Yann
MP

Exercice de Khôlle :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \text{Arctan}(U_n)$

1) Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer, en fonction de x_0, le sens de variation de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

1) On rappelle que la fonction f telle que $f(x) = \arctan(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On procède alors par disjonction de cas

* $u_0 = u_1$
$\Rightarrow \text{Arctan}(u_0) = \text{Arctan}(u_1)$
$\Rightarrow u_1 = u_2$
Par itérations successives, on obtient :
$u_0 = u_1 = \dots = u_n$
Et ainsi $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante

* $u_0 < u_1$
$\Rightarrow \text{Arctan}(u_0) < \text{Arctan}(u_1)$
$\Rightarrow u_1 < u_2$
Par itérations successives, on obtient :
$u_0 < u_1 < \dots < u_n$
Et ainsi $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

* $u_0 > u_1$
$\Rightarrow \text{Arctan}(u_0) > \text{Arctan}(u_1)$
$\Rightarrow u_1 > u_2$
Par itérations successives, on obtient :
$u_0 > u_1 > \dots > u_n$
Et ainsi $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Par conséquent, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone

De plus,

- si $\text{Arctan}(x_0) = x_0$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante
- si $\text{Arctan}(x_0) < x_0$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- si $\text{Arctan}(x_0) > x_0$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est décroissante

2) Soit l'application f_1 :

$$f_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\\ u \longrightarrow \text{Arctan}(u) \end{array} \right.$$

On sait donc que f_1 est bornée puisque Arctan est bornée. Par conséquent, en prenant $u = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'après le théorème de la limite monotone :

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et monotone, donc

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Théorème

On considère la série de therme général U_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ U_n = \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2}$$

1) Montrer que la série $\sum U_n$ est convergente

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\sum_{k=1}^{n} U_k$ en fonction de H_n et H_{2n+1}.

1) $U_n = \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2}$ est à thermes strictements positifs.

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\dots+k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On reconnait ici une série de Riemann de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Et donc, d'après le théorème de domination pour les séries à thermes positifs.

$\sum U_n$ converge.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum_{l=1}^{k} k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)}$$

$$= 6\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right) = 6H_n + 6H_n - 6 - 24\left(H_{2n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) - 1$$

$$= 12H_n + 18 - 24\left(H_{2n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right.$$

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ sh\, 2x = 2\, ch\, x\, sh\, x$

Dans la suite de l'exercice x est un réel non nul **fixé**

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = ch\frac{x}{2^1}\times ch\frac{x}{2^2}\times\cdots\times ch\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n} ch\frac{x}{2^k}$

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Ex 1. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $2\, ch(x)\, sh(x)$

$$= 2\,\frac{(e^x+e^{-x})}{2}\times\frac{(e^x-e^{-x})}{2}$$

$$= \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = sh(2x)$$

2. d'après 1) on a $\forall u \in \mathbb{R}^*$:

$$ch(u) = \frac{sh(2u)}{2\, sh(u)}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\frac{x}{2^k} \in \mathbb{R}$ donc on peut faire un changement de variable : $u = \frac{x}{2^k}$

$$ch\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{sh\left(2\frac{x}{2^k}\right)}{2\, sh\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$

par produit $\forall n \in \mathbb{N}$: $\prod_{k=1}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{sh\left(\frac{2x}{2^k}\right)}{2\, sh\left(\frac{x}{2^k}\right)}$

$$= \frac{1}{2^n}\times\frac{sh(x)}{sh\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

or $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}\times\frac{sh(x)}{\frac{x}{2^n}}$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{sh(x)}{x}$$

donc u_n converge vers $\frac{sh(x)}{x}$

Valentin

Enoncé : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante dont une sous suite converge. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Notons $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la sous suite convergente.

Par définitions : $\varphi : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$. ⊛

Or $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$.

$\Rightarrow l - \varepsilon \leq u_{\varphi(n)} \leq l + \varepsilon$

D'après ⊛ $u_n \leq u_{\varphi(n)},\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow u_n \leq l + \varepsilon$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée converge d'après le théorème de la limite monotone

GILLIER
Clarisse
MP

Khôlle semaine 4

Déterminer (U_n) en fonction de u_0, si pour tout entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} U_n^2}$$

- On pose la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n^2$

$$V_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} U_n^2 = 1 + \frac{1}{2} V_n \Rightarrow \text{suite arithmético-géométrique.}$$

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 1 + \frac{1}{2} x \end{array} \right.$

On cherche α tel que $f(\alpha) = \alpha$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \alpha = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

- On introduit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $W_n = V_n - \alpha$

Dans ce cas

$$W_{n+1} = V_{n+1} - \alpha$$

$$W_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} V_n - 2 = -1 + \frac{1}{2} V_n$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} (V_n - 2) = \frac{1}{2} W_n$$

Ainsi (W_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

D'où

$$W_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n W_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - 2)$$

Et $\quad V_n = W_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - 2) + 2$

$$V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0^2 - 2) + 2$$

Et finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, comme
$$v_n = u_n^2$$
$$\Rightarrow \quad u_n = \sqrt{v_n}$$
$$\Rightarrow \quad u_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0^2 - 2) + 2}$$

Margaux

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1+u_n^2$.
Etudier la convergence et déterminer l'éventuelle limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On introduit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 1+x^2 \end{array}\right.$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

L'intervalle $I=[0,+\infty[$ est stable car $f(I)\subset I$: la suite est bien définie et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,+\infty[$.
Comme f est croissante sur cet intervalle, le sens de variation de (u_n) dépend du signe de u_1-u_0.
$u_1-u_0=1+u_0^2-u_0$ $\quad\Delta=-3<0$ donc le signe est celui du terme au carré. D'où $u_1-u_0>0$.
Donc (u_n) est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone,
- soit (u_n) converge.
- soit $u_n\to+\infty$.

