = \dfrac{1}{n!}$

On étudie ici $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$ Donc d'après d'Alembert $\sum u_n$ CV

3. $u_n = 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

On utilise ici un DA de cos (car $\frac{\pi}{n} \to 0$) avec

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$

ainsi $u_n = \dfrac{\pi^2}{2n^2} + o(x^3) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2n^2}$ par Riemann, par linéarité $\sum \dfrac{\pi^2}{2n^2}$ CV

et par théorème de sommation des équivalents pour les SATP $\sum u_n$ CV.

4. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)} = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}$

- $\underbrace{\dfrac{-1}{n\ln(n)}}_{\to 0} \leq \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)} \leq \underbrace{\dfrac{1}{n\ln(n)}}_{\to 0}$ Par théorème d'encadrement $u_n \to 0$

- $(|u_n|) = \dfrac{1}{n\ln(n)}$

$|u_{n+1}| - |u_n| = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \dfrac{1}{n\ln(n)} < 0$ donc $(|u_n|)$ est décroissante.

- $u_n - u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{n(n+1)\ln(n)\ln(n+1)} = -\dfrac{1}{n(n+1)\ln(n)\ln(n+1)} < 0$

Ainsi d'après le CSSA, $\sum u_n$ cv.

Margaux

$$\boxed{\text{Déterminer la nature de la série } \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \sim \frac{4n^2}{n^2} = 4 \to 4 > 1$$

donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

> Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$
> 1) Déterminer un équivalent de $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$
> 2) Déterminer la nature de $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et en déterminer la limite de (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$$= \ln\left(\frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}\right) = \ln\Big(1 - \underbrace{\frac{1}{2(n+1)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\Big)$$

or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$

donc

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\frac{1}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

et donc

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \sim -\frac{1}{2n}$$

2) donc on a

$$-(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \sim \frac{1}{2n} > 0$$

Comme

- $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente
- par linéarité des séries
- par théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs

$\Sigma -(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))$ diverge

Par linéarité, $\Sigma \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ diverge.

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln(u_k) - \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$$

$$= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \to -\infty$$

car

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \sim -\frac{1}{2} \ln(n) \to -\infty.$$

On a donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

DECOOL
Laetitia

Soit la série de terme général : $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$, $n \geqslant 0$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2. Calculer sa somme.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$

1. . $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) \geq 0$
$\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction : $x \to x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et continue.
D'où $\cos^n(t) \geq 0$
Par croissance de l'intégrale, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt \geq 0$

Ainsi ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} \cdot u_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,dt \leq 0}$

. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| - |u_n| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(\cos(t) - 1)\,dt$

Or $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) - 1 \leq 0 \Rightarrow \cos^n(t)(\cos(t) - 1) \leq 0$
Encore par croissance de l'intégrale, on obtient :
$|u_{n+1}| - |u_n| \leq 0 \Rightarrow |u_{n+1}| \leq |u_n|$

$\boxed{\text{La suite } (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante}}$

. On cherche à montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - 0| \leq \varepsilon$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^n(t)|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$

Soit $\varepsilon > 0$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \cos^n(t)dt + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$

$\leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)dt$.

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n$.

Or, comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\left|\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| < 1 \Rightarrow \cos^n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\forall \alpha > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left|\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| \leq \alpha$

En particulier pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} > 0$: $\forall n \geq N$
$|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, et ceci $\forall \varepsilon > 0$
On a donc montré que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$
D'après le critère spécial sur les séries alternées,
$\boxed{\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge}}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-\cos(t))^k\, dt$

$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n \cos^{n+1}(t)}{1+\cos(t)}\, dt$.

