Ryan

Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $1+x \leq e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}$

On pose $f \left| \begin{array}{l} [0,1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow e^{sh(x)} \end{array} \right.$.

La fonction sh est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, de même pour exp.

$\forall x \in [0,1[$, $f'(x) = ch(x)\, e^{sh(x)}$

$f''(x) = \underbrace{(sh(x) + ch^2(x))}_{\geq 0} \underbrace{e^{sh(x)}}_{\geq 0}$

Ainsi f est convexe sur $[0,1[$,
donc f est au dessus de toutes ses tangentes :

$$f'(a)(x-a) + f(a) \leq e^{sh(x)}$$

en particulier celle en 0 : $f'(0) = 1$
$f(0) = 1$

$$1 + x \leq e^{sh(x)}$$

Cette égalité est vraie pour $x \in [0,1[$ en particulier pour $x \in]0,1[$.

On procède de même pour la seconde inégalité.
Soit $x \in [0,1[$.
on pose, $g(x) \left| \begin{array}{l} [0,1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \exp^{-sh(x)} \end{array} \right.$

$\forall x \in [0,1[,\quad g'(x) = -ch(x)\, e^{-sh(x)}$

$g''(x) = ch(x)^2 e^{-sh(x)} - sh\, e^{-sh(x)}$

$= \underbrace{\left(ch^2(x) - sh(x)\right)}_{\geqslant 0} \underbrace{e^{-sh(x)}}_{\geqslant 0}$

ch est croissante sur $[0,1[$

$\forall x \in [0,1[\begin{cases} ch^2(x) \geqslant sh(x) \\ \text{et } ch(x) > sh(x). \end{cases}$

Ainsi g est convexe sur $[0,1[$ donc supérieure à toutes ses tangentes en particulier en 0 : $\begin{cases} g'(0) = -1 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

$\forall x \in [0,1[,\ 1-x \leqslant e^{-sh(x)}$

la fonction inverse est décroissante sur $[0,1[$:

$$\frac{1}{1-x} \geqslant \frac{1}{e^{-sh(x)}} = e^{sh(x)}$$

Cette égalité est vraie sur $[0,1[$, en particulier sur $]0,1[$

(CQFD)

Maéva Exercice de colle semaine 15 MP

Enoncé :

Exercice 4. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \qquad h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1. Justifier l'existence de M.
2. Montrer que g est convexe et que h est concave.
3. En déduire que, pour tout $x \in [a;b]$, on a

$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1) Comme $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable deux fois sur $[a,b]$, on a bien $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ qui existe.

2) On a g et h qui sont deux fois dérivable (toutes deux de classe C^2 car composées de fonctions définies et dérivable C^2 sur $[a,b]$), on calcule alors g'' et h''.

D'une part, $g''(x) = f''(x) - \frac{M}{2} \times -2 = f''(x) + M$

- Si $f''(x) \geq 0$ on a $g''(x) \geq 0$
- Si $f''(x) \leq 0$ on a $-|f''(x)| = f''(x)$

D'où $M + f''(x) = M - |f''(x)| \geq 0$ car $M = \sup_{[a,b]} |f''|$

Donc $g''(x) \geq 0$ ce qui signifie que g est convexe.

D'autre part, $h''(x) = f''(x) + \frac{M}{2} - 2 = f''(x) - M$

- Si $f''(x) \leq 0$ on a $h''(x) \leq 0$
- Si $f''(x) \geq 0$ on a $|f''(x)| = f''(x)$

D'où $f''(x) - M = |f''(x)| - M \leq 0$

Donc $h''(x) \leq 0$ ce qui signifie que f est concave.

3) On a $f(x) = g(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2} = h(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$

En évaluant en a et en b on observe:

$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = h(a) = h(b) = 0$

De plus: Soit $x \in [a, b]$, $\exists \lambda \in [0,1]$ tq $x = a\lambda + (1-\lambda)b$.

Or, g est convexe, on a donc:

$$g(x) \leq \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b) = 0$$

D'où $g(x) \leq 0$

$$\iff f(x) - \frac{M(x-a)(b-x)}{2} \leq 0$$

$$\iff f(x) \leq \frac{M(x-a)(b-x)}{2} \quad (*)$$

De même, h est concave, on a donc:

$$h(x) \geq \lambda h(a) + (1-\lambda) h(b) = 0$$

D'où $h(x) \leq 0$

$$\iff f(x) + \frac{M(x-a)(b-x)}{2} \leq 0$$

$$\iff \frac{M(x-a)(b-x)}{2} \leq -f(x) \quad (**)$$

De $(*)$ et $(**)$, on déduit que:

$$|f(x)| \leq \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$$

Pierre

Exercice 4

1. Montrer que $f = \ln \circ \ln$ est concave sur $]1;+\infty[$.

2. En déduire que pour tous a et b strictement supérieurs à 1, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

1. Soit $x \in]1;+\infty[$.
f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout $x \in]1;+\infty[$,
$f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

$f''(x) = -\frac{\ln(x)+1}{\ln^2(x)\cdot x^2} \leq 0 \quad \forall x \in]1;+\infty[$.

Ainsi f est concave sur $]1;+\infty[$

2. La fonction ln étant concave, par inégalité de concavité on a :

$$\forall a,b > 1, \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\ln(a) + \frac{1}{2}\ln(b)$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique on a :

$$\forall a,b > \cancel{1}, \quad \sqrt{\ln(a)\ln(b)} \leq \frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b)).$$

Et donc, $\forall a,b > 1$,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b)) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

D'où l'inégalité.

Bastien

Énnoncé :

Considérons $a_1, ---, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}$$

Résolution ;

Si on considère :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

En posant, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

Montrons que f est convexe :

f est dérivable et et même deux fois dérivable :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \frac{6 + 2x^4}{x^4} > 0$$

Donc f est convexe

En appliquant l'inégalité de convexité généralisée à f :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2$$

$$\frac{(n^2+1)^2}{n^2} \underset{\left(\text{car } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right)}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2$$

On retrouve bien :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}$$

Walaszek Léonard

Semaine 15, convexité

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :
$\forall x \in]0,+\infty[, g(x) = x f(\frac{1}{x})$
1) On suppose f, g sont C^2, montrer que f est convexe si et seulement si g est convexe
2) On ne suppose plus que f, g sont C^2, redémontrer l'équivalence

1) f et g étant suffisamment régulières, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g'(x) = f(\tfrac{1}{x}) + x f'(\tfrac{1}{x}) \times (-\tfrac{1}{x^2})$$
$$= f(\tfrac{1}{x}) - f'(\tfrac{1}{x}) \times \tfrac{1}{x}$$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = f'(\frac{1}{x}) \times (-\frac{1}{x^2}) - \left(-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x} f''(\frac{1}{x}) \times (-\frac{1}{x^2})\right)$
$$= -f'(\tfrac{1}{x}) \times \tfrac{1}{x^2} + f'(\tfrac{1}{x}) \times \tfrac{1}{x^2} + f''(\tfrac{1}{x}) \times \tfrac{1}{x^3}$$

ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = \dfrac{f''(\frac{1}{x})}{x^3}$

Supposons g convexe, par caractérisation g'' est positive si $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) \geq 0$ or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = \dfrac{f''(\frac{1}{x})}{x^3}$ et $x^3 > 0$

ainsi $f''(\frac{1}{x}) \geq 0$ et f'' est positive. Par caractérisation, f est convexe. On montre le sens réciproque de la même manière.