Supposons que (u_n) converge et notons ℓ sa limite ($\ell\in\mathbb{R}$). Dans ce cas, on a $\ell=1+\ell^2$

$$\Rightarrow \ell^2-\ell+1=0$$

Comme $\Delta=-3<0$, il n'y a pas de solutions réelles.
Comme (u_n) est à valeurs réelles et que l'équation

n'admet que des solutions complexes, (u_n) ne peut pas converger.
On en déduit que $u_n \to +\infty$.

Mathilde
REBHANN
MP

Colle de Maths S2

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soient $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes.
On a alors par définition :
$\cdot \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, n \in \mathbb{N}, |u_{2n} - \ell_1| \leq \varepsilon$
$\cdot \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, n \in \mathbb{N}, |u_{3n} - \ell_2| \leq \varepsilon$
On pose $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite extraite contenant à la fois les termes de (u_{2n}) et (u_{3n})
On a alors :
$\cdot \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, n \in \mathbb{N}, |u_{6n} - \ell_1| \leq \varepsilon$
$\cdot \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, n \in \mathbb{N}, |u_{6n} - \ell_2| \leq \varepsilon$
Par unicité de la limite, $\ell_1 = \ell_2$ donc
$u_{2n} \to \ell_1$ et $u_{3n} \to \ell_1$ par $n \geq \mathrm{Max}(N_1, N_2)$
De plus, on a :
$\cdot \forall \varepsilon > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_3, n \in \mathbb{N}, |u_{2n+1} - \ell_3| \leq \varepsilon$
On pose $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite extraite contenant à la fois les termes de (u_{3n}) et (u_{2n+1})
On a alors :
$\cdot \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, n \in \mathbb{N}, |u_{6n+3} - \ell_2| \leq \varepsilon$
$\cdot \forall \varepsilon > 0, \exists N_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_3, n \in \mathbb{N}, |u_{6n+3} - \ell_3| \leq \varepsilon$
Par unicité de la limite $\ell_2 = \ell_3$ donc $\ell_1 = \ell_3$.
On en déduit que les termes pairs et impairs de (u_n) convergent vers la même limite, donc on a :
pour tout $n \geq \mathrm{Max}(N_1, N_2, N_3)$, (u_n) converge.

Pauline.

Énoncé : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 2. \\ 0 \leq v_n \leq 3 \end{cases} \quad \text{et} \lim_{n\to+\infty} u_n . v_n = 6.$$

Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

On cherche à encadrer (u_n) afin de montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 2$.

On remarque que : $2 \times 3 = \lim_{n\to+\infty} u_n . v_n$

Montrons que ; $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_n . v_n}{3} \leq u_n$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq v_n \leq 3$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n . v_n \leq 3\, u_n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{u_n . v_n}{3} \leq u_n.$$

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_n . v_n}{3} \leq u_n \leq 2.$$

Quand $n \to +\infty$: $\frac{u_n . v_n}{3} \longrightarrow 2.$

$2 \to 2.$

Par théorème d'encadrement : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2.$

De même, on cherche à encadrer (v_n) afin de montrer que $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 3$

Or, $2 \times 3 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \cdot v_n.$

Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_n \cdot v_n}{2} \leqslant v_n.$

Or, $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2.$

$$\Rightarrow 0 \leqslant u_n \cdot v_n \leqslant 2 v_n.$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{u_n \cdot v_n}{2} \leqslant v_n.$$

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_n \cdot v_n}{2} \leqslant v_n \leqslant 3.$$

Quand $n \to +\infty$: $\dfrac{u_n v_n}{2} \to 3.$

$3 \to 3.$

Par théorème d'encadrement : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 3$

RAYBAUDI
Rose

L. 28/09/20

Colle S4

Exercice 1: Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = (n+1)^{1/\ln(n)}$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. $u_n = \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Et par continuité de $x \mapsto e^x$, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e}$

Exercice 2: Donner l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ avec $u_0 = 3$ et $u_1 = 5$.

On a $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$
On lui associe l'équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$
$\Delta = 1$, donc $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$
Ainsi, on obtient :
$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda + \mu . 2^n$

Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} u_0 = 3 = \lambda + \mu \\ u_1 = 5 = \lambda + 2\mu \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \mu = 2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = 2^{n+1} + 1}$

Exercice 3: 1) Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence
2) Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
3) Quelles sont les valeurs d'adhérence de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

4) Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.

5) Prouver que si (u_n) est bornée et divergente, elle admet toujours (au moins) deux valeurs d'adhérence distinctes.

1) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\ell \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de (u_n) si :

$\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

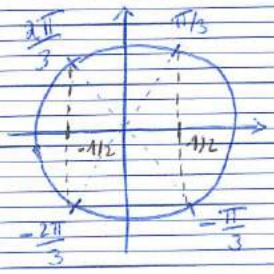
2) Une suite convergente possède une unique valeur d'adhérence qui est sa limite.

3) • Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$(-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Ainsi, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède 2 valeurs d'adhérence : 1 et -1



• Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

* Si $n = 3k$, $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = (-1)^k$
* Si $n = 3k+1$, $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \pm\frac{1}{2}$
* Si $n = 3k+2$, $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \mp\frac{1}{2}$

Ainsi, les valeurs d'adhérence de $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$

4) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} u_{2n} = \frac{1}{n} \\ u_{2n+1} = n \end{cases}$

Et ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas car (u_{2n+1}) diverge mais possède une unique valeur d'adhérence : 0 (limite de (u_{2n}))

5) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée et divergente. Montrons qu'elle a au moins 2 valeurs d'adhérence. Par l'absurde, si (u_n) a une unique valeur d'adhérence alors, étant bornée, elle converge. <u>CONTRADITION</u>.

Limotet
Julian

Exercices de khôlle
Session n°4.

