Bastien

Ennoncé : Démontrer que l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution dans $M_3(\mathbb{C})$

Résolution :

Par l'absurde supposons qu'il existe $X \in M_3(\mathbb{C})$ tel que : $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi X^2 est nilpotente d'où $\chi_{X^2}(\lambda) = \lambda^3$

D'après Caley - Hamilton :

$$\chi_{X_2}(X^2) = X^6 = O_{M_3(\mathbb{C})}$$

Ainsi X est nilpotente

donc $X^3 = 0$

or si X est nilpotente $X^4 = 0$

Contradiction car $X^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc l'équation n'a pas de solution dans $M_3(\mathbb{C})$

Valentin.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et notons $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f^4 = f^2 \text{ et } \pm 1 \in Sp(f)$$

Etablir que f est necessairement diagonalisable

On peut exprimer ici le polynome associé :

$X^4 + X^2 = 0$

$\Rightarrow X^2(X^2+1) = 0$

Ainsi $\{0,-1,1\} \supset Spec(f) \supset \{-1,1\}$

- Si $Spec(f) = \{0,-1,1\}$ alors on a 3 valeurs propres dans E une espace de dimension 3 et donc f est diagonalisable.

- Sinon $0 \notin Spec(f) \Rightarrow f$ est inversible
  Or $f^4 = f^2$
  ainsi $f^2 = id_E$
  f est alors dans ce cas une symétrie et est donc diagonalisable.

Khôlle 12.

Exercice 7 ★★★

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B n'ont pas de valeur propre commune.

1. En notant $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A, montrer que $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir que $AX = XB \Leftrightarrow X = \{0\}$.
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

5

Sname.

Comme $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A et B sont trigonalisable.

ainsi :

* $\exists P_1 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, $\exists T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P_1 T_1 P_1^{-1}$
* $\exists P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, $\exists T_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P_2 T_2 P_2^{-1}$

$$\chi_A = \chi_{T_1} = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

D'où $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{n} (B - \lambda_k I_n)$

et $\det(\chi_A(B)) = \det$

$$= \prod_{k=1}^{n} \det(B - \lambda_k I_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \det(P_2(T_2 - \lambda_k I_n)P_2^{-1})$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \det(T_2 - \lambda_k I_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (\underbrace{(\mu_k - \lambda_k)}_{\neq 0} I_n)$$

$\neq 0$ car A et B n'ont pas de valeur propre commune.

$\det(\chi_A(B)) \neq 0$ donc $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $X = \{0\}$ alors $AX = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = XB$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $AX = XB$.

* Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ on montre que $A^k X = XB^k$.

(I) pour $k=0$: $A^0 X = I_n X = X$

et $XB^0 = X$.

(H) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $A^k X = XB^k$.

$$A^{k+1}X = (A^k . A)X = A^k(AX) \underset{\text{par hypothèse}}{=} A^k(XB) = (A^k X)B$$
$$\overset{HR}{=} (XB^k)B$$
$$= XB^{k+1}$$

D'après le principe de récurrence, on a montré que $\forall k \in \mathbb{N}$ $A^k X = XB^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

On a : $\chi_A(A).X = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k.X = \sum_{k=0}^{n} a_k XB^k$
$= X.\sum_{k=0}^{n} a_k B^k$
$= X.\chi_A(B)$.

Or $\chi_A(A)X = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ (d'après Cayley Hamilton).

Or $\chi_A(B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ (question 1).

On a : $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = X.\chi_A(B)$

$\underset{\times \chi_A(B)^{-1}}{\Longrightarrow}$ $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = X$.

D'où l'equivalence

3) On suppose qu'il existe $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\begin{cases} AX_1 - X_1B = M \\ AX_2 - X_2B = M \end{cases}$

D'où $A(X_1 - X_2) = (X_1 - X_2)B$

$\overset{Q2}{\Longleftrightarrow}$ $X_1 - X_2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

$\Longleftrightarrow$ $X_1 = X_2$

d'où l'unicité d'un tel X.