2) Supposons ~~g~~ f convexe
Soit $x \leq y \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in [0,1]$,
$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) = (\lambda x + (1-\lambda) y) f\left(\frac{1}{\lambda x + (1-\lambda) y}\right)$$

or $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in [0,1]\}$
ainsi $x \leq \lambda x + (1-\lambda) y \leq y$

En composant par $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a
$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y} \geqslant \frac{1}{y}$. Il existe donc $\mu \in [0,1]$ tel que $\frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y} = \mu\frac{1}{x} + (1-\mu)\frac{1}{y}$

Analyse : Soit donc un tel μ, on a $\frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y} = \mu\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = \frac{\frac{-\lambda x+(\lambda-1)y+y}{y(\lambda x+(1-\lambda)y)}}{\frac{y-x}{xy}} = \dots = \frac{\lambda x}{\lambda x+(1-\lambda)y}$$

Synthèse : On a bien $0 \leqslant \mu = \frac{\lambda x}{\underbrace{\lambda x}_{\geqslant 0}+\underbrace{(1-\lambda)y}_{\geqslant 0}} \leqslant 1$

de plus, $\mu \times \frac{1}{x} + (1-\mu)\frac{1}{y} = \frac{\lambda x}{(\lambda x+(1-\lambda)y)x} + \frac{(1-\lambda)y}{(\lambda x+(1-\lambda)y)y}$

$$= \frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y}$$

f étant convexe, on a

$$f\left(\frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y}\right) = f\left(\mu\frac{1}{x}+(1-\mu)\frac{1}{y}\right) \leqslant \mu f\left(\frac{1}{x}\right)+(1-\mu)f\left(\frac{1}{y}\right), \text{ d'où}$$

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant (\lambda x+(1-\lambda)y)\left(\mu f\left(\frac{1}{x}\right)+(1-\mu)f\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$
$$\leqslant (\lambda x+(1-\lambda)y)\cdot\left(\frac{\lambda x}{\lambda x+(1-\lambda)y}f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(1-\lambda)y}{\lambda x+(1-\lambda)y}f\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$
$$\leqslant \lambda x f\left(\frac{1}{x}\right)+(1-\lambda)y f\left(\frac{1}{y}\right) = \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$$

Finalement g est convexe.
Suppose maintenant g convexe.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$ ainsi $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{g(x)}{x}$
Posons le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on a donc
$\forall X \in \mathbb{R}_+^*$, $f(X) = X g\left(\frac{1}{X}\right)$ avec g convexe
Le travail fait précédemment nous donne qu'alors f est convexe.
L'équivalence est ainsi prouvée.

ENILTE.

EXERCICE 6.

1- Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+e^{x})$ est convexe.

2- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :
$$1 + (\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (1+x_i)^{1/n}$$

3- En déduire que, pour tous réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ on a :
$$(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} + (\prod_{i=1}^n b_i)^{1/n} \leq (\prod_{i=1}^n (a_i+b_i))^{1/n}.$$

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car :
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ et donc $1+e^x > 0$
- f est composée du ln et de l'exp respectivement dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et $f''(x) = \underline{\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}} > 0$.

Ainsi par caractérisation de la convexité à l'aide du signe de la dérivée seconde, f est convexe.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 + (\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (1+x_i)^{1/n}$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{\ln((\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n})} \leq e^{\ln(\prod_{i=1}^n (1+x_i)^{1/n})}$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)} \leq e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+x_i)}$$

exp croissante sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$
ln croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\ln(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+x_i).$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\ln(x_i))}$$

Or puisque f est convexe et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n} \in [0,1]$

En appliquant l'inégalité de convexité généralisée :
$$f(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln(x_i)) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\ln(x_i))$$

ie $\Leftrightarrow$ $f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\ln(x_i))$.

D'où l'inégalité.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} + (\prod_{i=1}^n b_i)^{1/n}$$

$$= (\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} \underline{(1 + (\prod_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i})^{1/n})} \underset{*1}{\leq} (\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} \prod_{i=1}^n (1+\frac{b_i}{a_i})^{1/n}$$

d'après Q2. *1 (Les a_i sont strictements positifs $(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} > 0$.

Ainsi,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \left(\prod_{i=1}^{n} \left(1+\frac{b_i}{a_i}\right)\right)^{1/n}$$

$$\leq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i+b_i}{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right)^{1/n}$$

$$\leq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i+b_i\right)^{1/n}.$$

D'où l'inégalité.

~ FIN ~

Colle : Darien

EXERCICE 7. —

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x_1, \dots, x_n > 0$. Démontrer :*

$$\min_{1\le i\le n} x_i \le \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \le \frac{x_1+\dots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}} \le \max_{1\le i\le n} x_i.$$

2. *Soient $a_1, \dots, a_n > 0$ tels que $a_1 \dots a_n = 1$. Démontrer que*

$$\prod_{i=1}^{n} (2+a_i) \ge 3^n$$

et établir le cas d'égalité.

1.

Soit $n \in \mathbb{N}$

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \quad (3)$$

$$\frac{1}{x_1}, \dots \frac{1}{x_n} > 0$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \times \dots \times \frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n}$$

Par passage à l'inverse :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}} \le \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \dots x_n}}}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \quad (2)$$

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y\in(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

On définit $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x,y\rangle|\leq\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$

On prend $x=(x_1,\dots,x_n)$ avec $x_1,\dots,x_n>0$
$y=(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\times\frac{1}{n}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}}$$

alors $\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}x_i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\times\sqrt{\frac{1}{n}}$

donc $\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\leq\sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}}$ (4)

Soit $x_{i_0}=\max_{1\leq i\leq n}x_i$, alors $0<x_i\leq x_{i_0}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

alors $x_i^2\leq x_{i_0}^2$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

alors $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leq nx_{i_0}^2$

donc $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}\leq x_{i_0}^2$

$\Rightarrow\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}\leq x_{i_0}$ car $x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_{\geq0}$ et $x_{i_0}>0$

Ainsi $\sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}}\leq\max_{1\leq i\leq n}x_i$ (5)