Or : $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n \cos^{n+1}(t)}{1+\cos(t)}\, dt\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(t)}{1+\cos(t)}\, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\, dt$.
(car $\cos(t) \geq 0$)

Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Par théorème de comparaison, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n \cos^{n+1}(t)}{1+\cos(t)}\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2(\cos^2(\frac{t}{2}))}\, dt$

$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \left[\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Ainsi, $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$

Léonard Discuter suivant la valeur de $b \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln(n))^b}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

On introduit $f \left| \begin{array}{l} [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x \ln^b(x)} \end{array} \right.$

f est continue par morceaux et positive sur $[2, +\infty[$. De plus f est dérivable sur $[2, +\infty[$ et :

$$\forall x \in [2, +\infty[, \; f'(x) = \frac{-\left(\ln^b(x) + x b \frac{1}{x} \ln^{b-1}(x)\right)}{(x \ln^b(x))^2} \underset{\geq 0}{<0}$$

Ainsi f est décroissante. Nous pouvons donc appliquer le théorème de comparaison série intégrale qui nous donne que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^b(n)}$ et $\left(\int_2^n \frac{1}{t \ln^b(t)} dt\right)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$ ont même nature.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\int_2^n f(t) dt = \begin{cases} \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } b = 1 \\ \frac{1}{1-b}\left(n^{1-b} - 2^{1-b}\right) & \text{si } b \neq 1 \end{cases}$

Ainsi $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^b(n)}$ est convergente si et seulement si $1-b < 0$

c'est-à-dire $1 < b$.

Pauline

<u>Énoncé</u>: Soit la série de terme général :

$$u_n = \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}, \quad n \geq 1.$$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

2) Calculer sa somme. On mettra en évidence une fraction rationnelle.

$\forall n \geq 1$:

1) $$u_n = \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} \sim \frac{6^n}{3^{n+1}\times 3^n} = \frac{6^n}{3\times 9^n}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

Or, $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$.

Par linéarité des séries convergentes :

$\sum \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge.

Par sommation des équivalents :

$\sum_{n\geq 1} u_n$ converge

2) $\forall n \geq 1$:

$$u_n = \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \frac{6^n/9^n}{\frac{(3^{n+1}-2^{n+1})}{3^n}\times\frac{(3^n-2^n)}{3^n}}$$

$$= \frac{2^n / 3^n}{\left(3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

On pose : $x = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

On a : $\frac{x}{(3-2x)(1-x)} = \frac{a}{(3-2x)} + \frac{b}{(1-x)}$

On a : $a(1-x) + b(3-2x) = x$.

Pour $x = \frac{3}{2}$; $a = -3$

Pour $x = 1$; $b = 1$.

Ainsi ; par décomposition en éléments simples :

$$\frac{x}{(3-2x)(1-x)} = \frac{-3}{(3-2x)} + \frac{1}{(1-x)}$$

Donc : $\forall n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{-3}{3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}$$

$$= 3 - \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}.$$

Pauline.

Quand $n \to +\infty$:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \to 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc : $3 - \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \to 2$.

Ainsi : $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 2$.

Lindolet
Julian

Exercice de khôlle
Semaine n°5

Exercice 2
Etudier la nature de la série $\sum u_n$ définie par son terme général:

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}} \sin(t)\, dt,\ n \in \mathbb{N}$$

. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}} \sin(t)\, dt = \int_0^n e^{-\sqrt{t}} \sin(t)\, dt \text{ (par Chasles)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a:

$$0 \leq \left| \int_0^n e^{-\sqrt{t}} \sin(t)\, dt \right| \leq \int_0^n e^{-\sqrt{t}} |\sin(t)|\, dt$$

$$\leq \int_0^n e^{-\sqrt{t}}\, dt.$$

Or en posant $f : \begin{cases} [0; n[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \longmapsto e^{-\sqrt{t}} \end{cases}$, on a:

. f est $\mathcal{C}_{pm}$ et positive, et:

Soit $t \in [0; n[$.

$t^{2} \times e^{-\sqrt{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Donc $f(t) = e^{-\sqrt{t}} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or par Riemann $(2>1)$, $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc par théorème d'intégration des o pour les fonctions positives,

$t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est intégrable en $+\infty$.

