Maëva — Exercice de Colle Semaine 16 — MP

Enoncé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

1) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n)
2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la fonction f_n sur $\mathbb{R}$
b) Étudier alors la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$
3) Montrer que la suite converge uniformément sur $]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$, $a>0$

1) Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $f_n(x) \xrightarrow[\mathbb{R}]{CS} f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array} \right.$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^2x \times nx}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{\overset{\geq 0}{n}\,(1-n^2x^2) \leq 0}{(1+n^2x^2) \geq 0}$$

Donc f_n' dépend du signe de $1-n^2x^2$.

Or, $1 - n^2x^2 \leq 0$

$\iff x^2 \geq \dfrac{1}{n^2}$

$\iff -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n}$

On en déduit :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

or, $\cdot\ f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cdot\ f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

$\cdot\ f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$\cdot\ f_n(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

b) D'après 2a) on a $f_n - f$ qui est bornée.

Ainsi, $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$ (d'après la q° 2a)

Donc f_n n'est pas CU sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

On remarque que $\mathbb{R}$ est centré en 0.

De plus, soit $x \in \mathbb{R}$: $f_n(-x) = \frac{n(-x)}{1+n^2(-x)^2} = -\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)$

$= -f_n(x)$

Donc f_n est impaire

On étudie donc la CU sur $[a, +\infty[$.

Soit $a > 0$, À partir d'un certain, on remarque que $a > \frac{1}{n}$

On a donc $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{atteint en } x = a}}{\leq} f_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi, f_n est CU sur $[a, +\infty[$ et par imparité de f_n on à même f_n CU sur $]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$

Pierre

Exercice 2. Etudier $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \ln(x)}{n+1}$ pour $x \in [0, 1]$.
Ecrire $\int_0^1 f(x)\, dx$ sous la forme d'une série numérique.

On pose $g_n \left| \begin{array}{l}]0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^n \ln(x)}{n+1} \end{array} \right.$.

g_n est dérivable comme constituée de fonctions usuelles et $\forall x \in]0;1]$,

$$g_n'(x) = \frac{1}{n+1}\left(n x^{n-1} \ln(x) + x^{n-1}\right)$$

On cherche le maximum de $|g_n(x)|$.
On résout :

$$|g_n'(x)| = 0$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{x^{n-1}}{n+1}\left(n\ln(x) + 1\right)\right| = 0$$

$x \neq 0$: $\Leftrightarrow$ $n \ln(x) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{n}}.$$

Ainsi, $\sup_{x \in]0;1]} |g_n(x)| = \left|\frac{\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)}{n+1}\right| = \frac{1}{e\, n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$

- Et donc, $f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n \ln(x)}{n+1}$ converge normalement quand $N \to +\infty$ par Riemann.

Ce qui implique la convergence uniforme sur tout segment.

• De plus, g_n est continue en 0, en effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{n+1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, par croissances comparées.

Et donc, $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n \ln(x)}{n+1}$ est continue comme somme de fonctions continues.

• Ainsi on peut appliquer le critère de primitivation et on a :

$\forall x \in]0;1]$,

$$\int_0^1 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)}_{f(x)} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 g_n(x)\, dx .$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{n+1}\, dx$$

• $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$, ainsi par intégration par parties on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) \right]_{x \to 0}^{1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n\, dx$$

$$= -\frac{1}{(n+1)^2} .$$

Finalement,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} .$$

Yann

Exercice de Khôlle :

Exercice 2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}} \end{array}\right.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n\sqrt{x}} \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc par théorème d'encadrement,

$$f_n(x) \xrightarrow[\mathbb{R}_+^*]{CS} f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array}\right.$$

Etudions la convergence uniforme de f_n :

$$\cdot\ f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}}}_{g(nx)} \rightarrow \left(\text{définie sur } \mathbb{R}_+ \text{ car } n \in \mathbb{N}\right)$$

Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

$\cdot\ g$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0; +\infty[$

- $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée.
- quand $x \to 0^+$, $\sin(x) \sim x$

- donc g bornée sur $\mathbb{R}_+$

D'où $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

- $$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}} g(x)\right| \quad (x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} |g(x)|$$
$$\leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \|g\|_{\infty, \mathbb{R}_+}}_{\text{indépendant de } x}$$

Par passage au sup,

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|g\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par théorème d'encadrement,

$$f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+^*]{CU} f \;\Big|\; \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$$

David

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etudier alors la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite converge uniformément sur $]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$, $a > 0$.

1/ Soit $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$t = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$t \neq 0$, $f_n(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2} \sim \dfrac{1}{nt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi, $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CS} f \;\Big|\; \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$

2.a/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n'(t) = \dfrac{n + n^3t^2 - 2n^3t^2}{(1+n^2t^2)^2}$

$f_n'(t) = \dfrac{n(1-n^2t^2)}{(1+n^2t^2)^2}$

On a $f_n'(\frac{1}{n}) = f_n'(-\frac{1}{n}) = 0$

D'où, le tableau de variations,

t	$-\infty$		$-\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

2.b/ Comme $f_n - f$ est bornée alors $\|f_n - \underbrace{f}_{0}\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

atteint en $t = \frac{1}{2}$

indép. de t

1/2

Donc $\|f_n - f\|_\infty$ ne converge pas vers 0.

Ainsi, (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3/ Quand $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

donc : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \; a > \frac{1}{n} > 0$

Ainsi : $\forall n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} = f_n(a)$$
$$= \frac{na}{1+n^2a^2} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Ainsi, (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

De plus, $\begin{cases} D_f =]-\infty, a] \cup [a, +\infty[\text{ centrée } 0 \\ \forall t \in D_f, f_n(-t) = -f_n(t) \end{cases}$

et donc par imparité de f_n,

(f_n) converge uniformément sur $]-\infty, a]$

Sirine Exercice : Suites et séries de fonctions

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on définit $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Étudier les convergences simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$.
2. Même question sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

1) * Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

$f_n(x) = n x^2 e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (par croissance comparées)

Par Riemann, on a : $\sum f_n(x)$ converge d'où $\sum f_n$ CS sur $\mathbb{R}_+$.