Exercice 5
On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cos^3(3^k\lambda)}{3^k}$$

1. Préciser la nature de la suite (S_n) et déterminer sa limite.
2. Justifier en fait que la suite (S_n) converge indépendamment de λ.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{R}$.

$$\cos^3(X) = \left(\frac{e^{iX} + e^{-iX}}{2}\right)^3 \quad \text{(formule d'Euler)}$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{i3X} + 3e^{i2X}e^{-iX} + 3e^{iX}e^{-i2X} + e^{-i3X}\right) \quad \text{(binôme de Newton)}$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{i3X} + e^{-i3X} + 3e^{iX} + 3e^{iX}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(3X) + \frac{3}{4}\cos(X) \quad \text{(formule d'Euler)}$$

Ainsi, $\cos^3(3^k\lambda) = \frac{1}{4}\cos(3^{k+1}\lambda) + \frac{3}{4}\cos(3^k\lambda)$.

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\cos(3^{k+1}\lambda)}{3^k} + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{\cos(3^k\lambda)}{3^k}$$

$$= \frac{-3}{4}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\frac{\cos(3^{k+1}\lambda)}{3^{k+1}} + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{\cos(3^k\lambda)}{3^k}$$

$$= \frac{-3}{4}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k\frac{\cos(3^k\lambda)}{3^k} + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{\cos(3^k\lambda)}{3^k}$$

$$= \frac{3}{4}\cos(\lambda) + (-1)^{n+2} \cdot \frac{3}{4} \underbrace{\frac{\cos^3(3^{n+1}\lambda)}{3^{n+1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \left((\cos^3(x_n)) \text{ est borné et } \left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{4}\cos(\lambda)$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n,\lambda} = \frac{3}{4}\cos(\lambda)$, et (S_n) converge.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$0 \leq \left| (-1)^n \frac{\cos^3(3^n\lambda)}{3^n} \right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\forall X \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(X) \leq 1)$$

Or $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge $\left(\left|\frac{1}{3}\right| < 1\right)$, donc par théorème de domination sur les séries à termes positifs, $\sum (-1)^n \frac{\cos^3(3^n\lambda)}{3^n}$ converge absolument donc converge, et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, (S_n) converge pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Julian

Exercice de libellé
Semaine n° 4

Exercice 2
Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = n\sin(2\pi n! e)$$

est convergente et préciser sa limite.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$U_n = n \cdot \sin(2\pi n! e)$$

$$U_n = n \cdot \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

$$U_n = n \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + 2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

$$U_n = n \sin\left(2\pi \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{l=k+1}^{n} l\right)\right)}_{\in \mathbb{N}} + 2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

$$U_n = n \sin\left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \sin(2\pi k + x) = \sin(x))$$

1

• Or pour tout $k \geq n+1$, on a :

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1}{\prod_{l=n+1}^{k} l}.$$

De plus, pour tout $k \geq n+4$, on a :

$$0 \leq \frac{n!}{k!} = \frac{1}{\prod_{l=n+1}^{k} l} \leq \frac{1}{k(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Ainsi, par Riemann $(3>1)$, par théorème de sommation des o et de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs, on a :

$\sum \frac{n!}{k!}$ converge, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right)$$

On cherche donc un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathbb{N}_{\geq n}$, $k \in \mathbb{N}^*$,
$\forall t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{t^3} \leq \frac{1}{k^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} dt \leq \frac{1}{k^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+2}^{N} \frac{1}{k^3} \leq \int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^3} dt \leq \sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{1}{k^3} \quad \text{(par Chasles)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \leq -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{N^3}$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}$$

Julien

Exercice de khôlle
Semaine n° 4

$$\Rightarrow 1 \leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right) 2 \cdot (n+1)^2 \leq 1 + \frac{2}{n+1}$$

Par théorème d'encadrement, quand $n \to +\infty$, on a :

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right) 2 \cdot (n+1)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \iff \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}$$

Ainsi, $\underline{R_n = o\left(\frac{1}{2n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$.

. En reprenant ①, on a :

$$0 \leq |U_n| = n\,|\sin(2\pi R_n)| \quad ②$$

. Or, par concavité de sin sur $[0;2\pi]$, on a :
$\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \leq x$.

De plus, pour tout $x \in [\frac{\pi}{2};+\infty[$, on a $\sin(x) \leq 1 \leq x$.

Ainsi, $\underline{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \text{ on a : } \sin(x) \leq x}$.

② devient :

$$0 \leq |U_n| \leq n \cdot |2\pi R_n| = n \cdot 2\pi \cdot R_n.$$

En remarquant que $n \underset{+\infty}{=} o(n^{3/2})$, on a :

$0 \leq |u_n| \leq o(n^{3/2}) \cdot 2\pi \cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 2\pi \cdot o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$

Par théorème d'encadrement, $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On en conclut que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Boumedaut
Bilal
MP

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$.

Étudier la convergence et déterminer l'éventuelle limite de (u_n).

• On pose $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto 1 + \frac{x^2}{4} \end{array} \right.$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{x}{2}$ d'où

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
f	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que celui de $u_1 - u_0$.

$$u_1 - u_0 = 1 + \frac{u_0^2}{4} - u_0 = \frac{1}{4}(u_0 - 2)^2 \geqslant 0.$$

Donc (u_n) est croissante.

On distingue alors deux cas :

• $u_0 \in [0\,;2]$.

$[0\,;2]$ est stable par f, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;2]$.

Alors, (u_n) étant croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge

Recherche des points fixes de f :

On résout, $f(l) = l \Leftrightarrow 1 + \frac{l^2}{4} - l = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(l-2)^2 = 0$

Donc $l = 2$.

On en déduit alors : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$

- $u_0 \in]2 ; +\infty[$

$]2 ; +\infty[$ est stable par f.

On procède par l'absurde en supposant que (u_n) converge.
Alors, $\exists l \in \mathbb{R}_+, u_n \to l$.

Or, u_n tend vers un point fixe de f, donc $u_n \to 2$.

et, comme $u_0 \in]2;+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$
donc (u_n) est strictement croissante

d'où, $\forall n \in \mathbb{N}, 2 < u_0 < u_n$

Ainsi, $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - 2| > \varepsilon$
En effet, avec $\varepsilon = \frac{u_0 - 2}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| > \frac{u_0-2}{2}$.