Colle Dorian

Exercice 15. — *Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1. Déterminer un polynôme annulateur pour J. En déduire la valeur de J^k pour $k \geq 2$.*

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $[J]_{ij} = 1 \quad \forall i,j \in [\![1,n]\!]$

Soit $i,j \in [\![1,n]\!]$

$$[J^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [J]_{ik}[J]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

donc $J^2 = nJ$

$\Rightarrow J^2 - nJ = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Ainsi, $P(X) = X^2 - nX = X(X-n)$ est un polynôme annulateur de J.

Comme J admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, J est diagonalisable.

De plus, $rg(J) = 1$ alors d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(J)) = n-1$

Or $\mathrm{Ker}(J) = E_0(J)$ donc $\dim(E_0(J)) = n-1$

De plus, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(J) \subset \mathrm{Spec}(P) = \{0, n\}$

Comme J est diagonalisable, $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(J)} \dim(E_\lambda(J))$

$\Rightarrow n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(J) \setminus \{0\}} \dim(E_\lambda(J)) + n - 1$

$\Rightarrow 1 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(J) \setminus \{0\}} \dim(E_\lambda(J))$

$\Rightarrow$ m est valeur propre de J et $\dim(E_m(J)) = 1$

J est donc semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m \end{pmatrix}$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $J = PDP^{-1}$

Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k = PD^kP^{-1}$

Soit $k \geq 2$, $J^k = P\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m^k \end{pmatrix}P^{-1}$

$$= m^{k-1} \times P\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= m^{k-1} \times J$$

Pierre

Exercice 2
Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$, lesquelles sont diagonalisables ?

- Si $i = j$, la matrice est diagonale.

- si $i \neq j$,

$$\chi = (-X)^n.$$

Donc la seule valeur propre est 0.
C'est-à-dire que si E_{ij} est diagonalisable,
elle serait semblable à la matrice nulle.
Ce qui est impossible car elles n'auraient pas le même rang.
En effet, le rang de la matrice nulle est 0 et celui de E_{ij} est de 1. (2 matrices semblables ont même rang).

Maëva

Exercice de Colle Semaine 14

Enoncé : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) En notant J la matrice constituée que de 1, calculer J^2

2) En déduire que A est diagonalisable et déterminer son spectre.

3) Préciser alors son polynôme caractéristique

1) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

2) On remarque : $A = J - I_n$

$\iff J = A + I_n$

D'où, $J^2 = n I_n$

$\iff (A+I_n)^2 - n(A+I_n) = 0$

Donc $P(X) = (X+1)^2 - n(X+1)$

Dans ce cas, $P \in Ann(A)$.

$P(X) = (X+1)(X+(1-n))$

Donc P est scindé à racine simple dans $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et $Spec_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1, n-1\}$

Or, $Spec_{\mathbb{R}}(A) = \{n-1\}$ car $A = P\begin{pmatrix} 1_{n-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1_{n-1} \end{pmatrix}P^{-1}$

$= P I_n P^{-1}$

$= (n-1) I_n$

3) Comme $Spec_{\mathbb{R}}(A) = \{n-1\}$

On a : $\chi_A = (X-(n-1))^n$

Yann

Exercice de khôlle

Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.

Démontrons que, si $A \in Gl_n(\mathbb{C})$,

A diagonalisable $\Leftrightarrow$ A^2 diagonalisable.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons A diagonalisable.
$\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = P \underbrace{\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{D} P^{-1}$$

D'où
$$\begin{aligned} A^2 &= PD\cancel{P^{-1}P}DP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} \\ &= P\,\text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)P^{-1} \end{aligned}$$

Donc A^2 est diagonalisable

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons A^2 diagonalisable et inversible.

μ_{A^2} est scindé à racines simples,
$\mu_{A^2} = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_r)$,

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$, deux à deux distinctes

$\mathrm{Spec}(A^2) = \mathrm{Spec}(\mu_{A^2})$

$\mu_{A^2}(A^2) = (A^2 - \lambda_1 I_1) \cdots (A^2 - \lambda_n I_n)$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = s_k e^{i\theta_k}$
où $s_k > 0$, $\theta_k \in \mathbb{R}$.