* On a : $\sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}^+ \iff \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CU} 0$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

On a : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_n) \geqslant f_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{e} > 0$

D'où : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \not\xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CU} 0$

Donc $\sum f_n$ non CU sur $\mathbb{R}_+$.

* Comme $\sum f_n$ CN $\Rightarrow \sum f_n$ CU, (par contraposée : $\sum f_n$ non CN sur $\mathbb{R}_+$)

2) Sur $[a,+\infty[$, $a > 0$.

* On a : $\sum f_n$ CS sur $[a,+\infty[$ (car $[a,+\infty[\subset [0,+\infty[$)

* Soit $x \in [a, +\infty[= I$.

f_n est dérivable sur I et $\forall x \in I$:

$$f_n'(x) = n\left(2x e^{-x\sqrt{n}} - \sqrt{n}\, x^2 e^{-x\sqrt{n}}\right)$$
$$= \underbrace{n x e^{-x\sqrt{n}}}_{\geq 0} \left(2 - \sqrt{n}\, x\right)$$

x	a		$\frac{2}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$	$f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$	$\searrow$	

Comme $\frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0 \quad a > \frac{2}{\sqrt{n}}$

Ainsi, on a : $\|f_n\|_\infty \leq f_n(a)$.

Comme Σf_n CS, ($\Sigma f_n(a)$ CV) et par théorème de domination : $\Sigma \|f_n\|_{\infty, [a,+\infty[}$ CV, ainsi

Σf_n CN sur $[a, +\infty[$

De plus, Σf_n CU sur $[a, +\infty[$

Eren

Exercice 2. On admet que pour tout $\alpha \in [0,1]$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \pi\frac{\mathrm{ch}(\pi\alpha)}{\mathrm{sh}(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$$

(égalité prolongée par continuité en $\alpha = 0$). En intégrant sur $[0,1]$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

On a pour tout $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$f_m \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \longmapsto \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+m^2} \end{array}\right.$$

Soit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $\alpha \in [0,1]$

$$\left\| \frac{2\alpha}{\alpha^2+m^2} \right\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{m^2} > 0$$

Or, comme $\sum \frac{1}{m^2}$ converge (Riemann)

le théorème de domination pour les SATP nous donne la convergence normale sur le segment $[0,1]$, l'égalité prolongée par continuité en $\alpha = 0$, nous donne la continuité et la convergence normale sur $[0,1]$, d'où :

$$\int_0^1 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+m^2}\,d\alpha = \sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{2\alpha\,d\alpha}{m^2+\alpha^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{m^2}\right)$$

et $$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+m^2} = \pi\frac{\mathrm{ch}(\pi\alpha)}{\mathrm{sh}(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+n^2}\,dx = [\ln(x^2+n^2)]_0^1$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2+x^2}\,dx = \left[\ln \frac{\operatorname{sh}\pi x}{x}\right]_0^1$

On rappelle $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}\,dx = \ln\left(\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\right)$$

et enfin $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$$= \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}$$

EXERCICE 5. — Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2 x(1-nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1]$.

Frederic

Ex 5. 1. on a $f(0) = 0$

or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\forall x \in]0,1]$ $\exists N \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq N$ on a $x \geq \frac{1}{n}$

on a alors $f_n(x) = 0$

donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ avec $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \{0\} \\ x \longmapsto 0 \end{array} \right.$

2) Soit $x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} f_n(x)\,dx + \int_{1/n}^1 f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/n} n^2 x (1 - nx)$$

$$= n^2 \int_0^{1/n} x - \int_0^{1/n} x^2$$

$$= \frac{1}{6}$$

Supposant f_n uniformement convergent, par l'absurde:
alors car f_n est continue on a alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\,dt$$

$$= 0$$

contradiction, car $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{6} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{6}$

donc f_n n'est pas uniforme

3) Soit $a \in]0, 1]$, on $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\forall a \in [a, 1]$ $\exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$

on a $a \geq \frac{1}{n}$ Soit $x \in [a, 1]$ on $x \geq a \geq \frac{1}{n}$ donc $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$

alors $|f_n(x) - f(x)| = 0$

donc $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

~~donc f_n converge uniformement sur $[a; 1]$~~

Martin

Exercice 2. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

1. Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) La série de terme général $\frac{1}{n+n^2x} = u_n$ est équivalente à la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ qui converge d'après Riemann
Ainsi d'après le theoreme de sommation des équivalents la serie de terme général u_n est convergente et ce pour tout $x > 0$

2) Montrons que S converge normalement sur tout segment
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < a \leq b < \infty$

Soit $x \in [a, b]$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \frac{1}{n+n^2x} \right\|_{\infty,[a,b]} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+an^2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Or la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de riemann
et d'après le theorème de sommation des équivalents
$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \frac{1}{n+n^2x} \right\|_{\infty,[a,b]}$ converge normalement sur tout segment.

et par conséquent converge uniformement
On en déduit que $S(x$ est continue.