Donc (u_n) est croissante et non majorée,

Finalement, $u_n \longrightarrow +\infty$

Mathias

Banque d'exercices

4. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

lim + équivalent

EXERCICE 8. — *Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{2n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}} - \sqrt{1-\frac{1}{2n}}\right)$

$u_n = \sqrt{2n}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{1/2}\right)$

On $\frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$u_n = \sqrt{2n}\left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right) - 1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)\right)$

$u_n = \sqrt{2n}\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 8 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$ (1)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + \frac{u_n^2}{2} - u_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2 - 2u_n\right)$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 \geq 0$, ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, ainsi ; en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (1) : $\ell = \frac{1+\ell^2}{2}$

$\Rightarrow 1 + \ell^2 - 2\ell = 0 \Rightarrow (\ell-1)^2 = 0 \Rightarrow \ell = 1$.

Ainsi, si $u_0 \leq 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Si $u_0 > 1$, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 > 1$ et donc quand $n \to +\infty$, $\ell \geqslant 1$. Par l'absurde, supposons que $\ell = 1$: comme $u_0 > 1$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>1}$, contradiction $\lightning$ $\ell \neq 1$.
Comme on a montré que ℓ est nécessairement égale à 1, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ lorsque $u_0 > 1$.

Léonard Colle S4 25/9/2020

Déterminer, en fonction de n et de ses premiers termes, la suite définie par $4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.

On reconnait une suite linéaire récurrente d'ordre 2 à laquelle on associe l'équation caractéristique :

$4r^2 - 4r - 3 = 0$ $\Delta = 16 + 48 = 64 > 0$ l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $r_1 = \frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{3}{2}\right)^n$ où λ et μ sont des constantes.

$$\begin{array}{l} \text{pour } n=0 : \\ \text{pour } n=1 : \end{array} \begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ 2u_1 = -\lambda + 3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{u_0 - 2u_1}{2} \\ \mu = \frac{u_0 + 2u_1}{4} \end{cases}$$

Finalement, on récupère que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{u_0 - 2u_1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{u_0 + 2u_1}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n$

MATHEY
Rayan
(MP)

Question de cours

Définition d'une suite divergeant vers $-\infty$. Théorème de domination pour la divergence vers $+\infty$

Exercice :

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.

1. Calculer u_k, pour $k \in [\![2\,;5]\!]$.

2. **(a)** Démontrer : pour tout réel $x \geqslant 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} > \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

(b) Démontrer par récurrence : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$.

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et un équivalent de u_n.

Q1) $U_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ $\qquad U_4 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$U_3 = 1 + \frac{2}{2} = 2$ $\qquad U_5 = 1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5}$

Q2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant 2$, $\quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

or $\sqrt{x} + 1 > 0$, $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0$

x étant supérieur ou égale à 2, $\quad \sqrt{x+1} > 1$

$\iff \sqrt{x+1} + \sqrt{x} > \sqrt{x} + 1$.

Ainsi par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_{\geqslant 2}$, nous obtenons.

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} > \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

et ainsi nous avons bien,

$$\forall x \geq 2 \quad \frac{1}{\sqrt{x}+1} > \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$$

b) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2 \quad \sqrt{n} \leq U_n \leq \sqrt{n} + 1$

Posons, $P(n)$: " $\sqrt{n} \leq U_n \leq \sqrt{n} + 1$ ".

Initialisation $n = 2$ $\quad U_2 = 2$

$\sqrt{2} \leq 2 \leq \sqrt{2} + 1 \quad$ (car $\sqrt{2} > 1$, $\sqrt{2}+1 > 2$)

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose $P(n)$ vraie, reste à montrer que $P(n+1)$ est vraie, $P(n+1)$ = " $\sqrt{n+1} \leq U_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + 1$ "

D'après $P(n)$. $\quad \sqrt{n} \leq U_n \leq \sqrt{n} + 1$

Par décroissance de la fonction inverse on obtient:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{U_n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

$$\times n > 0 \quad \frac{n}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{U_n} \geq \frac{n}{\sqrt{n}+1}$$

$$+1 \quad 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{U_n} + 1 \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1}$$

Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, $1 + \sqrt{n+1} \geq 1 + \sqrt{n}$

Reste à montrer que $\quad 1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1} \geq \sqrt{n+1}$

$$1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})+1}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

$$\leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (2)\ a))$$

$$\leq \sqrt{n+1}$$

Ainsi on obtient $\sqrt{n+1} + 1 \geq U_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie et donc nous avons bien montré que $\forall n \geq 2$, $\sqrt{n} \leq U_n \leq \sqrt{n} + 1$.

c) $\forall n \geq 2$ $\sqrt{n} \leq U_n \leq \sqrt{n} + 1$ or $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

or $\sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$\forall n \geq 2$ $\sqrt{n} \leq U_n$, par Théorème de domination pour les suites divergentes vers $+\infty$. $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

or $\sqrt{n} + 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n}$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}_{1} \leq \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}}}_{1}$$

Par le Théorème d'encadrement $\frac{U_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et par définition $U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n}$

EXERCICE 20. — *Soit $\alpha > 0$ et $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$.*

1. *Démontrer que si $\alpha > 1$ alors $u_n \to 0$.*
2. *Démontrer que si $\alpha < 1$, alors $u_n \to +\infty$.*
3. *Démontrer que si $\alpha = 1$, la suite est monotone et convergente.*
4. *Démontrer que, pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(1+x) \le x \le -\ln(1-x)$.*

Marine

1) si $\alpha > 1$ on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{\underbrace{n^{\alpha-1}}_{\ge 0}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car $\alpha > 1$.

Donc on a : $0 \le u_n \le \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, avec $0 \to 0$ et $\frac{1}{n^{\alpha-1}} \to 0$

par théorème d'encadrement,
on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

2) si $\alpha < 1$ on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + n^\alpha} = \frac{n}{2n^\alpha} = \frac{1}{2n^{\alpha-1}}$$

On a donc $u_n \ge \frac{1}{2n^{\alpha-1}}$

et $\frac{1}{2n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car $\alpha - 1 < 0$

D'après le théorème de domination, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

3) si $\alpha = 1$ on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^1 + k^1} = \frac{1}{n+1+k} > 0$$ car n et k sont des entiers naturels.