Dorian

Soit $x_{i_1} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$ alors $0 < x_{i_1} \leq x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

donc $\frac{1}{x_{i_1}} \geq \frac{1}{x_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$\Rightarrow \frac{n}{x_{i_1}} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$

$\Rightarrow \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \geq x_{i_1}$

$\Rightarrow \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ (1)

D'après (1), (2), (3), (4), (5) on a :

$$\min_{1 \leq i \leq n} x_i \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i$$

2) Soient $a_1, \dots, a_n > 0$ tels que $a_1 \cdots a_n = 1$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on applique l'inégalité arithmético-géométrique à $1, 1, a_i$:

$\sqrt[3]{1 \times 1 \times a_i} \leq \frac{1+1+a_i}{3}$

$\Rightarrow a_i^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2+a_i}{3}$

$\Rightarrow 0 < 3(a_i)^{\frac{1}{3}} \leq 2 + a_i$

$\Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{n} \left(3(a_i)^{\frac{1}{3}}\right) \leq \prod\limits_{i=1}^{n} (2 + a_i)$

$\Rightarrow 3^n \times \left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{3}} \leq \prod\limits_{i=1}^{n} (2 + a_i)$

Or $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ donc $3^n \leq \prod_{i=1}^{n} (2+a_i)$

Il y a égalité si et seulement si $\frac{2+a_i}{3} = a_i^{1/3}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$\frac{2+a_i}{3} = a_i^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2 + a_i = 3a_i^{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow (2+a_i)^3 = 27a_i$

$\Leftrightarrow a_i^3 + 12a_i + 6a_i^2 + 8 = 27a_i$

$\Leftrightarrow a_i^3 - 15a_i + 6a_i^2 + 8 = 0$

On pose $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 + 6x^2 - 15x + 8 \end{array} \right.$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$

$3x^2 + 12x - 15 = 0$

$\Delta = 324$, $x_1 = -5$, $x_2 = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	$\searrow$	0	$\nearrow$	

L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^+$: $x = 1$

Ainsi il y a égalité lorsque $a_i = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

Malaurie

Exercice de colle semaine 13

Soient f et g deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier la véracité des propositions suivantes :

① La fonction $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $M(x) = \max(f(x), g(x))$ est convexe.

② La fonction $m : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $m(x) = \min(f(x), g(x))$ est convexe.

① La proposition est vraie.

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0,1]$.

On a par convexité de f et g :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq \lambda M(x) + (1-\lambda) M(y)$$

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \leq \lambda M(x) + (1-\lambda) M(y)$$

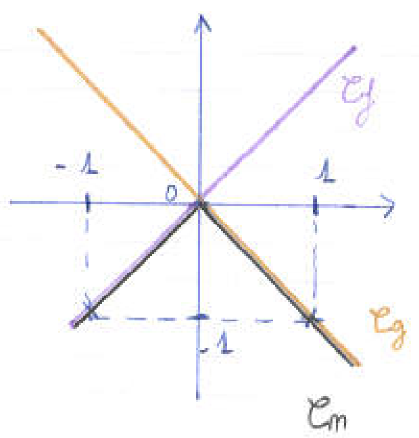
Ainsi, $M(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda M(x) + (1-\lambda) M(y)$

Finalement, M est convexe.

② La proposition est fausse.

On a comme contre exemple :

Pour $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$ $\quad g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x \end{array} \right.$



Pour $(x,y) = (-1, 1)$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ on a :

$$m(\lambda x + (1-\lambda)y) = m(0) = \min(0,0) = 0$$

$$m(x) = m(-1) = \min(-1, 1) = -1$$

$$m(y) = m(1) = \min(1, -1) = -1$$

Ainsi, on a :

$$0 = m\left(\tfrac{1}{2} \times (-1) + \tfrac{1}{2} \times 1\right) > \tfrac{1}{2} m(-1) + \tfrac{1}{2} m(1) = -1$$

Finalement, m n'est pas convexe.

Clara

1. Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si la fonction $\ln \circ f$ est convexe sur I, alors f est convexe sur I.
Étudier la réciproque.

2. Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}_+^*$, deux fois dérivable sur I.
Montrer que la fonction $\ln \circ f$ est convexe si et seulement si quel que soit le réel a, la fonction : $x \longmapsto e^{ax} f(x)$ est convexe sur I.

① * On pose $g = \ln \circ f$ $\quad f : I \mapsto \mathbb{R}_+^*$

On suppose que g est convexe sur I. Montrons que f est convexe sur I.

$\forall x, y \in I$, $\forall \lambda \in [0;1]$

Montrons que $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

$\overset{\exp \nearrow}{\Leftrightarrow}_{\ln \nearrow}$ $\ln(f(\lambda x + (1-\lambda) y)) \leq \ln(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$

or $\ln$ est concave sur I, donc $\ln(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \underset{①}{\geq} \lambda \ln(f(x)) + (1-\lambda) \ln(f(y))$
$= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$

or g convexe sur I ie $g(\lambda x + (1-\lambda) y) \underset{②}{\leq} \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$

de ① et ② on déduit $g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \ln(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$

or $\exp \nearrow$, d'où $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
et finalement f est convexe

* On pose $\forall x \in I$ $f(x) = x^2 + 1$, on a bien $f : I \mapsto \mathbb{R}_+^*$
La fonction f est deux fois dérivable, $f''(x) = 2 \geq 0$.
f est convexe.
On étudie $g(x) = \ln \circ f(x) = \ln(x^2+1)$
g est deux fois dérivable, $\forall x \in I$, $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

et $g''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)}$

donc $g''(x) < 0$ $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, pour cet intervalle g est donc concave et non convexe.
(pour $x \in [-1; 1]$, g est convexe)

On en déduit que la réciproque est fausse.

② Montrons que $g = \ln \circ f$ est convexe sur $I \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{ax} f(x)$ est convexe sur I

g est deux fois dérivables (car composée de fonctions 2 fois dérivables)

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose g convexe sur I i.e. $\forall x \in I,$ $g''(x) \geq 0$.