Par théorème de domination pour les fonctions positives, il vient que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-\sqrt{t}} \sin(t)\, dt$ est bien définie, ainsi, on en déduit que $\sum v_n$ converge.

Gillier
Clarisse
MP

Khôlle semaine 5

Déterminer la nature de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

$$U_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+(-1)^n)^{1/2}} = \frac{(-1)^n}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\to 0})^{1/2}}$$

or $(1+x)^\alpha = 1 + x\alpha + o(x)$ quand $x \to 0$

Donc quand $n \to +\infty$ $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$U_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}}$$

or $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ quand $x \to 0$

$$U_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$U_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}} \underbrace{- \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{= V_n}$$

or $\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ désigne le terme général d'une série convergente d'après le critère spécial des séries alternées

· $\sum_{n\geq 1} -\frac{1}{2n^{3/2}}$ converge d'après Riemann $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$ et par linéarité.

et comme $v_n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ une série de Riemann convergente, d'après le théorème de sommation des o :

$\sum_{n\geq 1} v_n$ converge absolument donc converge

Finalement la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ étant la somme de trois séries convergente, converge.

Sirine

Exercice Khôlle :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}$$

* Si $\alpha = 0$, $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1} = \frac{1}{n}$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge (d'après Riemann)
Ainsi, si $\alpha = 0$: $\sum u_n$ diverge.

* Considérons $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit : $v_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.
tel que $u_n = \frac{1}{v_n}$.

On introduit $f \left| \begin{array}{l} [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+ \\ x \to x^\alpha \end{array} \right.$, croissante et continue sur $[1,+\infty[$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, f étant croissante :
$\forall x \in [k ; k+1]$; $k^\alpha \leq x^\alpha \leq (k+1)^\alpha$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$k^\alpha \leq \int_k^{k+1} x^\alpha dx \leq (k+1)^\alpha.$$

En sommant pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ $(n \geq 2)$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha \leq \int_1^n x^\alpha dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^\alpha$$

$$\iff v_n - n^\alpha \leq \int_1^n x^\alpha dx \leq v_n - 1.$$

$$\iff \int_1^n x^\alpha dx + 1 \leq v_n \leq \int_1^n x^\alpha dx + n^\alpha.$$

Or : $\displaystyle\int_1^n x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^n$

$$= \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}$$

D'où :

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + 1 \leq v_n \leq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + n^\alpha$$

$$\underset{\times\left(\frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}\right)}{\implies} 1 - \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \leq v_n \times \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} \leq 1 - \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

$\alpha+1 > 0$

Et par théorème d'encadrement,

$$v_n \times \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

D'où : $\displaystyle v_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

et $\displaystyle u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} \geq 0$

Comme $\alpha > 0$; $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ est convergente (d'après Riemann $\alpha+1 > 1$).

· Par linéarité, on a : $\displaystyle\sum \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ convergente.

Et par théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs,

$\sum u_n$ converge (si $\alpha > 0$).

Abengue
Emilie

Exercice 11 :
Démontrer que la série de terme général :

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(pour $n \geq 2$) est convergente et calculer sa somme.

$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$\sum u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}} - 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ par télescopage

$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + - 2\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Or quand $n \to +\infty$ $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$ et $-\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

Donc $\sum_{k=2}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. $\sum u_n$ converge

bien et vers $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

MATHEY
Ryan

Exercice 1. Étudier la convergence de la série de terme général $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

on peut utiliser un developpement limité de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ à l'ordre 2 :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + -\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n + o(1)}$$

Quand $n \to +\infty$, $e^{n+o(1)} \to +\infty$

Le terme général de la suite diverge ainsi la série

$\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ diverge.