Les racines carrées de λ_k dans $\mathbb{C}$ sont
$\pm \sqrt{s_k}\, e^{i\frac{\theta_k}{2}}$

$P = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - \lambda_k)$ annule A

$P = \prod_{k=1}^{n} (X - \sqrt{s_k}\, e^{i\frac{\theta_k}{2}})(X + \sqrt{s_k}\, e^{i\frac{\theta_k}{2}})$

Supposons que $\pm \sqrt{s_k}\, e^{i\frac{\theta_k}{2}} = \pm \sqrt{s_l}\, e^{i\frac{\theta_l}{2}}$

avec $l, k \in [\![1, n]\!]$.

En élevant au carré, il vient $\lambda_k = \lambda_l$

D'où $k = l$.

Soit $\pm \sqrt{s_k}\, e^{i\frac{\theta_k}{2}} = \pm \sqrt{s_k}\, e^{i\frac{\theta_k}{2}}$,

de même signes

P est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable.

Malaurie

Exercice de colles semaine 13

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on définit la matrice B par blocs : $B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ A & O_n \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que B est semblable à la matrice B' définie par : $B' = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & -A \end{pmatrix}$

2. Établir alors que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

1. * On a : $\begin{vmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 2I_n & I_n \\ 0 & -I_n \end{vmatrix} \underset{\text{determinant matrice triangulaire par blocs}}{=} |2I_n| \times |-I_n| = (-2)^n \neq 0$

donc $\det(P) \neq 0$ et P est inversible

* Calculons PB et $B'P$.

$PB = \begin{pmatrix} A & A \\ -A & A \end{pmatrix}$ $\qquad B'P = \begin{pmatrix} A & A \\ -A & A \end{pmatrix}$

On a donc $PB = B'P$.

Or, P est inversible, notons P^{-1} son inverse.

$PB = B'P \iff B = P^{-1}B'P$

Ainsi, B et B' sont semblables.

2. Comme B et B' sont semblables, B est diagonalisable $\iff$ B' est diagonalisable

Ainsi, montrons que A est diagonalisable $\iff$ B' est diagonalisable.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons A diagonalisable. Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale.

Dans ce cas, $B' = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & O_n \\ O_n & -PDP^{-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P & O_n \\ O_n & P \end{pmatrix}}_{=Q} \begin{pmatrix} D & O_n \\ O_n & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & O_n \\ O_n & P^{-1} \end{pmatrix}$

$\det(Q) = \det(P)^2 \neq 0$ donc Q est inversible.

On remarque de plus $Q \times \begin{pmatrix} P^{-1} & O_n \\ O_n & P^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}$

Finalement, $B' = Q\begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & -D \end{pmatrix} Q^{-1}$ donc B' est diagonalisable.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de B'.

Dans ce cas, $P(B') = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \begin{pmatrix} A^k & 0_n \\ 0_n & (-A)^k \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0_n$$

Ainsi, tout polynôme annulateur de B' est annulateur de A.

En particulier, $\mu_{B'}(A) = 0$.

Comme B' est diagonalisable, μ_B est scindé à racine simple.

Ainsi, A est annulé par un polynôme scindé à racine simple donc A est diagonalisable

Mathilde

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) En notant J la matrice des 1, calculer J^2

2) En déduire que A est diagonalisable et donner son spectre

3) Préciser alors son polynôme caractéristique

1) On a $J^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & n & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) On a $J^2 = n \times J$ or $J = A + I_n$

d'où $(A + I_n)^2 = n(A + I_n)$.

Un polynôme annulateur de A est alors tel que :

$P(X) = (X+1)^2 - n(X+1)$

$= (X+1)((X+1)-n)$

$= (X+1)(X-(n-1))$

Comme P est scindé à racines simples alors A est diagonalisable. On a de plus :

$\{-1 ; (n-1)\} \subset \mathrm{Spec}(A)$ mais comme A est diagonalisable, on a forcément $\mathrm{Spec}(A) \neq \{-1\}$ et $\mathrm{Spec}(A) \neq \{n-1\}$ donc $\mathrm{Spec}(A) = \{-1 ; (n-1)\}$

3) Son polynôme caractéristique est de la forme : $\chi_A = (X+1)^\alpha (X-(n-1))^\beta$ et on sait que $\deg \chi_A = n$ donc $\alpha + \beta = n$, avec α et $\beta \in \mathbb{N}^*$.