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f^2(x)} \geq 0 \quad *$$

Montrons que h est convexe sur I. h est deux fois dérivables

$\forall x \in I$ $h'(x) = ae^{ax}f(x) + e^{ax}f'(x)$

$$h''(x) = a^2e^{ax}f(x) + ae^{ax}f'(x) + ae^{ax}f'(x) + e^{ax}f''(x)$$
$$= \left(a^2 f(x) + a\, 2f'(x) + f''(x)\right) \underbrace{e^{ax}}_{\geq 0}$$

On étudie le polynôme $a^2 f(x) + a2f'(x) + f''(x)$

$$\Delta = 4f'(x)^2 - 4f''(x)f(x)$$
$$= -4\underbrace{\left(f''(x)f(x) - f'(x)^2\right)}_{\geq 0 \text{ d'après } *} \leq 0.$$

donc le polynôme n'admet pas de racine réelle et est du signe de son coefficient dominant, qui est $f(x)$ or $f : I \mapsto \mathbb{R}_+^*$

donc $\underset{\forall x \in I}{f(x)} > 0$

et donc $\underset{\forall x \in I}{h''(x)} \geq 0$ $\Rightarrow$ donc h est convexe sur I

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que h est convexe sur I i.e. $\forall x \in I\, h''(x) \geq 0$.

or $h''(x) = (a^2 f(x) + a2f'(x) + f''(x))\, e^{ax} \geq 0$

h'' est de signe constant sur I

h'' ne doit pas avoir de racine et donc $\Delta \leq 0$

d'où $-4\left(f''(x)f(x) - f'(x)^2\right) \leq 0$

et finalement $\underset{\forall x \in I}{f''(x)f(x) - f'(x)^2} \geq 0$

$\forall x \in I$ or $g''(x) = \dfrac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f^2(x)}$ donc $\underset{\forall x \in I}{g''(x)} \geq 0$

et g convexe

Benjamin

Colle semaine 15

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est log-convexe si la fonction $\ln\circ f$ est convexe. Montrer qu'une fonction log-convexe est convexe.

Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ log-convexe.
Soient $x < y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. f étant log-convexe :
$$\ln(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda \ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y)) \quad (1)$$

Or $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est concave car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée seconde négative, donc :
$$\ln(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \geq \lambda \ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y)) \quad (2)$$

Ainsi, avec (1) et (2) on obtiens :
$$\ln(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \ln(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$$
exp croissante sur $\mathbb{R}$
$$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Donc f est bien convexe.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que :
f convexe $\Leftrightarrow \left\{ \forall [a,b] \subset I, \forall \mu \in \mathbb{R}\ \varphi_{a,b,\mu} \left| \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + \mu x \end{array} \right.\right.$ est bornée sur $[a,b]$ et atteint sa borne sup en a ou en b.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f convexe.
Soient $[a,b] \subset I$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a :
$$\forall x < y \in [a,b],\ \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
$$\Rightarrow \forall x < y \in [a,b],\ \lambda \in [0,1],\ \varphi_{a,b,\mu}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \mu(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

D'où :

$\forall x < y \in [a,b], \forall \lambda \in [0,1], \quad \varphi_{ab\mu}(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \varphi_{ab\mu}(x) + (1-\lambda)\varphi_{ab\mu}(y)$

Donc φ est convexe.

Ainsi :

$\forall z \in \lambda a + (1-\lambda) b \in [a,b], \ \varphi_{ab\mu}(z) \leq \lambda \varphi_{ab\mu}(a) + (1-\lambda) \varphi_{ab\mu}(b)$

En notant $\alpha = \max(\varphi_{ab\mu}(a), \varphi_{ab\mu}(b))$,

$\forall z \in [a,b], \ \varphi_{ab\mu}(z) \leq \lambda \alpha + (1-\lambda)\alpha \leq \alpha$

Donc $\varphi_{ab\mu}$ est majorée par α et atteint ce maximum en a ou b.

De plus $\varphi_{ab\mu}$ est bornée. En effet, elle est aussi minorée : soit $c \in]a,b[$, par l'inégalité des pentes :

- $\forall x \in [a,c]$,

$\dfrac{\varphi_{ab\mu}(c) - \varphi_{ab\mu}(x)}{c-x} \leq \dfrac{\varphi_{ab\mu}(b) - \varphi_{ab\mu}(c)}{b-x} \Rightarrow \varphi_{ab\mu}(x) \geq \underbrace{\dfrac{c-x}{b-x}\left(\varphi_{ab\mu}(c) - \varphi_{ab\mu}(b)\right) + \varphi_{ab\mu}(c)}_{\hookrightarrow \text{ minorée car affine}}$

- $\forall x \in [c,b]$,

$\dfrac{\varphi_{ab\mu}(c) - \varphi_{ab\mu}(a)}{c-a} \leq \dfrac{\varphi_{ab\mu}(x) - \varphi_{ab\mu}(c)}{x-c} \Rightarrow \varphi_{ab\mu}(x) \geq \underbrace{\varphi_{ab\mu}(c) + \dfrac{x-c}{c-a}\left(\varphi_{ab\mu}(c) - \varphi_{ab\mu}(a)\right)}_{\hookrightarrow \text{ minorée car affine}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que :

$\forall [a,b] \subset I, \mu \in \mathbb{R}$ $\varphi_{ab\mu}$ est bornée et atteint son sup en a ou b.

Soient $a < b \in I$, soit $x \in [a,b]$.

On a $x = \lambda a + (1-\lambda) b$ avec $\lambda = \dfrac{x-b}{a-b}$ (et $1-\lambda = \dfrac{a-x}{a-b}$)

Avec $\mu = \dfrac{f(a) - f(b)}{b-a} \in \mathbb{R}$ on remarque :

$\varphi_{ab\mu}(a) = \dfrac{bf(a) - af(b)}{b-a} = \varphi_{ab\mu}(b)$

Donc le sup de $\varphi_{ab\mu}$ est atteint en a et en b :

$\varphi(x) \leq \varphi(a) \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \mu(a-x)$

$\Rightarrow f(x) \leq f(a) - (1-\lambda)(f(a) - f(b))$

$\Rightarrow f(x) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

Et ainsi f est convexe.

Sirine

Hölder

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$$

2) En déduire que pour tout $x > 1$:

$$\sqrt{x^{2n} - 1} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}$$

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$.

On note : $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ qui est deux fois

dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0.$$

Ainsi, f est concave.

D'après l'inégalité de concavité appliquée à f :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} a_k \right) \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$$

$$\overset{\times\sqrt{n} > 0}{\Rightarrow} \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$$

2) Soit $x > 1$.

On a :

$$x^{2n} - 1 = (x^2)^n - 1^n = (x^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}$$

D'où : $\sqrt{x^{2n} - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}}$

question 1
et $\sqrt{x^2-1} \geq 0$ $\Rightarrow$ $\geq \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x^{2k}}$

Or $\sqrt{x^{2k}} = x^k$ $(x > 0)$.

De plus, on a : $x^n - 1 = (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\sqrt{x^{2n} - 1} \geq \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^{2n} - 1} \geq \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Or $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x - 1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Finalement,

$$\forall x > 1 : \sqrt{x^{2n} - 1} \geq \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}$$

Marine

Exercice :

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x - \cos(x)}$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f une fonction dérivable : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, concave sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0) \geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall (x\,;y) \in ([0\,;+\infty[)^2,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = (2 + \sin(x)) e^{2x - \cos(x)}$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f''(x) = \cos(x) e^{2x-\cos(x)} + (2+\sin(x))(2+\sin(x)) e^{2x-\cos(x)}$

$= \underbrace{e^{2x-\cos(x)}}_{>0} (\cos(x) + (2+\sin(x))^2)$

Or $2+\sin(x) \geq 1$ d'où $\cos(x) + (2+\sin(x))^2 \geq 0$

finalement $\underline{f''(x) \geq 0}$. donc $\underline{f \text{ est convexe}}$.

2) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ concave sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) \geq 0$.

Montrons que $\forall (x,y) \in ([0,+\infty[)^2$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

$\Leftrightarrow f(x+y) - f(x) - f(y) \leq 0$

On pose $\varphi(x) = f(x+y) - f(x) - f(y)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, φ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\varphi'(x) = f'(x+y) - f'(x)$

Or f est concave donc f' est décroissante. et $x+y \geq x$ car $x,y \in [0,+\infty[$

D'où $f'(x+y) \leq f'(x)$.

$\Rightarrow f'(x+y) - f'(x) \leq 0$.

$\Rightarrow \varphi'(x) \leq 0$.

Finalement φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

et $\varphi(0) = f(y) - f(0) - f(y) = -f(0)$ or $f(0) \geq 0$.

$\Rightarrow -f(0) \leq 0$

$\Rightarrow \varphi(0) \leq 0$.

On a $\varphi(0) \leq 0$ et φ décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\varphi(x) \leq 0$.

$\Rightarrow f(x+y) - f(x) - f(y) \leq 0$

$\Rightarrow \underline{f(x+y) \leq f(x) + f(y)}$.

Exercice

Soit f convexe sur I et $x < y < z$ dans I, montrer que :

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{pmatrix}\right) \geq 0$$

f étant convexe, on a pour tout $x < y < z$ dans I et $\lambda \in]0,1[$:

$$y = \lambda x + (1-\lambda) z$$

Soit $f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$

avec $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$ et $(1-\lambda) = \frac{y-x}{z-x}$

De plus $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y-x & f(y)-f(x) \\ 0 & z-x & f(z)-f(x) \end{vmatrix}$

D'où $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{pmatrix}\right) = (y-x)(f(z)-f(x)) - (f(y)-f(x))(z-x)$

en développant suivant la première colonne,

Or, $f(y) \leq \left(1 + \frac{x-y}{z-x}\right) f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$

$$f(y) - f(x) \leq \frac{x-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$$

D'où $f(y)-f(x)(z-x) \leq (y-x)\,(f(z)-f(x))$

finalement, $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{pmatrix}\right) \geq 0$.

Bilal

EXERCICE 10. — *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et*

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \qquad h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1. *Justifier l'existence de M.*
2. *Montrer que g est convexe et que h est concave.*
3. *En déduire que, pour tout $x \in [a,b]$, on a*

$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1) f est de classe $\mathcal{C}^2$, donc f'' est continue sur $[a,b]$. Ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes appliqué à f'' sur $[a,b]$, M existe et est atteint.

2) • Montrons que g est concave

g est de classe $\mathcal{C}^2$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$.

$\forall x \in [a,b],\ g'(x) = f'(x) - \frac{M}{2}\left(b - x - x + a\right)$

$= f'(x) + Mx - M \cdot \frac{b+a}{2}$

$\forall x \in [a,b],\ g''(x) = f''(x) + M$

Or, pour tout $x \in [a,b]$, $|f''(x)| \leq M$.

On en déduit : $\forall x \in [a,b],\ f''(x) + M \geq 0$.

On en conclut que g est convexe.

• De même, h est concave.

3) Montrons : $\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq M \cdot \frac{(x-a)(b-x)}{2}$ $(\circledast)$

$(\circledast)$ se réécrit : $\forall x \in [a,b],\ -M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \leq f(x) \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [a,b],\ g(x) \leq 0 \leq h(x).$ $(\circledcirc)$

- Montrons que : $\forall x \in [a,b]$, $h(x) \geqslant 0$.

Soit $x \in [a,b]$, il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $x = \lambda a + (1-\lambda) b$.

Comme h est concave, on en déduit :

$$h(\lambda a + (1-\lambda) b) \geqslant \lambda . h(a) + (1-\lambda) h(b)$$

$\Rightarrow$ $h(x) \geqslant 0$ car $h(a) = h(b) = 0$ par hypothèse.

et ceci pour tout $x \in [a,b]$

- De même, en traduisant la convexité de g, on obtient :

$$\forall x \in [a,b], \ g(x) \leqslant 0.$$

On en conclut que (Q) est vraie.

Finalement, pour tout $x \in [a,b]$, nous avons montré :

$$\boxed{|f(x)| \leqslant M . \frac{(x-a)(b-x)}{2}}$$

Margaux

EXERCICE 7. —

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x_1, \dots, x_n > 0$. Démontrer :*

$$\min_{1\le i\le n} x_i \overset{①}{\le} \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}} \overset{②}{\le} \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \overset{③}{\le} \frac{x_1+\dots+x_n}{n} \overset{④}{\le} \sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}} \overset{⑤}{\le} \max_{1\le i\le n} x_i.$$

2. *Soient $a_1, \dots, a_n > 0$ tels que $a_1 \dots a_n = 1$. Démontrer que*

$$\prod_{i=1}^{n}(2+a_i) \ge 3^n$$

et établir le cas d'égalité.

1) ① On pose $x_{i_1} = \min\limits_{1\le i\le n} x_i$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$0 < x_{i_1} \le x_k$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{x_{i_1}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{i_1}} = \frac{n}{x_{i_1}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{x_{i_1}}{n} \le \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

et donc,

$$x_{i_1} \le \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

③ ln est concave car 2 fois dérivable et $\forall x > 0$,

$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

D'après l'inégalité de concavité généralisée :

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \ge \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) = \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}\right)$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \ge \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$$

② En appliquant ③ à $\frac{1}{x_1} > 0, \dots, \frac{1}{x_n} > 0$, on a :

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}_{>0} \ge \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{1/n}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \ge \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{1/n} \times \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

$$\Rightarrow \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

④ On définit $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (1, \dots, 1)$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \times \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ donc } \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

⑤ On pose $x_{i_2} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$0 < x_k \leq x_{i_2}$$

$$\Rightarrow 0 < x_k^2 \leq x_{i_2}^2$$

$$\Rightarrow 0 < \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_{i_2}^2 = n x_{i_2}^2$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n}\, x_{i_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}}{\sqrt{n}} \leq x_{i_2}$$

2) On utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur $1, 1$ et $a_i > 0$ n fois pour tous les $i \in [\![1, n]\!]$

$$(1 \times 1 \times a_1)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(1 + 1 + a_1)$$

...

$$(1 \times 1 \times a_n)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(1 + 1 + a_n)$$

En multipliant entre elles les n inégalités :

$$\underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/3}}_{=1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (2 + a_i) \Rightarrow \boxed{3^n \leq \prod_{i=1}^{n} (2 + a_i)}$$