La suite (u_n) est donc croissante

et de plus :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

4) • On pose $\forall x \in [0,1[$ $\quad f(x) = \ln(1+x) - x$.

f est définie et dérivable sur $[0,1[$ donc on a : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1$.

$$f'(x) = \frac{-x}{1+x} \quad \begin{matrix} \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

Donc :

x	0		1
$f(x)$	0	$\searrow$	

On a donc $f(x) \leq 0$, i.e : $\ln(1+x) - x \leq 0 \Rightarrow \ln(1+x) \leq x$.

• On pose $\forall x \in [0,1[$, $f(x) = x + \ln(1-x)$

f est définie et dérivable sur $[0,1[$, $f'(x) = 1 + \dfrac{-1}{1-x}$.

$$f'(x) = \frac{-x}{1-x} \quad \begin{matrix} \leq 0 \\ \geq 0 \text{ car } x \in [0,1[. \end{matrix}$$

Donc :

x	0		1
$f(x)$	0	$\searrow$	

On a donc $f(x) \leq 0$ i.e : $x + \ln(1-x) \leq 0 \Rightarrow x \leq -\ln(1-x)$

On a bien trouvé : $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$

Exercice :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telle que :

$0 \leqslant u_n \leqslant 1$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ et $u_n v_n \longrightarrow 1$

Que pouvez-vous dire de (u_n) et (v_n) ?

Soit $n \in \mathbb{N}$

- On a $u_n v_n \longrightarrow 1$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n v_n - 1| \leqslant \varepsilon$

$\Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leqslant u_n v_n \leqslant 1 + \varepsilon$

Or $u_n v_n \leqslant u_n$ car $0 \leqslant v_n \leqslant 1$

$\Rightarrow \boxed{1 - \varepsilon \leqslant u_n}$

Or $u_n \leqslant 1 \Rightarrow u_n \leqslant 1 + \varepsilon$ pour $n \geqslant N$

Ainsi, pour $n \geqslant N$, $|u_n - 1| \leqslant \varepsilon$

$\Leftrightarrow \boxed{u_n \to 1}$

pareil pour (v_n)

Aissame • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la nature de U_n et sa limite éventuelle.

$$U_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}{n^2} > 0$$

$$U_n \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(n)}{n^2} = \frac{n\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par croissance comparée.

$U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Soit $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ alors $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$0 \leqslant U_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n}{n^\alpha} = n^{1-\alpha} \quad \text{or } \alpha > 1$$

donc $n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par théorème d'encadrement $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$U_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^\alpha} = \frac{1}{2} n^{1-\alpha} \quad \text{or } \alpha < 1$$

Donc $\frac{1}{2} n^{1-\alpha} \to +\infty$. Par théorème de domination $U_n \to +\infty$.

3. Soit $\alpha = 1$, Démontrer que la suite est monotone et convergente :

$$0 \leqslant U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leqslant 1$$

Ainsi U_n est majoré par 1.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$

Donc (u_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone (u_n) converge.

4. Démontrer que, pour tout $x \in [0;1[$,

$\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$

$(\ln(1+x))'' = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$

Donc $\ln(1+x)$ est concave d'où $\ln(1+x) \leqslant x$

$(-\ln(1-x))'' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$

Donc $-\ln(1-x)$ est convexe d'où,

$\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$.

Aissame • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Montrer que (U_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

On étudie la monotonie de (U_n) et (v_n) :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)(4n+3) - 4n^2 - 2n - 6n - 2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

Donc (U_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} < 0 \text{ car } \frac{1}{n} > \frac{1}{2n+1}$$

$$U_n - v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$= -\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc (v_n) est décroissante.
Ainsi (v_n) et (U_n) sont adjacentes.

Daniel

Exercice 8 ★★★

Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite (a_n) par :

$$\forall\, n \geq 1,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2a_{n-1}}{n+1}$$

Préciser la nature de la suite (a_n) et déterminer sa limite.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = \frac{2a_{n-1}}{n+1}$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.

Montrons-le par récurrence forte sur $\mathbb{N}$.

- $n = 0$ et $n = 1$.

$$a_0 ; a_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(0), \dots, P(n+1)$ vraies et montrons que $P(n+2)$ est encore vraie.

$$a_{n+2} = \underbrace{a_{n+1}}_{>0} + \underbrace{\frac{2a_n}{n+1}}_{>0} \text{ d'après } P(n) \text{ et } P(n+1).$$

donc $a_{n+2} > 0$.

donc $P(n+2)$ est encore vraie. Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi $\frac{2a_{n-1}}{n+1} > 0$ donc (a_n) est croissante

De plus, on remarque que (a_n) semble divergente.

Pour montrer cela, raisonnons par l'absurde en supposant que (a_n) est convergente tel que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$

On a $a_{n+1} - a_n \sim 2\ell\frac{1}{n}$ $(\ell \neq 0)$ car $\ell \geq a_n \geq a_0 > 0$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_{n+1} - a_n > 0$

alors $\sum u_n \sim \sum 2\ell\frac{1}{n}$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann et linéarité)

Ainsi, d'après le théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.

Cependant, $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k$

$= a_{n+1} - a_0$

Or, $a_{n+1} - a_0 \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ CONT car $\sum u_n$ diverge

donc, nécessairement, (a_n) est divergente. Et par le théorème de la limite monotone, $\boxed{a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$

SUJET : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réelles telles que les trois sous suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réelles telle que :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0,\ \exists N_1\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N_1,\ |u_{2n}-\ell_1|\leq\varepsilon \\ \forall \varepsilon>0,\ \exists N_2\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N_2,\ |u_{2n+1}-\ell_2|\leq\varepsilon \\ \forall \varepsilon>0,\ \exists N_3\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N_3,\ |u_{13n}-\ell_3|\leq\varepsilon \end{cases}$$

Montrons que $\ell_1=\ell_2$.