Boumedouet
Bilal

Exercice 1. Etudier la nature de la série $\sum \frac{e^{2n} n!}{n^n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{e^{2n} \cdot n!}{n^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{2n}}{n^n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} e^n \cdot \sqrt{2\pi n} > 0$$

or, quand $n \longrightarrow +\infty$, $e^n \cdot \sqrt{2\pi n} \longrightarrow +\infty$

Donc la série $\Sigma e^n \sqrt{2\pi n}$ diverge grossièrement.

On en déduit, comme $(e^n \cdot \sqrt{2\pi n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement positive, d'après le théorème de sommation des équivalents,

$$\boxed{\Sigma \frac{e^{2n} \cdot n!}{n^n} \text{ diverge.}}$$

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{x^2+1}\, dx$.

1. Déterminer un équivalent simple de u_n.
2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(n^3) - \arctan(n^2)$

$$= \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$$

2) De manière analogue à l'exercice 1, Σu_n converge

Pierre

Kholle semaine 5.

Etudier la convergence de la série $\sum U_n$, où $U_n = \frac{\ln(n^n)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+1)!\ \ln(n) n} \times n! = \frac{\ln(n+1)}{n\ln(n)} = V_n$$

De plus, $V_n = \frac{\ln(n(1+1/n))}{n\ln(n)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DL de } \ln(1+x)}}{=} \frac{1}{n} + \frac{o(1/n)}{n\ln(n)} \longrightarrow 0 < 1.$

ainsi, par le critère de d'Alembert, avec $0 < U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

la série $\sum U_n$ converge.

1. *Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.*
2. *On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.*
3. *En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :*

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Clara Studer

① $\sum_{k=0}^{n} y_k = \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k = x_{n+1} - \underbrace{x_0}_{\text{constante}}$

· Si la somme partielle de Σy_n est convergente alors $x_{n+1} - x_0$ est une constante, or x_0 est aussi une constante donc on en déduit que x_{n+1} est une constante, et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.

De même, · Si la somme partielle de Σy_n diverge alors $x_{n+1} - x_0 \to \pm\infty$ donc $x_{n+1} \to \pm\infty$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente

En conclusion, la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de m̂ nature

② $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{e}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{n}n + \frac{1}{2n^2}(n-1)n + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{5}{2e} \approx 0{,}92 < 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

donc d'après le critère de d'Alembert, (u_n) est convergente

donc on en déduit que $\ln(u_n)$ est convergente
et d'après la question 1, on peut conclure que la série de terme général v_n est convergente

③ On a donc $\ln(u_n) \to \ell \in \mathbb{R}$

donc $u_n \to \ell' > 0$ car la ln est une fonction positive d'où $\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell'$

et donc $n! \sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{\ell'}$ et donc $n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$ avec $C = \frac{1}{\ell'} > 0$

Maëva Exercice de Colle semaine 5 MP

Sujet : Nature de la série de terme général $U_n = \sin\left(\pi\sqrt{(n^2+a^2)}\right)$ où $a \in \mathbb{R}$ fixé

On cherche à étudier le terme général de la série. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{(n^2+a^2)}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{n^2\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)}\right) = \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)$$

On effectue un développement limité de $\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}$ car $\frac{a^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\times\frac{a^2}{n^2} - \frac{1}{8}\times\frac{a^4}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

On a alors $u_n = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{a^2}{2n^2} - \frac{a^4}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$

$$= \sin\left(\pi n + \frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^4}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\sin(\pi n)\cos\left(\frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^4}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}_{=0} + \underbrace{\cos(\pi n)}_{"(-1)^n"}\sin\left(\frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^4}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^4}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

On peut alors effectuer un développement limité de sinus en 0 car $\frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^4}{8n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ Donc :

$$U_n = (-1)^n\left(\frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^4}{8n^3} - \frac{\left(\frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^4}{8n^3}\right)^3}{6} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$U_n = (-1)^n\left(\frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^4}{8n^3} - \frac{\left(\frac{\pi a^2}{2n}\right)^3}{6} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$U_n = (-1)^n\left(\underbrace{\frac{\pi a^2}{2n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\pi a^4}{8n^3}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\pi^3 a^5}{48n^3}}_{\to 0} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\to 0}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On observe que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée.