D'après le théorème du rang :

$\mathrm{rg}(A + I_n) + \dim(\mathrm{Ker}(A + I_n)) = \dim E = n$

et $\mathrm{rg}(A+I_n) = \mathrm{rg}(J) = 1$ d'où $\dim(\mathrm{Ker}(A+I_n)) = n-1$

or $\mathrm{Ker}(A+I_n) = E_{-1}(A)$ donc $\dim E_{-1}(A) = n-1$

d'où $\alpha = n-1$ et $\beta = 1$ donc

$\chi_A = (X+1)^{n-1}(X-(n-1))$

Erem

Exercice :

Calculer A^k avec k un entier naturel et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

* On commence par déterminer le spectre de A :

Notons χ_A, le polynôme caractéristique de A, il vient :

$$\chi_A(x) = (x-1)^3$$

Soit $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$

χ_A scindé sur $\mathbb{R}$ / non diagonalisable (car $A \neq I_3$) donc trigonalisable.

* Soit $(x,y,z) \in E_1(A)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z = x \\ -x+y+z = y \\ -x+y+2z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -x \quad +z = 0 \\ \cancel{-x+y+z = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

d'où $E_1(A) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{U_1}\right)$

On cherche un vecteur $U_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AU_2 = U_1 + U_2$

Soit $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + y_2 + z_2 = y_2 \\ -x_2 + y_2 + z_2 = 1 \\ \cancel{-x_2 + y_2 + z_2 = 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ x_2 = y_2 = z_2 \right.$$

D'où $U_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Enfin, avec $U_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

On a U_1, U_2 et U_3 libre et forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (vecteurs générateurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto AX \end{array}\right.$

$\text{Mat}_{B_0}(f) = A$ où $B_0 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

On a $AU_3 = U_2 + U_3$

D'où $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(U_1) & f(U_2) & f(U_3) \end{matrix} & \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} & \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{matrix} \end{array}$

$\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$

Par théorème de changement de base :

$$\underbrace{\underset{\mathcal{B}_0}{\mathrm{Mat}}(f)}_{A} = \underset{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}{P} \times \underbrace{\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)}_{D} \times P^{-1}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Enfin, on peut montrer par récurrence, que : $A^k = PD^kP^{-1}$ avec $k \in \mathbb{N}$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + C$

où $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$D^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} C^k$$

D'où $D^k = \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

finalement,

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

où $D^k = \begin{pmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 26. — *Trigonaliser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Frédéric

on a $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & 2 \\ 0 & \lambda-6 & 3 \\ 1 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & 2 \\ 0 & \lambda-6 & 3 \\ -\lambda+2 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_3$

$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 \\ 3 & \lambda-6 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 \\ \lambda-3 & \lambda-6 \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$= (\lambda-2)(\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & \lambda-6 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)^2(\lambda-3)$

donc $\mathrm{Spec}(A) = \{2, 3\}$

Soit $X \in E_2(A)$ alors : $AX = 2X$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 2z = 2x \\ 6y - 3z = 2y \\ -x + 4y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$

Soit z fixé $\quad \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 2z \\ y = \frac{3}{4}z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \frac{3}{4}z \end{cases}$

donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(u_1)$

Soit $X \in E_3(A)$ donc $AX = 3X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 3z = 3x \\ \quad 6y - 3y = 3y \\ -x + 4y \quad = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y - 3z = 0 \\ \quad 3y - 3y = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases}$$

Soit z fixé $\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 3z \\ y = z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

alors $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}(u_2)$

~~on~~ montrons que Soit $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ une base.

montrons que c'est libre : Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ alors c'est libre et de même dimension que $M_{3,1}$ donc c'est une base

Soit $f = AX$ l'endomorphisme associé à A d'après le theoreme du changement de base $\exists P_{\mathcal{E} \to \mathcal{F}}$ et $\exists D \in M_{3,3}$

tel que $D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /u_1 \\ /u_2 \\ /u_3 \end{array}$ et que $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{array}$

tel que $A = PDP^{-1}$

Exercice 2. On considère le système différentiel (E) : $\begin{cases} x'' = 3x + y \\ y'' = 2x + 2y \end{cases}$ d'inconnues les fonctions x et y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X''(t) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X'' = AX$.
2. Déterminer $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que les fonctions coordonnées du vecteur $Y = P^{-1}X$ vérifient un système différentiel que l'on précisera et résoudre celui-ci.
4. En déduire les solutions de (E).