Aissane

Exercice 1
On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = x(1+\sqrt{n}e^{-nx})$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une limite f qu'on déterminera.
2. En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de :

$$I_n = \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\,dx$$

1. Montrons d'abord la convergence simple.
Soit $x \in [0,1]$,

$f_n(x) = x(1+\sqrt{n}\,e^{-nx})$

1er cas $x=0$:
$f_n(x) = 0 \times (1+\sqrt{n}\,e^{0}) = 0$

2ième cas $x \in]0,1]$,
$f_n(x) = x(1+\sqrt{n}e^{-nx}) = x+\sqrt{n}e^{-nx} \times x$

Or par croissance comparée $x\sqrt{n}e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$

Ainsi,
$f_n \longrightarrow f \begin{vmatrix} [0,1] \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{vmatrix}$

f_n et f sont bornée ainsi $f_n - f$ est bornée,
Soit $x \in [0,1]$
$|f_n(x) - f(x)| = |x(1+\sqrt{n}e^{-nx}) - x| = |\sqrt{n}e^{-nx} \times x| = x\sqrt{n}e^{-nx}$

$|f_n(x) - f(x)| = x\sqrt{n}e^{-nx}$

Soit $g \begin{vmatrix} [0,1] \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sqrt{n}e^{-nx} \end{vmatrix}$ dérivable
$x \in [0,1]$
$g'(x) = \sqrt{n}e^{-nx} + x\sqrt{n}(-n)e^{-nx} = e^{-nx}\sqrt{n}(1-nx)$
$g'(\frac{1}{n}) = 0$

$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} e^{-1}$ } indépendant de x

Par passage au sup sur $[0,1]$

$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0,1]} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1}$ } $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'après le théorème d'encadrement,

$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Ainsi, $f_n \xrightarrow[[0,1]]{CU} f$

2. On a :

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$,

$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\,dx \right) = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Théorème d'intégration d'une suite de fonction convergent uniformément.

Rayon

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n \Big| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{n+n^2x}. \end{array}$

1) Démontrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_{>0}$.

2) Soit $a>0$, Démontrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$

En déduire que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$ fixé.

$f_n > 0$, $\dfrac{1}{n+n^2x} \leqslant \dfrac{1}{n^2x}$.

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par Riemann car $2>1$

D'après le théorème de domination pour les séries à termes positifs

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n+n^2x}$ converge. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement.

2) Soit $a>0$

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$, $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ et f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$.

$f'_n(x) = \dfrac{-n^2}{(n+n^2x)^2} \begin{array}{l} <0 \\ >0 \end{array}$

x	a	$+\infty$
f_n	$\frac{1}{n+n^2a}$ ↘	0

$\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si $\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n \|_{\infty [a,+\infty[} \to 0$

or $\| f_n \|_{\infty [a,\infty[} = \frac{1}{n+n^2a} > 0$.

$\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n \|_{\infty [a,\infty[} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_n \|_{\infty [a,\infty[}$.

$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2a}$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n+n^2a} \leqslant \frac{1}{n^2a}$

or la série $\sum \frac{1}{n^2a}$ converge par Riemann car $2>1$.

D'après le Théorème de domination des séries à termes positifs

$\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n \|_{\infty [a,\infty[} \to 0$ et donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,\infty[$

- $\forall a > 0$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a ; \infty[$. donc CUM sur $[a ; \infty[$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, Les $f_n \in \mathcal{C}^0([a, \infty[, \mathbb{R})$ aussi $\sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue comme somme de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de la limite uniforme* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $[a ; \infty[$ et ceci $\forall a > 0$, donc sur $]0 ; \infty[$

* sur tous segments pour les fonctions continues.

Paul

Kholle numéro

Exercice :

Pour $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $f_n(x) = n\sin(x)s\cos^n(x)$.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$.
   La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?
3. Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

1) Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $f_n : x \longrightarrow n\sin(x)\cos^n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_n(0) = 0$
$f_n(\frac{\pi}{2}) = 0$

de plus, comme $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \leq 1$. d'où,

$$f_n(x) = n\sin(x)\cos^n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$ par croissance comparée.

Donc,

$$f_n \xrightarrow[{[0,\frac{\pi}{2}]}]{CS} f \left| \begin{array}{l} [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

2) On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, n\sin(x) dx = \left[\frac{-n}{n+1} \cos^{n+1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

De plus, on remarque que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément on aurait

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) dx$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

Donc on a pas de convergence uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

3) Si on pose $a>0$, on a convergence uniforme sur les segments de la forme $[a, \frac{\pi}{2}]$. En effet,
Soit $x \in [a, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |n\sin(x)\cos^n(x)|$$

$$\underset{\substack{x \to \cos(x) \text{ est} \\ \text{décroissante sur } [a,\frac{\pi}{2}]}}{\leq} n\cos^n(a).$$

or pour $a \in [a, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(a) < 1$.
Donc par passage au sup pour $x \in [a, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, [a, \frac{\pi}{2}]} \leq n\cos^n(a)$$

Donc par théorème d'encadrement on conclue que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, \frac{\pi}{2}]$.

Pierre

Exercice :

Soit u_n la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$$

1. Étudier la convergence de la suite (u_n) sur $\mathbb{R}_+$.
2. Éudier la convergence uniforme de la suite (u_n) sur $[a\,;+\infty[$, avec $a > 0$.
3. La convergence de la suite (u_n) est-elle uniforme sur $[0\,;+\infty[$?

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$|u_n(x)| \leq e^{-n\overbrace{x}^{\geq 0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ainsi, $u_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CS} 0$

2) Soit $x \in [a,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}$

$|u_n(x)| \leq |e^{-nx}| \overset{\text{atteint en } x=a}{\leq} e^{-na}$ indépendant de x

par passage au sup sur $x \in [a,+\infty[$, $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = e^{-na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ainsi, $u_n \xrightarrow[\mathbb{R}^*]{CU} 0$

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{\pi}{2n} \in [0,+\infty[$

et $x_n \to 0$.

De plus, $n\in\mathbb{N}^*$, $|u_n(x_n)| = e^{-\pi/2} \neq 0 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

ainsi, u_n ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

Clara

EXERCICE 15. — *Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.*

1. *Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.*
2. *Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?*
3. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
4. *Soit $n \geq 1$ et $x_0 \geq n \geq 1$. Montrer que $f(x_0) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.*
5. *Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.*

1) Soit $x \geq 0$ fixé et $n \geq 1$.