D'une part, montrons que $\ell_1=\ell_3$.

On peut voir qu'une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $(u_{26n})_{n\in\mathbb{N}}$ et cette suite extraite est également une suite extraite de $(u_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$, d'après le théorème de la valeur d'adhérence d'une suite convergente, on a :

$$\begin{cases} u_{26n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell_1 \\ u_{26n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell_3 \end{cases}$$ Or, par unicité de la limite, $\ell_1=\ell_3$.

D'autre part, montrons que $\ell_2=\ell_3$.

On peut voir qu'une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $(u_{26n+13})_{n\in\mathbb{N}}$ et cette suite extraite est également une suite extraite de $(u_{13n})_{n\in\mathbb{N}}$, d'après le théorème de la valeur d'adhérence d'une suite convergente, on a :

$$\begin{cases} u_{26n+13}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell_2 \\ u_{26n+13}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell_3 \end{cases}$$ Or, par unicité de la limite, $\ell_2=\ell_3$

Ainsi, on a $\ell_1=\ell_2$. Or, $u_{2n}+u_{2n+1}=u_n$, et ainsi, par le théorème de la valeur d'adhérence pour une suite convergente :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $u_n\to\ell_3\ (=\ell_2=\ell_1)$

Colle S4 — Dorian CATHERINE

Exercice 1 : Convergence et limite de la suite définie par : $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+3i}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

$1 \leqslant i \leqslant n$

$\Rightarrow 3 \leqslant 3i \leqslant 3n$

$\Rightarrow n^2+3 \leqslant n^2+3i \leqslant n^2+3n$

$\Rightarrow \sqrt{n^2+3} \leqslant \sqrt{n^2+3i} \leqslant \sqrt{n^2+3n}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+3i}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} \leqslant a_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$

$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+3n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+3n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Par le théorème d'encadrement, a_n converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.

Exem

> Etudier la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :
>
> $$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = (1 - u_n)^2$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (1-x)^2$,
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 2(x-1)$$

- f est decroissante sur $[0,1]$ avec en particulier $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.
$[0,1]$ est donc un intervalle stable par f. De plus $u_0 \in [0,1]$ On montre par récurrence immédiate que $u_n \in [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Les limites possible de (u_n) verifient :
$$(1 - f(x))^2 = x$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0$$
dont les solutions sont :
$$\ell_0 = 0 \quad \ell_1 = 1 \quad \ell_2 = \underset{\simeq 0{,}38}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \text{ et } \ell_3 = \underset{>1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

- f étant décroissante on s'intéresse aux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

Posons alors $V_n = u_{2n}$ et $W_n = u_{2n+1}$

On a $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$ et $u_3 = \frac{49}{256}$

Soit $V_1 - V_0 = \frac{1}{16} > 0$ et $W_1 - W_0 = -\frac{15}{256} < 0$

Par conséquent, la suite (V_n) est croissante et la suite (W_n) est décroissante.

· De plus (V_n) étant majorée par 1 et croissante elle converge d'après le théorème de convergence monotone, en particulier :

$V_0 \leq V_n \leq 1$ et la limite vérifie

$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$, la seul limite possible est 1

· (W_n) étant décroissante et minorée elle converge d'après le théorème de convergence monotone, en particulier :

$W_0 \geq W_n \geq 0$

$\frac{1}{4} \geq \ell \geq 0$ la seul limite possible est 0

finalement, (U_n) ne peut être convergente et admet alors deux valeurs d'adhérences qui sont 0 et 1

Clara

Etudier la suite récurrente :

$u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$

On pose $f(x) = (1-x)^2$

On cherche les points fixes. On résout $f(x) - x = 0$

ssi $x^2 - 3x + 1 = 0$

On a les racines : $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Par une récurrence rapide, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$

de plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, f décroissante strictement sur $[0,1]$ donc f est stable sur l'intervalle $[0,1]$.

On en déduit que si (u_n) converge, la seule limite possible est $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

On étudie la monotonie des suites extraites u_{2n} et u_{2n+1}

$u_2 - u_0 = \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1}{16} > 0$ on a $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

$u_3 - u_1 = \frac{49}{256} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{256} < 0$ $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_0 \leq u_{2n} \leq 1$ $0 \leq u_{2n+1} \leq u_1$

$\frac{1}{2} \leq u_{2n} \leq 1$ $0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{1}{4}$

$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone, (u_{2n}) est convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$

$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0

Donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_{2n+1}) est convergente vers une limite $l' \in \mathbb{R}$

Et par passage à la limite dans les inégalités, on a :

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq l' \leq \frac{1}{4}$$

donc $l \neq l'$.

Finalement par unicité de la valeur d'adhérence d'une suite convergente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Bastien
MP

Énoncé :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \geq 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq \sqrt{n}$
2. (a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$: $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n :
   $$u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$$
3. Déterminer les limites de : $\left(\frac{u_n}{n^2}\right)$, $\left(\frac{u_n}{n}\right)$, $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$

Résolution :

1. Montrons que $P(n)$: "$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{n}$" par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

Initialisation pour $n = 0$:
$$u_0 \geq 0 = \sqrt{0}$$
Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $P(n)$ est vraie montrons que $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$ ($P(n+1)$) est vraie aussi.