On regarde la monotonie de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$|U_{n+1}| - |U_n| = \frac{\pi a^2}{2(n+1)} - \frac{\pi a^4}{8(n+1)^3} - \frac{\pi^3|a^5|}{48(n+1)^3} - \frac{\pi a^2}{2n} + \frac{\pi a^4}{8n^3} + \frac{\pi^3|a^5|}{48n^3} \leqslant 0$$

Donc d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum U_n$ converge.

Bastien
MP

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur de a, la nature de la série $\sum \frac{a^n}{1+\sqrt{n}}$.

Soit $\sum \frac{a^n}{1+\sqrt{n}} = \sum u_n$, étudions sa nature suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

. Si $|a| < 1$

$$u_n = \frac{a^n}{1+\sqrt{n}} \leq a^n (>0)$$

Or, a^n est le terme général d'une série géométrique convergente ($|a|<1$) donc par théorème de domination sur les séries à termes positifs $\sum u_n$ converge.

. Si $|a| > 1$

$$u_n = \frac{a^n}{1+\sqrt{n}} \leq \frac{a^n}{\sqrt{n}} = \frac{e^{n\ln(a)}}{\sqrt{n}} \to +\infty \text{ par croissances comparées}$$

Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

. Si $|a| = -1$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$$

On a alors, $u_n u_{n+1} = \frac{(-1)^{2n+1} (<0)}{(\cancel{1}+\sqrt{n+1})(1+\sqrt{n})(>0)} < 0$

$|u_n| = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ décroissante

$$u_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\ \underbrace{\frac{-1}{1+\sqrt{n}}}_{\to 0} \leq \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}_{\to 0} \end{array}\right\} \text{par théorème d'encadrement } u_n \to 0$$

On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées.

et on a donc $\sum u_n$ CV d'après ce critère

. Si $|a| = 1$

$u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} (>0) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \, (>0)$

or $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ est le terme général d'une série de Riemann

divergente $(\frac{1}{2} < 1)$ donc par théorème de sommation des équivalents $\sum u_n$ diverge.

Conclusion : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow |a| \in [-1, 1[$

$\boxed{\text{Etude de la nature de la série de terme général : } u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $u_n \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$= e^{(n+1)^2 \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

$$= e^{(n+1)^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{(n+1)^2\left(-\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2(n+2)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$= e^{-\frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{(n+1)^2}{2(n+2)^2} + n - 1 + o(1)}$$

On $-\frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{(n+1)^2}{2(n+2)^2} + n - 1 = \frac{-2(n+1)^2(n+2) - (n+1)^2 + \frac{2}{n}(n+2)^2 - 2(n+2)^2}{2(n+2)^2}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2n^3}{2n^2} \sim -n \longrightarrow -\infty$$

Par composition des limites

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$ donc, par critère de d'Alembert $\sum u_n$ converge

Nature de la ~~série~~ suite : $u_n = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Le DL de cos à l'ordre 2 donne : $\cos(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2k+1})$

$$= \frac{(-1)^0}{0!} x^0 + \frac{(-1)^1}{2!} x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On fait un DA : $u_n = 1 - \left(1 - \frac{\pi^2/n^2}{2} + o(\pi^2/n^2)\right)$

$$= \cancel{1 - 1} + \frac{\pi^2/n^2}{2} + o(\pi^2/n^2)$$

$$u_n = \frac{\pi^2/n^2}{2} + o(\pi^2/n^2)$$

$\Rightarrow u_n \sim \frac{\pi^2/n^2}{2}$

D'après le critère de Riemann, $\frac{\pi^2/n^2}{2} = \frac{\pi^2}{2n^2}$ est convergente car $2 > 1$.

D'après le théorème de sommation des équivalents, (u_n) est de même nature que $\frac{\pi^2}{2n^2}$.