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n^{3/2}}$$

D'après Riemann $(3/2 > 1)$ et d'après le théorème de domination pour les séries à termes positifs, $\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}_+$,

et donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit $x \in [0, M]$ fixé, $M > 0$

$\forall x \in [0,M]$ f_n est dérivable sur $[0; M]$.

$$f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2} \geq 0$$

x	0		M
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(M)$

donc $\|f_n\|_{\infty,[0,M]} = f_n(M)$.

Or, d'après q 1, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, donc $\sum \|f_n\|_{\infty,[0,M]}$ converge

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé

x	0		$+\infty$
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc d'après Riemann, $(1/2 < 1)$ $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$ diverge

donc $\sum f_n$ ne ~~est~~ ~~ne~~ converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

de plus, $\sum f_n$ converge uniformément par segment, ~~car $\|f_n - f\|_{\infty,I} = \|f_n\|_{\infty,I}$ (q 2) sur $\mathbb{R}_+$~~

car CVN $\Rightarrow$ CVU, et à la q 2, on a montré que $\sum f_n$ converge normalement par segment.

donc par le théorème de la limite uniforme, f est continue sur $\mathbb{R}$.

④ On a $n \geq 1$ et $x_0 \geq n \geq 1$

donc,

~~$f_n(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{n}(x_0+n)} \geq \frac{n}{\sqrt{n}\, 2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$~~

or f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc $f_n(x_0) \geq f_n(n)$.

$$f_n(x_0) \geq \frac{n}{\sqrt{n}(2n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

on somme de 1 à n, et on obtient:

$$f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

quand $n \to +\infty$, $x_0 \to +\infty$, et donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

par théorème de comparaison,

$f(x_0) \xrightarrow[x_0 \to +\infty]{} +\infty$, et ce $\forall x_0 \geq n$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

⑤ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}(x+n)} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}(x+n)} = \frac{\sqrt{n}}{x+n} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Bilal

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0\,;1]$, on pose $f_n(t) = nt(1-t)^n$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de cette suite de fonctions sur $[0\,;1]$, $]0\,;1]$ et $[a\,;1]$ (avec $0 < a \leqslant 1$).

1) Soit $t \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

* si $t = 0$, $f_n(t) = 0$
* si $t = 1$, $f_n(t) = 0$
* si $t \neq 0$ et $t \neq 1$, $0 \leq f_n(t) = nt(1-t)^n \leq n e^{n\ln(1-t)}$ car $t \in]0,1[$.

Par croissances comparées et théorème d'encadrement,

$$\boxed{f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CS} f \;\Big|\; \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto 0 \end{array}}$$

2) Étude de la convergence uniforme.

* Sur $[0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-1+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} \neq 0$$

Donc $\boxed{f_n \underset{[0,1]}{\overset{CU}{\not\longrightarrow}} f}$

* Sur $]0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

f_n est dérivable sur $]0,1]$.

$$\forall t \in]0,1],\ f_n'(t) = n\left((1-t)^n - tn(1-t)^{n-1}\right)$$
$$= n(1-t)^{n-1}(1-t-nt)$$

On résout : $f_n'(t) \geq 0 \iff 1-t-nt \geq 0$

$$\iff t \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit :

t	0		$\frac{1}{n+1}$		1
$f_n'(t)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f_n	$\|$	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$	$\searrow$	

On en conclut : $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty$
$$= f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} \neq 0.$$

Donc $\boxed{f_n \underset{]0,1]}{\overset{CU}{\not\longrightarrow}} f}$

* <u>Soit $a>0$, sur $[a,1]$.</u> Soient $t \in [a,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

* si $a \neq 1$. $|f_n(t) - f(t)| = nt(1-t)^n \leq n(1-a)^n$ car $a \in]0,1[$.

par passage au sup en $t \in [a,1]$ sur une quantité indépendante de t : $\|f_n - f\|_\infty \leq n(1-a)^n$
On en déduit par théorème d'encadrement et croissances comparées : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

* si $a = 1$, $|f_n(1) - f(1)| = f_n(1) = 0$, de même, $\|f_n - f\|_\infty = 0$.

Donc $\boxed{f_n \xrightarrow[{[a,1]}]{CU} f}$

Laetitia

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) + f(1+x) = \frac{1}{x^2}$

1. On raisonne par analyse-synthèse.

(A) Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tel que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) + f(1+x) = \frac{1}{x^2}$

Alors on peut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
"$f(x) + (-1)^{n-1} f(x+n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$"

(I) Au rang $n = 1$ $f(x) + f(1+x) = \frac{1}{x^2} = \sum_{k=0}^{1-1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $f(x) + (-1)^{n-1} f(x+n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$

$$f(x) + (-1)^n f(x+n+1) = f(x) + (-1)^n \left(\frac{1}{(x+n)^2} - f(x+n) \right)$$

$$= f(x) + (-1)^{n-1} f(x+n) + (-1)^n \cdot \frac{1}{(x+n)^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

D'où le résultat

. Or quand $n \to +\infty$: $f(x) + (-1)^{n-1} f(x+n) \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$

On obtient alors $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$

Au terme de cette analyse et sous réserve d'existence, on trouve une unique solution.

(5) On pose $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{array} \right.$

. f est bien définie car $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \left| \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

(on conclut avec Riemann et le théorème de domination sur les séries à termes positifs)

. Soit $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k+1)^2}$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x^2}$

D'où $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$

. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \end{array} \right.$

(H1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 = l_n$

(H2) Mq $\sum f_n$ converge normalement. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$|f_n(x)| = \frac{1}{|x+n|^2} \leq \frac{1}{n^2}$ (indépendant de x)

Par passage au sup sur $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*} \leq \frac{1}{n^2}$.