On a égalité si $\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = 1$

Pierre Colle n°13

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p = (p_1, \ldots, p_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs de somme 1, on définit

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i.$$

1. Montrer que $0 \leqslant H(p) \leqslant \ln n$ pour tout n-uplet p de réels strictement positifs de somme 1.
2. Soient p et q deux n-uplets de réels strictement positifs de somme 1. Établir l'inégalité :

$$H(p) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i.$$

1) La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_{>0}$. En effet, ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et $\forall x > 0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Montrons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p_i \in [0,1]$

Supposons par l'absurde qu'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$, tel que $p_{i_0} > 1$.

alors $\sum_{i=1}^{n} p_i = \overbrace{p_{i_0}}^{>1} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \underbrace{p_i}_{>0}}_{>0} > 1$ contradiction avec $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

finalement, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p_i \in [0,1]$.

ainsi, d'après l'inégalité de concavité généralisée avec

- $\left(\frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n}\right) \in \mathbb{R}_{>0}^n$
- $(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$, tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

on a : $\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i^{-1}) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{p_i \cdot p_i^{-1}}_{=1}\right)$

$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \leq \ln(n)$ ②

d'où $H(p) \leq \ln(n)$

De plus, $H(p) = -\sum_{i=1}^{n} \underbrace{p_i}_{\geq 0} \underbrace{\ln(\overset{\in[0,1]}{p_i})}_{\leq 0} \geq 0$ ①

ainsi, par ① et ②, on obtient $0 \leq H(p) \leq \ln(n)$

2) D'après l'inégalité de concavité généralisée, avec :

- $(p_1, \dots, p_n) \in [0,1]^n$

- $\left(\frac{q_1}{p_1}, \dots, \frac{q_n}{p_n}\right) \in \mathbb{R}_{>0}^n$

on a :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{q_i}{p_i}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\ln(q_i) - \ln(p_i)\right) \leq \ln(1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \leq 0$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \geq H(p)$$

Paul

Colle numéro 13

Exercice 7. Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur l'intervalle $[a\,;b]$.

1. Montrer que

$$(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

2. Interpréter géométriquement ce résultat lorsque f est positive.

Soit $x \in [a,b]$ et $\lambda \in [0,1]$ tel que $\lambda = \frac{1}{2}$
On sait par convexité de f et en posant, $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ que :

$$f(x) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

En intégrant l'inégalité entre a et b et par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b \frac{f(a)+f(b)}{2}dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

De plus, comme f est C^1 sur $[a,b]$ et que f est convexe en considérant le point $\frac{a+b}{2} \in [a,b]$ et $x \in [a,b]$, on a :

$$f(x) \geq f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x - \frac{a+b}{2}\Big) + f\Big(\frac{a+b}{2}\Big).$$

En intégrant encore l'inégalité entre a et b, on a :

$$\int_a^b f(t)dt \geq f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(\int_a^b t\,dt - \int_a^b \frac{a+b}{2}dt\Big) + (a-b)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

or, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\int_a^b t\,dt - \int_a^b \frac{a+b}{2}\,dt\right)$

$= f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right)$

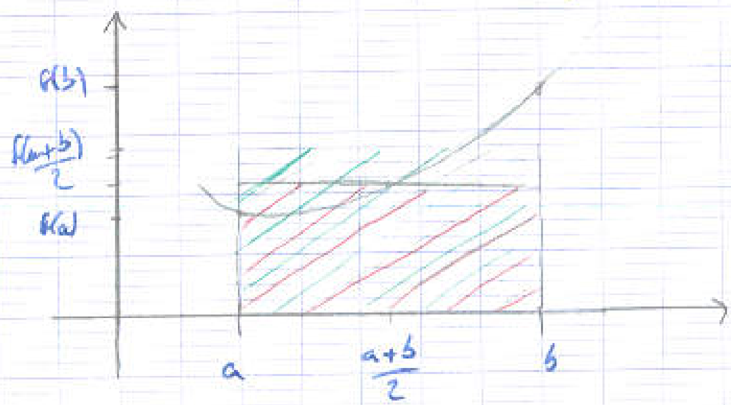
$= 0$

Donc finalement,

$$\int_a^b f(t)\,dt \geq (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

D'où l'inégalité.

2) Interprétation géométrique



On voit graphiquement que l'air rouge est inférieur à l'aire verte et l'aire sous la courbe de f.

Laetitia

> 1) L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
> 2) L'ensemble des matrices stochastiques (dont les coefficients sont compris entre 0 et 1, et la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1) est-il un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
> 3) L'ensemble des matrices diagonalisables est-il un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1) Non. En effet, soit $n=2$.

$I_2 \in GL_2(\mathbb{R})$, $-I_2 \in GL_2(\mathbb{R})$

Or pour $\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1]$ $\lambda I_2 + (1-\lambda)(-I_2) = \frac{1}{2} I_2 - \frac{1}{2} I_2$
$= 0 \notin GL_2(\mathbb{R})$

2) Oui. En effet

On note S l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in S$

Soit $\lambda \in [0,1]$.

On pose $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = \lambda A + (1-\lambda)B$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : m_{i,j} = \lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j}$

$0 \leq a_{i,j} \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq b_{i,j} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \lambda a_{i,j} \leq \lambda$, car $\lambda \geq 0$ $\qquad$ $0 \leq (1-\lambda) b_{i,j} \leq 1-\lambda$ car $1-\lambda \geq 0$

D'où $0 \leq m_{i,j} \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$

$= \lambda + 1 - \lambda$

$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$

D'où $M \in S$ et l'ensemble des matrices stochastiques est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Non. En effet

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $Spec(A) = \{2,3\}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$

χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

B est diagonale donc diagonalisable.

Soit $\lambda = \frac{3}{4} \in [0;1]$, $(1-\lambda) = \frac{1}{4}$

$$M = \lambda A + (1-\lambda)B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+1 & 1 \\ 0 & \frac{9}{4}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$Spec(M) = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

Si M était diagonalisable, elle serait semblable à I_2. Or elle ne l'est pas. Donc M n'est pas diagonalisable et l'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas convexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

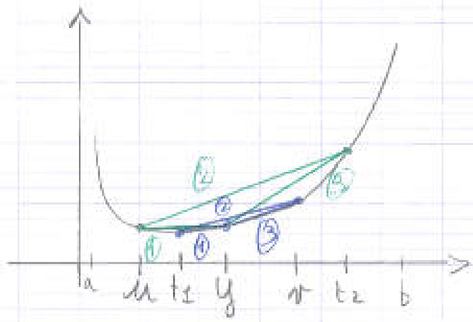
Pauline.

Énoncé : Soit f une fonction convexe sur un intervalle borné $]a\,;b[$.

1) Montrer que f est minorée.

2) f est-elle nécessairement majorée ?