D'après $P(n)$ on a : $u_n \geq \sqrt{n}$
$$u_n + n + 1 \geq \sqrt{n} + n + 1$$
$$\sqrt{u_n + n + 1} \geq \sqrt{\sqrt{n} + n + 1}$$
$$u_{n+1} \geq \sqrt{\sqrt{n} + n + 1} \geq \sqrt{n+1}$$
Donc $P(n+1)$ est vraie ainsi d'après le principe de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

2 – (a) Montrons que pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$

On a : $\frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - x^{\frac{1}{2}} \geq 0$

car $x \geq x^{\frac{1}{2}}$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$

(b) Si on prend $x = u_n \geq 0$ on a que

$\sqrt{u_n} \leq \frac{1}{2}(1+u_n)$

Et on montre par récurrence que $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$

Initialisation à $n=0$: $u_0 \leq 0 + \frac{u_0}{2^0} = u_0$

Donc c'est vrai au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que l'assertion est vraie au rang n et montrons que $u_{n+1} \leq n+1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$

on a $\sqrt{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(1+u_{n+1})$ d'après 2(a)

$\leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{n+1+u_n}$

On d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)+\cdot\frac{1}{2}(2n+1)+\frac{u_0}{2^{n+1}}}$

$u_{n+1} \leq n+1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$

Donc l'assertion est vraie au rang $n+1$ donc par récurrence

$\forall n \geq 0$, $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$

3 – $0 \leq \frac{u_n}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} + \frac{u_0}{n^2(2^n)} = \frac{1}{n} + \frac{u_0}{n^2 2^n} \to 0$

Donc d'après le théorème d'encadrement $\frac{u_n}{n^2} \to 0$

$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \sqrt{\frac{n+1+u_n}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{1}{n+1} + \frac{u_n}{(n+1)^2}} \to 0$ car $\frac{u_n}{(n+1)^2} \to 0$

$\frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n+1+u_n}{n+1}} = \sqrt{1 + \frac{u_n}{n+1}}$ car, $\frac{u_n}{n+1} \to 0$

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \to 1$ donc $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \to 1$ et donc

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

Pierre

Colle n°2, Semaine 4.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}$

$\rightarrow$ Déterminer un équivalent simple de u_n.

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$, $u_n > 0$.

. $n=2$: $u_2 = \frac{e^{-u_1}}{1} > 0$

. soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, supposons $u_n > 0$. $u_{n+1} = \frac{e^{\overset{>0 \text{ d'après } \mathcal{P}(n)}{-u_n}}}{n} > 0$

d'où $\forall n \geq 2$, $u_n > 0$.

Ainsi, soit $n \geq 3$, $0 \leq u_{n+1} = \frac{e^{\overset{>0}{-u_n}}}{n} \leq \frac{1}{n}$

par théorème d'encadrement, $u_{n+1} \rightarrow 0$.

De plus, soit $n \geq 3$.

$n u_{n+1} = e^{\overset{\rightarrow 0}{-u_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

et finalement, $u_n \sim \frac{1}{n}$

MOUCHENE Paul — Kholle numéro 2 — MP

Semaine 4 - Sujet 2

✍ Théorème de Bolzano-Weierstrass (énoncé). Comportement asymptotique de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $q \in \mathbb{C}$.

Exercice 1. Etudier la nature et déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$(E_n) : \quad \sum_{k=1}^{n} x^k = 1.$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution réelle positive, notée u_n. Déterminer u_1 et u_2.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice n°1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$

On remarque pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} = \frac{\ln\left(\prod_{k=0}^{n} k\right)}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{n}$$

De plus,

$x \to \ln(x)$ étant croissante sur $[1, +\infty[$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n}$$

or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$ d'où,

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

or par croissance comparée, $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc par théorème d'encadrement,
$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Emilie

Exercice 1 Soit (u_n) la suite défini par $u_0 \in]0,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n)$$

1) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

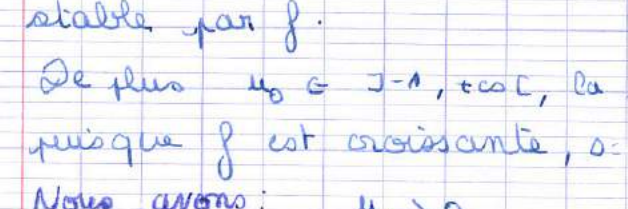
2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$. Déterminer un équivalent de v_n.

3) En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 1

1) Soit $f \left| \begin{array}{l}]-1;+\infty[\longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{array} \right.$

f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$. Ainsi :



$f(]-1,+\infty[) \subset]-1,+\infty[$ ainsi $]-1,+\infty[$ est un intervalle stable par f.

De plus $u_0 \in]-1,+\infty[$, la suite (u_n) est définie et puisque f est croissante, o: dépend de u_0 et u_1

Nous avons : $u_0 > 0$

$\Rightarrow 1 + u_0 > 1$

$\Rightarrow u_1 > 0$ → En composant par le logarithme

Ainsi $\ln(1+u_0)$ est défini croissant sur $\mathbb{R}_+^*$.

- De plus puisque $\ln(1+u_0) < u_0 \Rightarrow u_1 < u_0$.

(U_n) est décroissante.

- Par récurrence on peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n$. (Facultatif) (*)

Ce qui par le théorème de convergence monotone nous permet de dire que (U_n) converge.

- $\ln(1+x)$ étant continue sur $[0; +\infty[$, U_n tend vers un point fixe $\ell \in [0; +\infty[$, tel qu'on ait $\ln(1+\ell) = \ell$. $\Rightarrow \ell = 0$

2) $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1}} = \dfrac{1}{\ln(1+U_n)} = \dfrac{1}{U_n - \frac{U_n^2}{2} + o(U_n)}$ ↳ Puisque $U_n \to 0$

on peut donc appliquer un DL de $\ln(1+x)$ en U_n.

$V_{n+1} = \dfrac{1}{U_n} \cdot \left(\dfrac{1}{1 - \frac{U_n}{2} + o(1)} \right) = \dfrac{1}{U_n} \left(1 - \dfrac{U_n}{2} + o(1) \right)$

en appliquant un DL de $\dfrac{1}{1+x}$ en U_n car $U_n \to 0$

$V_{n+1} = \dfrac{1}{U_n} - \dfrac{1}{2} + o(U_n)$

Donc :

$V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{U_n} - \dfrac{1}{2} + o(U_n) - \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{-1}{2} + o\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$

$\sum_{k=0}^{n} V_{n+1} - V_n = \sum_{k=0}^{n} -\dfrac{1}{2} + o\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ ↳ En sommant de 0 à n+1

$V_{n+1} = \dfrac{-(n+1)}{2} + \sum_{k=0}^{n} o\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$

Ainsi $V_{n+1} \sim \dfrac{-(n+1)}{2}$

$V_n \sim \dfrac{-n}{2}$

3) On obtient $u_n \sim \dfrac{-2}{n}$.