Par théorème de domination sur les séries à termes positifs

$\sum \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+^*}$ converge $\Rightarrow \sum f_n$ converge normalement

$\Rightarrow \sum f_n$ converge uniformément.

Finalement, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Pour conclure, la fonction $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{array} \right.$ est

l'unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, telle que

$f(x) \to 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) + f(1+x) = \frac{1}{x^2}$.

Pauline

Énoncé : On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0;1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f_n(x) = x(1 + \sqrt{n}\, e^{-nx})$$

1) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0;1]$ vers une limite f qu'on déterminera.

2) En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de :

$$I_n = \int_0^1 x\,(1 + \sqrt{n}\, e^{-nx})\,dx.$$

1) • Montrons d'abord que (f_n) converge simplement sur $[0;1]$.

Soit $x \in [0;1]$.

* si $x = 0$: $f_n(0) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

* si $x \neq 0$: $f_n(x) = x + x\sqrt{n}\, e^{-nx}$

$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$, par croissance comparée.

Ainsi, $f_n \xrightarrow[{[0;1]}]{CS} f \left| \begin{array}{l} [0;1] \to [0;1] \\ x \mapsto x \end{array} \right.$

• Montrons que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0;1]$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x\sqrt{n}}{e^{nx}}\right| \leqslant \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{e^{n}}}_{\text{indépendant de } x}$$

Par passage au sup sur $[0;1]$.

$0 \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{e^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée.

D'après le théorème d'encadrement :

$$\|f_n - f\|_{\infty, [0,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CU} f$.

2) • $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CU} f$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$ car composée de fonctions continues.

D'après le théorème d'intégration d'une limite de suite de fonctions continues sous CU, on a :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Ainsi, $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Benjamin

Colle Semaine 16

$\forall n \geq 1$, on pose $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)} \end{array} \right.$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.

2) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $x_0 \geq n \geq 1$. Montrer que : $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) \to \infty$

5) Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

1) Soit $x \geq 0$,

$$0 \leq f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n\sqrt{n}} = \frac{x}{n^{3/2}}$$

Donc par critère de Riemann $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$, linéarité de séries convergentes et théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs : $\sum f_n(x)$ converge.

Ainsi, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit $M > 0$, soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$\forall x \in [0, M], 0 \leq f_n(x) \leq \underbrace{\frac{M}{n\sqrt{n}}}_{\text{indépendant de } x}$ $\quad (x \leq M$ et $x + n \geq n)$

En passant au sup : $\|f_n\|_{\infty,[0,M]} \leq \frac{M}{n\sqrt{n}}$

De même qu'en Q1, $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n\sqrt{n}}$ converge donc par théorème de domination pour les séries à termes positifs : $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[0,M]}$ converge.

Donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, M]$

De plus f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geq 0, \quad f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}(x+n) - \sqrt{n}x}{(\sqrt{n}(x+n))^2} = \frac{n\sqrt{n}}{n(x+n)^2} \geq 0$$

Donc f_n est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$:

x	0	$+\infty$
f_n	0 $\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{n}x} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On en conclut : $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et par le critère de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+}$ diverge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3) · $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n continue sur $\mathbb{R}_+$.

· $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ car converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ par Q2.

Le critère de continuité s'applique :

$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k = f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4) $$\sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0}{\sqrt{k}(x_0+k)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $k \leq n \leq x_0 \Rightarrow x_0 + k \leq 2x_0$

Or, $\sum_{k \geq 1} f_k(x_0)$ est une série à termes positifs convergente, donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x_0) = f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

$\Rightarrow f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ pour tous $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $x_0 \geq n$

Soit $A > 0$,

par Riemann $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ diverge vers $+\infty$ donc :

$\exists N \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}, \forall n \geqslant N \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geqslant A$

Soit $x \geqslant \overset{= x_0}{N}$, on a :

$$f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geqslant A$$

Ainsi :

$\forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}_+, \forall x \geqslant x_0, f(x) \geqslant A$

C'est-à-dire : $\underline{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}$

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$:

$g_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{n}(x+n)} \end{array} \right.$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}, \|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = g_n(0) = \frac{1}{n^{3/2}}$

Donc encore par le critère de Riemann, $\sum \|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+}$ converge : $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}, \sum_{k=1}^{n} \overbrace{g_k(x)}^{\substack{0 \\ \uparrow x \to +\infty}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
- $\sum g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$

Donc par théorème de la double limite en un point du bord :

- $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k$ a une limite finie en $+\infty$
- $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Par linéarité de séries convergentes, on en déduit :

$$\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

Mathias

Banque d'exercices

Exercice 3

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} n^{-n}$ est convergente.

2. Montrer que $t \mapsto t^{-t}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, et en déduire l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\,dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := n^{-n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n > 0$

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}}{n+1}.$$

Or, $n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$

Donc $e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$ par continuité de exp.

Ainsi, $\frac{|u_{n+1}|}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

D'après le critère de D'Alembert, $\sum_{n\geq 1} n^{-n}$ est convergente.

2. $f \,\Big|\, \begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{-t} \end{array}$

Soit $t \in]0,1]$, $f(t) = e^{-t\ln(t)}$.

Or, $-t\ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées.