Donc, (u_n) est convergente.

$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N,$ Dorian CATHERINE

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geq 0$

Donc, pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $n \geq N$

$\forall n \geq N, \ u_n \geq u_N$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq u_N$

$u_N > 0$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0

On en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Colle S5 : Dorian CATHERINE

EXERCICE 7. — *Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.*

1. *Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.*
2. *Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a > 0$

On pose $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$

On suppose que $a \neq e$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{a^n n!}$$

$$= \frac{a(n+1) \times n^n}{(n+1) \times (n+1)^n}$$

$$= a\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$= a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$= ae^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1 + o(1)$

$\Rightarrow -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$

Par continuité de l'exponentiel :

$$ae^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} \xrightarrow[n \to +\infty]{} ae^{-1}$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{e}$

Si $a<e$, alors $\frac{a}{e}<1$

D'après la règle de D'Alembert, Σu_n converge

Si $a>e$, alors $\frac{a}{e}>1$

D'après la règle de D'Alembert, Σu_n diverge

2. Supposons que $a=e$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$= e\,e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

Or, $-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$= -1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = \exp\left(-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= e^{-1}\times\exp\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= e^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}-1 = \frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Erem

Exercice 1
Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

1. Déterminer un équivalent du reste partiel R_n.

2. Etudier alors la convergence de la série $\sum \frac{R_n}{S_n}$ en fonction des valeurs de α.

1) Soit $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On pose $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto e^{-\alpha \ln(x)}$

- f est positive
- f est une fonction continue par morceaux
- f est C^∞ sur $[1, \infty[$

de plus pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = -\alpha e^{(-\alpha-1)\ln(x)} \leq 0$

f étant decroissante sur $[1, \infty[$, le théorème de comparaison série integral s'applique

On a $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$, $\forall x \in [k, k+1]$

Soit $n, N \in \mathbb{N}^*$ $1 \leq n+1 \leq N$

On somme pour k allant de $n+1$ à N

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$$

$\Rightarrow$ quand $n \to \infty$

$$R_n - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq - \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq R_n$$

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

$\hookrightarrow \times \frac{(\alpha-1)}{(n+1)^{1-\alpha}} > 0$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \frac{\alpha-1}{(n+1)^{1-\alpha}} R_N \leq 1 + \frac{\alpha-1}{(n+1)}$$

Par théorème d'encadrement :

$$R_n \sim \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \sim \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

2) On sait que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$

appelons alors S cette limite, lorsque n tend vers l'infini.

On a à l'infini $\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{(\alpha-1)(n^{\alpha-1})S} > 0$

On a Par théorème de sommation des equivalents pour des series à terme positif :

$\sum \frac{R_n}{S_n}$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{1}{(\alpha-1)(n^{\alpha-1})S}$ converge

Or $\sum \frac{1}{(\alpha-1)(n^{\alpha-1})S}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha - 1 > 1$ <u>ie $\alpha > 2$</u>

EXERCICE 9. — *On considère la série :* $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. *Prouver que, au voisinage de* $+\infty$:
$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α *est un réel que l'on déterminera.*
2. *En déduire que la série* $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ *converge.*
3. *La série* $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ *converge-t-elle absolument ?*

Lanie Tredeiz

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \pi\sqrt{n^2+n+1} = \pi n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : (u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-\ell\right)\frac{x^k}{k!} + o(u^n)$

soit $n=3$ et $\alpha \leftarrow \frac{1}{2}$: $(u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

pour $u \leftarrow 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ on a : $(u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

$- \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\alpha = \frac{3}{8}$

2) donc $\pi n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\pi n\left(1+1/n+1/n^2\right)^{1/2}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

or $\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\to} 0$ $\quad \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

En sommant on a $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

or $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une suite convergente et $\frac{1}{n^2}$ est convergent

car c'est une serie de riemann donc par theoreme de somation des O on a $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converg alors la suite converg

3. $\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = \left|\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right| \to 0$

donc elle converge absolument.