(*) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n$.

- Pour $n = 0$: $u_0 \in]0; +\infty[$ donc on a $0 < u_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, tel qu'on ait $0 < u_n$. Montrons alors que $0 < U_{n+1}$

D'après l'hypothèse : $u_n > 0 \Rightarrow 1 + U_n > 1$

$\Rightarrow \ln(1+U_n) > 0$ par croissance du logarithme

$\Rightarrow U_{n+1} > 0$.

L'hypothèse est vérifiée au rang $n+1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Mimouna
Sirine

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2) Déterminer les limites des suites de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$ et $w_n = \prod_{k=0}^{n} (1-u_k)$.

1) On a immédiatement :

$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$

C'est à dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on note :

$P(n)$: "

* Initialisation : $n = 0$:

On a $u_0 \in]0,1[$. (par définition de la suite).

donc $P(0)$ est vraie.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]0,1[$.

On considère u_{n+1} :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 = \underbrace{u_n}_{\in]0,1[} \underbrace{(1-u_n)}_{\in]0,1[}$$

(On a : $u_n \in]0,1[\Rightarrow -u_n \in]-1,0[\Rightarrow 1-u_n \in]0,1[$)

D'où $u_{n+1} \in]0,1[$.

D'après le principe de récurrence, $P(n+1)$ est encore vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.

* On a : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, d'après le théorème de convergence monotone $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

Reste à déterminer sa limite.

Par passage à la limite dans l'égalité :
$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$
On obtient : $\ell = \ell - \ell^2$
$$\iff \ell^2 = 0$$
$$\iff \ell = 0.$$

Finalement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) On a : $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$.

On remarque que :
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n+1} u_k$$
$$= u_0 - u_{n+1}$$
(car $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$).

Comme $u_{n+1} \to 0$ (question 1).
D'où $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_0$

Mimoura
Srrine

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

$\Rightarrow u_{n+1} = u_n (1 - u_n)$.

$\overset{u_n \neq 0}{\Longrightarrow} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n$.

Ainsi,

$$w_n = \prod_{k=0}^{n} (1 - u_k) = \frac{\prod_{k=0}^{n} u_{k+1}}{\prod_{k=0}^{n} u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} \text{ (par télescopage)}$$

Or $u_{n+1} \to 0$ (qu. 1),

D'où $w_n \to 0$.

Donin de
Rosière
Benjamin

Colle Semaine n°4

1) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose convergente de limite $\ell \neq 0$.
Montrer alors que : $\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell$.

Soit $\varepsilon > 0$:

$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 + 1,$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right|$$ inégalité triangulaire

$$\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell|\right)$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell|\right) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=N_1+1}^{n} \underbrace{|u_k - \ell|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| + \frac{n-N_1}{n}\,\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc :

$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell|\right| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc, pour tout $n \geq N_0 = \max(N_1, N_2)$:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

C'est-à-dire : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

Ainsi, puisque $l \neq 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\sim} nl$$

2) On considère alors la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

a) Justifier rapidement que la suite (u_n) est convergente.

On pose $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{array} \right.$ $\quad [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$

f est deux fois dérivable et :

$$\forall x \in [0,1],\ f''(x) = -\sin(x) \leq 0$$

Ainsi, f est concave : elle est en dessous de toutes ses tangentes, en particulier en 0 :

$$\forall x \in [0,1],\ \sin(x) \leq x = f(0) + (x-0)f'(0)$$

De plus, le segment $[0,1]$ est stable par sin :

$\forall x \in [0,1],\ \sin(x) \in [0,1]$.

Donc, par récurrence, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sin(u_n) \leq u_n \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ainsi, (u_n) est décroissante et, puisqu'elle est minorée par 0, elle converge par le théorème de convergence monotone. On note $l \in [0,1]$ sa limite, par continuité de sin, on a quand $n \to +\infty$:

$$\sin(l) = l \Rightarrow l = 0$$

On en conclut que (u_n) converge et sa limite est 0.

b) Déterminer alors une suite équivalente à (u_n).
On pourra déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ converge vers une limite non nulle.

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^3)$$

$$\Rightarrow u_{n+1}^{-2} = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^3)\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2)\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(1 + 2\frac{u_n^2}{6} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \neq 0$$

Donc, en appliquant la question 1, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \sim \frac{1}{3}\times n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2} \sim \frac{1}{3}\times n$$

Or, $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_{n+1}^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2}$ (car $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$)

On en déduit : $\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}n$

Donc : $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}$

Malaurie

Colle semaine 4

Enoncé:

Soit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite (a_n) par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2a_{n-1}}{n+1}$$

Préciser la nature de la suite (a_n) et déterminer sa limite

Résolution:

* Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.
  * Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $a_n > 0$ ".
  * Pour $n=0$ et $n=1$, c'est vrai.
  * Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(0), \dots, P(n)$ soit vraie.

$$a_{n+1} = \underbrace{a_n}_{\substack{>0 \\ \text{par } P(n)}} + \underbrace{\overbrace{\frac{2a_{n-1}}{n+1}}^{>0 \text{ par } P(n)}}_{>0} > 0$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} - a_n = \frac{2a_{n-1}}{n+1} > 0$.

On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Ainsi, par le théorème de convergence monotone, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_{k-1}}{k+1}.$$

On en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2a_{n-1}}{n+1}$.

* On étudie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2a_{n-1}}{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

$$\frac{2a_{n-1}}{n+1} \geq \frac{2a_0}{n+1} > 0.$$

Ainsi, par linéarité, théorème de Riemann ($1 \leq 1$) et théorème de domination pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \frac{2a_{n-1}}{n+1}$ diverge.

Finalement, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.