1) Soit $a < u < y < v < b$:



• $\forall\ t_1 \in \,]a, y]$:

D'après l'inégalité des trois pentes, on a ② ≤ ③

$$\frac{f(v)-f(t_1)}{v-t_1} \leq \frac{f(v)-f(y)}{v-y}$$

$$\Leftrightarrow -f(t_1) \leq \frac{f(v)-f(y)}{v-y}(v-t_1) - f(v)$$

$$\Leftrightarrow f(t_1) \geq \frac{f(v)-f(y)}{v-y}\,t_1 - \frac{f(v)-f(y)}{v-y}\,v + f(v)$$

$$\geq f(v) - \frac{f(v)-f(y)}{v-y}\,v$$

Ainsi, f est minorée sur $]a\,;y]$

• $\forall\ t_2 \in [y\,;b[$:

D'après l'inégalité des trois pentes, on a : ① ≤ ③

$$\frac{f(y)-f(u)}{y-u} \leq \frac{f(t_2)-f(y)}{t_2-y}$$

$$\Leftrightarrow f(t_2) \geq \frac{f(y)-f(u)}{y-u} t_2 - \frac{f(y)-f(u)}{y-u} y + f(y)$$

$$\geq f(y) - \frac{f(y)-f(u)}{y-u} y$$

Ainsi, f est minorée sur $[y; b[$.
Donc, f est bien minorée sur $]a, b[$.

2) Pas nécessairement. Par exemple, sur $]0; b[, b \in \mathbb{R}_+, f : x \in]0, b[\mapsto \frac{1}{x} + 1$, qui est convexe (car $\forall x \in]0; b[, f''(x) = \frac{2}{x^3} \geq 0$) n'est pas majorée sur $]0; b[$.

Mathilde
REBHANN
MP

Soient f et g deux fonctions convexes, sur I et g croissante sur I. Montrer que la fonction $g \circ f$ est aussi convexe.

Si f est convexe alors on a :
Soit $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$.
$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
En composant par g croissante, on obtient :
$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$

Or comme g est convexe sur I, on récupère :
$g(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \leq \lambda g \circ f(x) + (1-\lambda) g \circ f(y)$

On en déduit alors l'inégalité suivante :
$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda g \circ f(x) + (1-\lambda) g \circ f(y)$

On reconnait l'inégalité caractéristique des fonctions convexes, donc la fonction $g \circ f$ est convexe.

Yann

Exercice de khôlle :

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Supposons f dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Dans le cas où f est majorée :

Par l'absurde, supposons que f n'est pas constante.

$\exists c \in \mathbb{R}, f'(c) \neq 0$

Or f est convexe donc $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de toutes ses tangentes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f'(c)(x-c) + f(c)$$

f est croissante, donc $f'(c) > 0$, donc lorsque $x \to +\infty$,

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Or par théorème d'encadrement, cela pose une contradiction (f majorée).

Donc lorsque f est majorée, convexe et croissante, f est constante.

- Supposons maintenant f non majorée,

On a alors, de la même façon,

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Par conséquent, si f est convexe et croissante, elle est soit constantes, soit divergente vers $+\infty$.

Exercice 4
Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. On définit la moyenne arithmétique a_n, la moyenne géométrique g_n et la moyenne harmonique h_n par :

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ ,\ g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\ ,\ h_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \leq g_n \leq a_n$.

(F)

Frederic

Ex Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$

Soit $\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$

or $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$ donc d'après le théorème de concavité généralisé :

$$\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

par croissance de l'exponentiel :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$g_n \leq a_n$$

Cour $\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$

or $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$ donc d'après le théorème de convexité généralisé :

on a $-\ln(x)$ est convexe car $-\ln''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ alors :

$$\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\right) \leq -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{x_i}\right)$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

par croissance de l'exponentiel :

$$h_n \leqslant e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$$

$$h_n \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} e^{\ln(x_i)}}$$

$$h_n \leqslant g_n$$

alors on a bien : $h_n \leqslant g_n \leqslant a_n$

Martin

Montrer l'innégalité suivante :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ainsi sin est concave, or x est une de ses tangentes d'où l'inegalité $\sin(x) \leq x$

$-\sin$ est convexe comme opposé d'une fonction concave

Comme $-\frac{2}{\pi} \times 0 = -\sin(0)$ et $-\frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Or $f : \left| \begin{array}{l} [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{2}{\pi} x \end{array} \right.$ est linéaire

On peut considerer que $-\frac{2}{\pi} x$ est une corde de $-\sin$

$-\sin$ étant convexe, on a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $-\frac{2}{\pi} x \geqslant -\sin x$

On en déduit $\underset{\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]}{,}$ $\frac{2}{\pi} x < \sin x$

Corentin Khôlles n°15 Pour le 11/01/2011

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$$

On sait que :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right. \quad \text{est concave sur } \mathbb{R}^+$$

On applique l'inégalité de convexité généralisée à f :

$$a_1, \dots, a_n \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$$
$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n} \geq 0.$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \underset{f \text{ concave}}{\geq} \sum \lambda_k f(a_k)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{a_k}$$

$$\underset{\times\sqrt{n}}{\Leftrightarrow} \boxed{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{a_k}}$$

Anne

1. Énoncer et démontrer l'inégalité arithmético-géométrique.

2. Démontrer l'inégalité suivante : $\sqrt[n]{n!} \le \frac{n+1}{2}$

1. Inégalité arithmético-géométrique : $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Démonstration :

Soient $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$.

ln est concave car deux fois dérivable. $\forall x > 0,\ \ln''(x) = \frac{-1}{x^2} \le 0$.

D'après l'inégalité de concavité de ln, on a :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i)}_{\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}\right)}$$

En passant à l'exponentielle et grâce à sa croissance, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$$

2. Montrons : $\sqrt[n]{n!} \le \frac{n+1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} n! = 1 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^{n} k \\ \sqrt[n]{n!} = (n!)^{1/n} \end{array}\right\} \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{1/n}$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a : $\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k$

Or $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $\frac{1}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$

Finalement, on a bien $\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{1/n} = \sqrt[n]{n!} \le \frac{n+1}{2}$

Valentin

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement croissante. Etudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$

On a $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe i.e.

$\forall (x,y) \in I^2, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ (*)

Soit $(y_1, y_2) \in f(I)^2$ alors $\exists (x_1, x_2) \in I^2$ tels que.

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{cases}$$

On a alors $f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$

$= f^{-1}(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$

Or (*) est vraie pour tout x, y de I, donc en particulier pour x_1, x_2

On a $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$

De plus f étant strictement croissante on a :

$$f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda) f^{-1}(y_2)$$

f^{-1} est donc également convexe.

Julien

Exercice de colle

Lundi n°15.