Ainsi, $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$.

f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ par :

$$\tilde{f} \,\Big|\, \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} f(t), & \text{si } t \in]0,1] \\ 1, & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 \underbrace{t^{-t}}_{=e^{-t\ln(t)}} dt$

Or, exp est développable en série entière, ne montrons :

$$\int_0^1 t^{-t}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t\ln(t))^k}{k!}\,dt$$

Posons : $g \,\Big|\, \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} -t\ln(t), & \text{si } t \in]0,1] \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}$

Montrons que $\sum \frac{g^n}{n!}$ converge uniformément sur $[0,1]$, par la convergence normale ie montrons que $\sum \left\| \frac{g^n}{n!} \right\|_{\infty,[0,1]}$ converge. g est dérivable sur $]0,1]$ et :

$\forall t \in]0,1]$, $g'(t) = -\ln(t) - 1$

$g' \geq 0 \iff \ln(t) \leq -1$

$\iff t \leq e^{-1}$

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Donc, $\left\| \frac{g^n}{n!} \right\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{e}$

Or, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n}{n!} = e^{1/e}$ car exp est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. (H1) Donc $\sum \frac{g^n}{n!}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0,1]$.

Par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, (H2) $\frac{g^n}{n!}$ continue sur $[0,1]$ (car g est continue sur $[0,1]$)

Le théorème de la double limite en un point du segment s'applique. Ainsi, il reste à montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \underbrace{\int_0^1 t^k \ln^k(t)\,dt}_{I}$$

Par récurrence finie, on a trivialement à l'aide de l'intégration par parties : $I = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^k} \int_0^1 t^k\,dt$

Soit : $I = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$. Ainsi : $\int_0^1 t^{-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

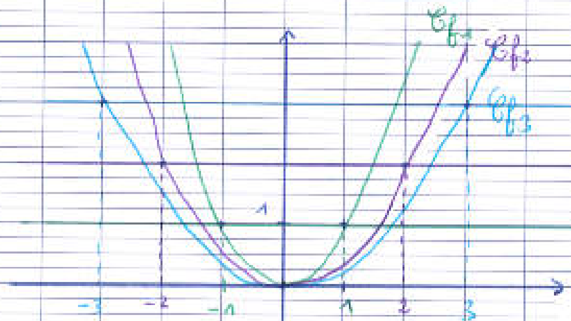
$$\int_0^1 t^{-t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Donc, $\int_0^1 t^{-t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$

Rose | Colle S16 | L. 18/01/2021

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \inf(n, \frac{x^2}{n}) \end{array} \right.$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.



① Montrons que : $\begin{cases} \forall x \in [-n; n], \quad f_n(x) = \frac{x^2}{n} \\ \forall x \in]-\infty; -n] \cup [n; +\infty[, \quad f_n(x) = n \end{cases}$

• Soit $x \in [-n; n]$: $|x| \leq n$

$\Rightarrow x^2 \leq n^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{n} \leq n$

$\Rightarrow f_n(x) = \frac{x^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

• Soit $x \in]-\infty; n] \cup [n; +\infty[$: $|x| \geq n$

$\Rightarrow x^2 \geq n^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{n} \geq n$

$\Rightarrow f_n(x) = n$

Or, comme $n \to +\infty$, on peut considérer, puisque x est fixé dans $\mathbb{R}$:
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad x \in [-n, n]$.

Et ainsi : $\boxed{f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CS} f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array} \right.}$

② Considérons $(x_n = n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On a : $f_n(x_n) - f(x_n) = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \neq 0$

Donc $\boxed{f_n \overset{CU}{\underset{\mathbb{R}}{\not\longrightarrow}} f.}$

Margaux

Exercice 8. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.
2. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent simple de S en 0^+.

1) $e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ +\infty & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$

donc si $x \leq 0$, la série $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ est grossièrement divergente. Dans le cas où $x>0$,
$0 \leq e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées.
or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente et donc par théorème de sommation des o pour les séries à termes positifs, $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ converge.
On en déduit $\underline{\mathcal{D}_S =]0;+\infty[}$.

2) (H_1) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x\sqrt{n}} \end{array} \right.$

$\forall n \in \mathbb{N}$, les f_n sont $\mathcal{C}^0$ sur $]0;+\infty[$ et donc les $\sum_{k=0}^{n} f_k$ sont continues sur $]0;+\infty[$.

(H_2) Montrons que $\sum f_n$ CUK sur $]0,+\infty[$. Montrons "plus fort" avec la CNK.
Soit $[a,b] \subset]0;+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a,b]$.
$|f_n(x)| \leq e^{-a\sqrt{n}}$ (indép de x) $\xrightarrow{\text{passage au sup}}$ $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq e^{-a\sqrt{n}}$
or d'après la question 1), $\sum e^{-a\sqrt{n}}$ converge et donc par théorème de domination pour les séries à termes positifs, $\sum f_n$ CNK sur $[a,b]$.
Par le théorème de la limite uniforme d'une série

de fonctions continue, $\underline{S \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur }]0;+\infty[}$

3) On souhaite utiliser le théorème de la double limite en un point au bord de l'intervalle.

(H_1) $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n\geq 1 \end{cases}$

et donc $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

(H_2) Montrons que $\sum f_n$ CU sur $[2,+\infty[$. Montrons plutôt que $\sum f_n$ CN sur $[2,+\infty[$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $x\in[2,+\infty[$.

$|f_n(x)| \leq \underbrace{e^{-2\sqrt{n}}}_{\text{indépendant de } x}$

Par passage au sup sur $[2,+\infty[$,

$\|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[} \leq e^{-2\sqrt{n}}$

or d'après la question 1), $\sum e^{-2\sqrt{n}}$ converge donc par théorème de domination pour les séries à termes positifs, $\sum f_n$ CN sur $[2;+\infty[$

Par le théorème précédemment cité, on en déduit que $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$

4) Soit $k\in\mathbb{N}$, $t\in[k,k+1]$, $x\in]0;+\infty[$.