Marine

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{4, 1\}$

• $E_1(A)$: Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = X$: $X \in E_1(A)$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3x + y = x \\ 2x + 2y = y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ \cancel{2x + y = 0} \end{cases} \implies y = -2x$ D'où $E_1(A) = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{u_1}\Big)$

• $E_4(A)$: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_4(A)$: $AX = 4X$

$\begin{cases} 3x + y = 4x \\ 2x + 2y = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ \cancel{2x - 2y = 0} \end{cases} \implies x = y$ D'où $E_4(A) = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2}\Big)$

• $\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $\mathcal{B}_0 = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2}\Big)$.

On a $D = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(u_1) & u(u_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} /u_1 \\ /u_2 \end{array} \end{array}$ et $P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} /e_1 \\ /e_2 \end{array} \end{array}$ $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

On pose u l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$u \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto AX \end{array} \right.$ $\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)}_{A} = \underbrace{P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}}_{P} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}_{D} P^{-1}$

3) On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X''(t) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $X'' = AX$.

Or $A = PDP^{-1}$

D'où $X'' = PDP^{-1}X \underset{\times P^{-1}}{\implies} P^{-1}X'' = DP^{-1}X \implies (P^{-1}X)'' = D(P^{-1}X)$

$\implies Y'' = DY$

En posant $Y = P^{-1}X$.

4) On a $Y'' = DY$ on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $Y'' = \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 4y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1''(t) = y_1(t) \\ y_2''(t) = 4y_2(t). \end{cases}$

On résoud les équations linéaires d'ordre 2 associées.

$\begin{cases} r^2 - 1 = 0 & \Rightarrow r = \pm 1 \\ r^2 - 4 = 0 & \Rightarrow r = \pm 2. \end{cases}$

Finalement $\begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{-t} \\ y_2(t) = \mu_1 e^{2t} + \mu_2 e^{-2t} \end{cases}$ avec λ_1, λ_2 et μ_1, μ_2 des constantes solutions particulières des équations respectives $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

De plus $Y = P^{-1}X$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{3}y(t) \\ y_2(t) = \frac{2}{3}x(t) + \frac{1}{3}y(t). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) - y(t) = 3y_1(t) & L_1 \\ 2x(t) + y(t) = 3y_2(t) & L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) - y(t) = 3y_1(t) \\ 3y(t) = 3y_2(t) - 6y_1(t) \end{cases} \Rightarrow y(t) = y_2(t) - 2y_1(t)$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

D'où $y(t) = \mu_1 e^{2t} + \mu_2 e^{-2t} - 2(\lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{-t})$

et $x(t) = 3y_1(t) + y(t)$

$= 3(\lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{-t}) + \mu_1 e^{2t} + \mu_2 e^{-2t} - 2(\lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{-t})$

$x(t) = \mu_1 e^{2t} + \mu_2 e^{-2t} + \lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{-t}.$

Clara

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.
   Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier que A est diagonalisable.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)(X+2)$ puis déterminer l'expression de A^n en fonction de A^2, A et I_3.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

① On cherche $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$AX_n = \begin{pmatrix} au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2} \\ du_n + eu_{n+1} + fu_{n+2} \\ gu_n + hu_{n+1} + iu_{n+2} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

On obtient $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2} \\ u_{n+2} = du_n + eu_{n+1} + fu_{n+2} \\ u_{n+3} = gu_n + hu_{n+1} + iu_{n+2} \end{cases}$ On peut prendre $a = c = 0$ et $b = 1$
$d = e = 0$ et $f = 1$

de plus, on rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n$.
donc on peut prendre $g = -4$, $h = 4$ et $i = 1$.
Finalement,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

② On remarque 1 est valeur propre de A.