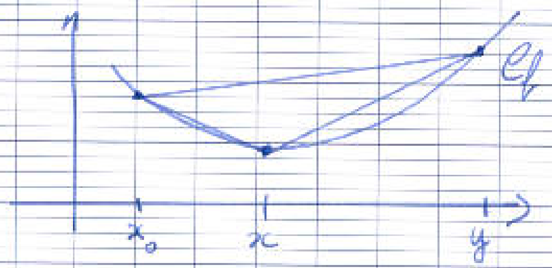
Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$ existe. Donner un exemple où $\ell \in \mathbb{R}$ et un autre où $\ell = +\infty$.
2. Supposons $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \ell x$ existe.

1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

On pose $\tau_{x_0} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right.$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{x_0\}$, $x \leq y$.



(exemple visuel)

On applique l'inégalité des trois pentes ; en particulier, il vient :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \iff \tau_{x_0}(x) \leq \tau_{x_0}(y).$$

Ainsi, τ_{x_0} est croissante, donc par théorème de la limite monotone fonctionnel, $\tau_{x_0} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell_{x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$.

On pose $x_0 = 0$, d'où :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(0)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Or $\tau_0(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{f(x)}{x}$, on en déduit que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe.

c) On suppose que $l \in \mathbb{R}$.

On pose $g : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - lx \end{vmatrix}$

$x \longmapsto -lx$ est C^2 de dérivée nulle, donc convexe ; d'où g convexe.

On montre comme dans Q1) que son taux d'accroissement est croissant, d'où :

$\tau_0 : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \end{vmatrix}$ est croissante ; donc admet une limite

Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$. $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - lx - f(0)}{x - 0}$

$= \frac{f(x)}{x} - l - \frac{f(0)}{x}$.

$$\frac{f(x)}{x} - l - \frac{f(0)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} l - l = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - lx$ existe.

Gillier Clausse MP

Semaine 15

1) Montrer que $\forall x \in]0,1[$, $1+x \leq e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}$

2) En déduire la limite de $\sum_{k=n}^{2n} sh\left(\frac{1}{k}\right)$ quand $n \to +\infty$

1) Montrons d'abord que $f : x \in]0,1[\longrightarrow e^{sh(x)}$ est convexe

$\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = ch(x)e^{sh(x)}$

$\forall x \in]0,1[$, $f''(x) = sh(x)ch(x)e^{sh(x)} + sh(x)e^{sh(x)} \geq 0$

Ainsi, f est convexe sur $]0,1[$. f est donc au dessus de ses tangentes. En particulier, la tangente en 0 donne $y = 1+x$:

$\forall x \in]0,1[$, $\underline{1+x \leq e^{sh(x)}}$

Reste à montrer que $\forall x \in]0,1[$, $e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}$

ie $e^{-sh(x)} \geq 1-x$

$g : x \longmapsto e^{-sh(x)}$ est convexe en effet $g''(x) \geq 0$.

ainsi g est au dessus de ses tangentes. En particulier, la tangente en 0 donne $y = -x+1$

d'où $\forall x \in]0,1[$ $1-x \leq e^{-sh(x)}$

ie $\underline{e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}}$

On obtient $\forall x \in]0,1[$:

$$1+x \leq e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

2) On applique ln ↗ à l'inégalité :

$$\ln(1+x) \leq sh(x) \leq \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

On pose $x = \frac{1}{k}$ $\forall x \in]0,1[$.

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

On somme pour k allant de n à $2n$

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n} sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k) \leq \sum_{k=n}^{2n} sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln(k) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{2n+1} \ln(k) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k) \leq \sum_{k=n}^{2n} sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln(k) - \sum_{k=n-1}^{2n-1} \ln(k)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n} sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right)$$

or quand $n \to +\infty$ $\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \longrightarrow \ln(2)$

et $\ln\left(\frac{2n}{n-1}\right) \longrightarrow \ln(2)$

Ainsi par théorème d'encadrement $\underline{\sum_{k=n}^{2n} sh\left(\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)}$

Mathias

Banque d'exercices

EXERCICE 9. —

1. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *pour tout* $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$:
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}.$$

2. *En déduire que pour tout* $x > 1$:
$$\sqrt{x^{2n}-1} \geq \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{x^n-1}{\sqrt{n}}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$

Posons $f \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$. f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} \leq 0$

Ainsi, f est concave. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{k} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

Par l'inégalité de concavité généralisée :
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} a_k\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$$
$$\underset{\sqrt{n}>0}{\Rightarrow} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$$

2. Soit $x > 1$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x^{2k} > 0$.

Par Q1, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x^{2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sqrt{x^{2k}}}_{x^k}$
$$\underset{\substack{x^2 \neq 1 \\ x \neq 1}}{\Rightarrow} \sqrt{\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$$
$$\underset{\sqrt{x^2-1}>0}{\Rightarrow} \sqrt{x^{2n}-1} \geq \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{n}}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$$
$$\underset{x \neq 1}{\Rightarrow} \sqrt{x^{2n}-1} \geq \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{x^n-1}{\sqrt{n}}\right)$$

David

Soit $\begin{cases} I \text{ un intervalle de } \mathbb{R} \text{ et} \\ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une fonction} \end{cases}$

Démontrer que si f est convexe alors : $\forall (x, y, z) \in I^3$,

$$x < y < z \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{pmatrix} \geq 0$$

Comme f est convexe sur I, alors d'après l'inégalité des 3 pentes :

$$x < y < z \Rightarrow \boxed{\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \underset{①}{\leq} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \underset{②}{\leq} \frac{f(z) - f(y)}{z - y}}$$

De plus, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y-x & f(y) - f(x) \\ 0 & z-x & f(z) - f(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (-1)^2 \cdot 1 \cdot [(y-x)(f(z) - f(x)) + (f(x) - f(y))(z-x)]$$

$$= \underbrace{(y-x)}_{>0}(f(z) - f(x)) + (f(x) - f(y))\underbrace{(z-x)}_{>0}$$

$$\Rightarrow \frac{\det(A)}{(z-x)(y-x)} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Or, d'après ①, $0 \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Ainsi, $\frac{\det(A)}{(z-x)(y-x)} \geq 0$

$$\Rightarrow \det(A) \geq 0$$

Rose — Colle S15 — L. 11/01/21

Soit $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Montrer que : $\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$

f' est encore dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = 2\left(\frac{2x}{x^3}\left(x+\frac{1}{x}\right) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2\right) \geqslant 0$

Et par la caractérisation des fonctions convexes dérivables, f est convexe.

L'inégalité de convexité généralisée donne :

$\forall (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Considérons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \frac{1}{n} \in [0;1]$

$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right)$

En particulier, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(a_i)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i + \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{=1} + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \right)^2 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow n\left(\frac{1}{n} + n\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow n\left(\frac{1}{n^2} + 2 + n^2\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} + 2n + n^3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(1 + 2n^2 + n^4\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$