$k \leq t \leq k+1 \iff \sqrt{k} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{k+1}$

$\iff x\sqrt{k} \leq x\sqrt{t} \leq x\sqrt{k+1}$

$\iff e^{-x\sqrt{k}} \geq e^{-x\sqrt{t}} \geq e^{-x\sqrt{k+1}}$

Par croissance de l'intégrale,

$$e^{-x\sqrt{k}} \geq \int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \geq e^{-x\sqrt{k+1}}$$

En sommant pour k allant de 0 à $n\in\mathbb{N}$,

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} e^{-x\sqrt{k}}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} S(x)} \geq \int_0^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \geq \underbrace{\sum_{k=0}^{n} e^{-x\sqrt{k+1}}}_{\underset{n\to+\infty}{\to} S(x)-1} \quad (*)$$

Margaux

$$\int_0^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \underset{\uparrow}{=} 2\int_0^{\sqrt{n+1}} u e^{-xu}\,du$$

$u = \sqrt{t} \iff t = u^2$

d'où $dt = 2u\,du$

or $\begin{cases} a'(u) = e^{-xu} \\ b(u) = u \end{cases}$ $\begin{cases} a(u) = -\frac{1}{x}e^{-xu} \\ b'(u) = 1 \end{cases}$

a et b sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \sqrt{n+1}]$,

$$\int_0^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = \left[-\frac{u}{x}e^{-xu}\right]_0^{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{n+1}} e^{-xu}\,du$$

$$= -\frac{\sqrt{n+1}}{x}e^{-x\sqrt{n+1}} + \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{x}e^{-xu}\right]_0^{\sqrt{n+1}}$$

$$= \underbrace{-\frac{\sqrt{n+1}}{x}e^{-x\sqrt{n+1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \frac{1}{x}\Big(\underbrace{-\frac{1}{x}e^{-x\sqrt{n+1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \frac{1}{x}\Big)$$

par croissances comparées

quand $n \to +\infty$ dans $(*)$,

$$S(x) - 1 \leq \frac{1}{x^2} \leq S(x)$$

et donc

$$\frac{1}{x^2} \leq S(x) \leq \frac{1}{x^2} + 1$$

$$\iff \underbrace{1}_{\xrightarrow[x\to0^+]{} 1} \leq \frac{S(x)}{\frac{1}{x^2}} \leq \underbrace{1 + x^2}_{\xrightarrow[x\to0^+]{} 1}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{S(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}}$$

Clarisse
Semaine16

Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue. Montrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)$ converg uniformément.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose que $f_n, f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

On veut montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in I, |g \circ f_n(x) - g \circ f| \leq \varepsilon$$

- On sait que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

et

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon = \alpha > 0$ alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$

Ainsi, $|g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$

On a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I \; |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$

d'où

$$g \circ f_n \xrightarrow{CU} g \circ f$$

Léonard Colle S 16

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

1) Etudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$

2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$. La convergence est-elle uniforme ?

3) Etablir la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé,

si $x = 0$, $f_n(x) = 0 \to 0$

si $x \neq 0$, $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{2^n x}{n2^n x^2}\right| = \dfrac{1}{n|x|} \longrightarrow 0$

donc $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CS} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$

2) Si on a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$

or $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}dx$

$= \dfrac{1}{2n}\int_0^1 \dfrac{2n2^n x}{1+n2^n x^2}dx$

$= \dfrac{1}{2n}\left[\ln(|1+n2^n x^2|)\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{2n}\ln(1+n2^n)$

or $1+n2^n \sim n2^n$, par continuité de $\ln$:

$\int_0^1 f_n(x)dx \sim \dfrac{1}{2n}\ln(n2^n) = \dfrac{\ln(n)}{2n} + \dfrac{\ln(2)}{2} \longrightarrow \dfrac{\ln(2)}{2}$ par CC.

d'où $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \dfrac{\ln(2)}{2} \neq 0$ donc la convergence n'est pas uniforme

3) Soit $a > 0$, Soit $x \in [a, +\infty[$,

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left|\frac{e^n x}{1 + n e^{2n} x^2}\right| \leq \frac{e^n |x|}{1 + n e^{2n} |x|^2} \leq \frac{e^n |x|}{n e^{2n} |x|^2}$$

finalement, $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{na}$

or $\frac{1}{na}$ est indépendant de x, par passage au sup sur $[a, +\infty[$

et par théorème d'encadrement, on déduit :

$\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \to 0$ i.e $f_n \xrightarrow[{[a,+\infty[}]{CU} f$

Julien

Exercice de khôlle
Semaine n° 16.

EXERCICE 5. — Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1]$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left| \begin{array}{l} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto n^2x(1-nx)\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \end{array} \right.$

1) Soit $x \in [0;1]$.

Si $x=0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;\frac{1}{n}]$.

$\Rightarrow$ $\underline{f_n(0) = n^2 \cdot 0(1-0n) = 0.}$

Si $x \in]0;1]$:

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\frac{1}{n} < x$.

ie, $\forall n \geq N$, $\underline{f_n(x) = 0.}$

Ainsi, on a $\underline{f_n \xrightarrow[{[0;1]}]{CS} 0_{\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})}}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2t(1-nt)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 0\,dt$

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t\,dt - \int_0^{\frac{1}{n}} n^3 t^2\,dt$$

$$= n^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} - n^3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

Or $\frac{1}{6} \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0.$

Par contraposée du théorème d'intégration d'une limite de suite de fonctions sous CU, soit les f_n ne sont pas $\mathcal{C}^0$, soit $f_n \underset{[0;1]}{\overset{CU}{\not\to}} 0_{\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})}$. (*)

Vérifions donc que les f_n sont $\mathcal{C}^0$:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\lim_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n(x) = \lim_{x\to\frac{1}{n}^-} n x \underbrace{(1-nx)}_{\underset{x\to\frac{1}{n}}{\to 0}} = 0 = \lim_{x\to\frac{1}{n}^+} 0 = \lim_{x\to\frac{1}{n}^+} f_n(x).$

Ainsi, f_n est $\mathcal{C}^0$ en $\frac{1}{n}$, et sur $[0;\frac{1}{n}[$ et $]\frac{1}{n};1]$,
donc f_n est $\mathcal{C}^0$ sur $[0;1]$.