Théorème

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers 0 et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 0$.
Montrer que la série de terme général $U_n = aV_n + bV_{n+1} + cV_{n+2}$ converge et calculer sa somme.

$$\sum_{k=0}^{n} U_k = a \sum_{k=0}^{n} V_k + b \sum_{k=0}^{n} V_{k+1} + c \sum_{k=0}^{n} V_{k+2}$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} V_k + b \sum_{k=1}^{n+1} V_k + c \sum_{k=2}^{n+2} V_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} V_k \underbrace{(a + b + c)}_{=0} + bV_{n+1} - bV_0 + cV_{k+1} + cV_{k+2} - cV_0 - cV_1$$

Or $V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = -(bV_0 + c(V_0 + V_1))$$

FROMONOT Pierre

Exercice 2
Etudier la nature de la série $\sum u_n$ définie par son terme général:

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}} \sin(t)\, dt,\ n \in \mathbb{N}$$

On remarque qu'en fonction de n le signe de u_n change. En effet, u_{n+1} est de signe opposé à u_n, donc $\sum u_n$ est une série alternée.

- On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante en valeur absolue :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u = t - n\pi$

$t = u + n\pi$

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}} \sin(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+n\pi}} \cdot \sin(u+n\pi)\, du$$

$$= (-1)^n \underbrace{\int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+n\pi}} \cdot \sin(u)\, du}_{\geq 0} .$$

Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}| - |u_n| = \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+(n+1)\pi}} \cdot \sin(u)\, du - \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+n\pi}} \cdot \sin(u)\, du$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(u) \underbrace{\left(e^{-\sqrt{u-(n+1)\pi}} - e^{-\sqrt{u+n\pi}}\right)}_{\leq 0 \text{ par décroissance de } x \mapsto e^{-x}} du .$$

Et ainsi, (u_n) est décroissante en valeur absolue.

- Reste à montrer que $|u_n|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$|u_n| = \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+n\pi}} \cdot \underbrace{\sin(u)}_{\leq 1} du$$

$$\leq \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+n\pi}} du$$

$\leq \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{n\pi}}$ (par décroissance de $x \mapsto e^{-x}$)

$= \pi \cdot e^{-\sqrt{n\pi}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par composition des limites.

Donc on a : $0 \leq |u_n| \leq \pi \cdot e^{-\sqrt{n\pi}}$, ainsi par encadrement, $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ainsi, d'après le critère spécial pour les séries alternées, $\sum u_n$ converge.

Yann

Maths : Exercice de Khôlle :

Exercice : Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^n}$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
4. $u_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$

1) $U_n = \dfrac{n}{n^3+1} \sim \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

De plus $2 > 1$, donc d'après le théorème de sommation pour les suites à termes positifs, $\sum U_n$ converge.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \frac{n+1-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{3/2}} > 0$$

Or $3/2 > 1$, donc d'après Riemann, $\sum U_n$ converge.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{1}{n^n} = n^{-n} = e^{-n\ln(n)} > 0$$

Or quand $n \to +\infty$, par croissance comparée,

$-n\ln(n) \to -\infty$ et ainsi $e^{-n\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc d'après Riemann, ΣU_n converge

4) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$= e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= e^{n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

$$= e^{n^2\left(-\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\sim \underbrace{e^{-n}}_{>0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc par Riemann, ΣU_n converge.

Bombardelli Martin

On considère la serie $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n!} > 0$

On calcule $\frac{1}{(n+1)!} \times \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$

Ainsi d'après la règle de d'alembert $\sum u_n$ converge

ROBERT
Corentin
MP

Khôlles

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, on étudie la convergence des séries $\sum U_n$ avec $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$U_n = \frac{n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann.

maintenant, par sommation des équivalents $\sum U_n$ converge.

2) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\geq 2}}$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum U_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{k}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\sum U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sum U_n = 2\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{k}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum U_n = -2 \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$