Par (*), on en déduit que $f_n \underset{[0;1]}{\overset{CU}{\not\to}} 0_{\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})}$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq 1$.
Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{n} < a.$

$\Rightarrow \forall n \geq N, \forall x \in [a;1]\ f_n(x) = 0.$

Ainsi, $\|f_n - 0_{\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})}\|_{\infty,[a,1]} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ie :
$f_n \underset{[a;1]}{\overset{CU}{\longrightarrow}} 0_{\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})}.$

Valentin

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ définie pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 1$

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ CS sur $\mathbb{R}_+$
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ CU sur $\mathbb{R}_+$
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Montrons que $\sum u_n(x)$ CV.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- $u_n(x)\, u_{n+1}(x) \leq 0$
- $|u_n(x)| - |u_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right)$

or $\ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \geq \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right)$ par croissance de $x \mapsto \ln(x)$

Donc $|u_n(x)|$ est décroissante.

- $0 \leq |u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi par le CSSA $\sum u_n(x)$ CV

2. La série vérifie les hypothèses du CSSA

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \sim \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{ind de } x}$$

Par passage au sup et théorème d'encadrement.

$$\left\|\sum_{k\geq n+1}^{+\infty} u_k(x)\right\|_\infty \longrightarrow 0$$

et ainsi $\sum_{n\geq 1} u_n$ CU sur $\mathbb{R}$.

Mathilde

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0;1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer
$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$$
et la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.
3. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $[0;1]$?

1) Soit $x \in]0,1]$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n x}{2^n n x^2} = \frac{1}{nx}$

donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $f_n \xrightarrow[[0,1]]{CS} f$ avec f la fonction nulle.

2) $I_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1+2^n n x^2} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$= \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{n 2^{n+1} x}{1+2^n n x^2} dx$

$= \frac{1}{2n} \left[\ln(1+2^n n x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2n} \ln(1+2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}$

3) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ et l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est bien définie, alors si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\ln(2)}{2}$ et $\int_0^1 0 dx = 0 \neq \frac{\ln(2)}{2}$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Colle. Dorian

Exercice : On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction f_n sur $[0;\ \pi]$ par : $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x(1+nx)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0;\ \pi]$ de la suite de fonctions (f_n).

2. Soit $a \in]0;\ \pi[$. Etudier la convergence uniforme sur le segment $[a;\ \pi]$ de la suite (f_n).

1. Convergence simple.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

* si $x=0$, $f_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

* Soit $x \in]0, \pi[$

$0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

$\Rightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x(1+nx)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x(1+nx)} = 0$ alors par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

Ainsi, $f_n \xrightarrow[{[0,\pi]}]{CS} f \left| \begin{array}{l} [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Convergence uniforme :

Par l'absurde, on suppose que f_n converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{1+nx} = 1 = f_n(0)$$

donc f_n est continue en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Par le théorème de la double limite, on en déduit que f est continue en 0.

f n'est pas continue et donc on a une contradiction.

Ainsi, f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0,\pi]$

2. Soit $a \in]0,\pi[$

$$f_n \xrightarrow[{[a,\pi]}]{CS} f \left| \begin{array}{l} [a,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array} \right.$$

Soit $x \in [a,\pi]$,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\sin(x)|}{|x(1+nx)|} \leq \frac{1}{x(1+nx)}$$

De plus, $0 < a \leq x \leq \pi$

$\Rightarrow 0 < 1+na \leq 1+nx \leq 1+n\pi$

$\Rightarrow a(1+na) \leq x(1+nx) \leq \pi(1+n\pi)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(1+nx)} \leq \frac{1}{a(1+na)}$$

Ainsi, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{a(1+na)}$

Par passage au sup sur $[a, \pi]$, Dorian

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{a(1+na)}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a(1+na)} = 0$ alors par le théorème d'encadrement :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$

Ainsi, $f_n \xrightarrow[{[a,\pi]}]{CU} f$

Bertrien

Ennoncé : Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$

1 - Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$

2 - Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment $[0, A]$ avec $A > 0$.

Résolution :

1 - Soit $x \geq 0$ fixé,

$$u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2} \leq \frac{x}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{x}{n^2}$ converge par Riemann $(2 > 1)$ et par théorème de domination pour les séries à termes positifs $\sum u_n$, converge simplement sur $\mathbb{R}_+$

2 - Soit $[0, A]$ avec $A > 0$

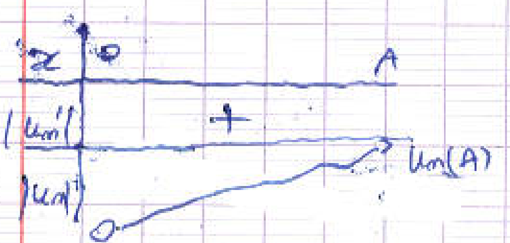
Soit $x \in [0, A]$ fixé

Montrons que $\sum u_n$ converge uniformément ou montrons plutôt que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, A]$.

$$u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$$

u_n est dérivable et :

$$\forall x \in [0, A], \quad u_n'(x) = \frac{(n^2 + x^2) - 2x^2}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{-x^2 + n^2}{(n^2 + x^2)^2} \geq 0$$



On a ainsi $\|u_n\|_{\infty, [0, A]} = u_n(A) < \frac{A}{n^2 + A^2} \leq \frac{A}{n^2}$

Donc par Riemann $(2 > 1)$ et théorème de domination pour les série à termes positifs $\sum \|u_n\|_{\infty}, [0, A]$ CV

Donc $\sum u_n$ CVN sur $[0, A]$