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ +4 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_1 + C_2}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A = (\lambda-1) \cdot 1 \cdot 1^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda+1)(\lambda-1) - 3\right] = (\lambda-1)(\lambda^2-4) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

A possède 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

③ En appliquant le théorème de la division euclidienne pour la division de X^n par $(X-1)(X-2)(X+2)$.

$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\begin{cases} X^n = Q(X-1)(X-2)(X+2) + R \\ \deg R < \deg\left((X-1)(X-2)(X+2)\right) = 3 \end{cases}$

On cherche R, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$R(X) = a_n + b_n X + c_n X^2$.

on a :

$R(-2) = (-2)^n = a_n - 2b_n + 4c_n$

$R(1) = a_n + b_n + c_n = 1$

$R(2) = a_n + 2b_n + 4c_n = 2^n$.

En résolvant ce système, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$ par méthode du pivot de Gauss
$\begin{cases} a_n = 4/3 - 2^{n-1} + 2/3\,(-2)^{n-2} \\ b_n = 2^{n-2} - (-2)^{n-2} \\ c_n = 2^{n-2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{n-2} \end{cases}$

De plus, en évaluant X^n en A, on obtient.

$A^n = Q(A)(A - 1I_3)(A - 2I_3)(A + 2I_3) + R(A)$

$= Q(A)\ \chi_A(A) + R(A)$

$= R(A)$ car $\chi_A(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley Hamilton

D'où $A^n = a_n I_3 + b_n A + c_n A^2$.

or $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ -4c_n & a_n + 4c_n & b_n + c_n \\ -4b_n - 4c_n & 4b_n & a_n + b_n + 5c_n \end{pmatrix}$

Clara

④ On rappelle que $X_{n+1} = AX_n$.

On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_n = A^n . X_0$

or $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

$$A^n X_0 = \begin{pmatrix} a_n u_0 + b_n u_1 + c_n u_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$ ces lignes ne nous intéressent pas

On obtient :

$u_n = a_n u_0 + b_n u_1 + c_n u_2$ or $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$

$= b_n + 3c_n$

$= 2^{n-2} - (-2)^{n-2} + 3 . 2^{n-2} - 1 + (-2)^{n-2}$

$= 4 . 2^{n-2} - 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Emilie.

EXERCICE :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que 0 soit sa seule valeur propre.
1- Montrer que $A^n = 0$
2- Montrer que $\det(A + I_n) = 1$
3- Montrer que quelle que soit la matrice M inversible et commutant avec A on a $\det(A+M) = \det(M)$.

1)
Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.
$\chi_A = X^n$ car 0 est la seule valeur propre
Or
d'après Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0 \Rightarrow A^n = 0$.

2) sachant $\det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda)$
Donc $\det(-I_n - A) = \chi_A(-1)$

$\Rightarrow \det((-1)(I_n + A)) = (-1)^n$
$\Rightarrow \cancel{(-1)^n} \det(I_n + A) = \cancel{(-1)^n}$

$\Rightarrow \det(I_n + A) = 1$.

3) $\det(A + M) = \det(AMM^{-1} + M)$ avec M^{-1} l'inverse de la matrice M $= \det(MAM^{-1} + M)$ car M et A commutent*
$= \det(M) \times \det(AM^{-1} + I_n)$.

Or, $(AM^{-1})^n = A^n \times (M^{-1})^n \overset{1}{=} 0 . (M^{-1})^n = 0$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On peut appliquer (2) à la matrice AM^{-1}. Et alors, $\det(AM^{-1} + I_n) = 1$.

Donc $\det(A + M) = \det(M)$.

1* A commute également avec M^{-1}.

Remarque :
en question 2, on peut remarquer que A est nilpotente et donc, semblable à une matrice *. Ainsi $A + I_n$ est semblable à une diagonale avec des 1 sur la diagonale, ce qui justifie que $\det(A + I_n) = 1 \times \dots \times 1 = 1$. car invariant par changement de base.
* diagonale stricte

Sirine Khôlle 14.

Exercice : Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs propres de u ?

2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & \lambda-m \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 2-m & \lambda-m \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 2-m & \lambda-m \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(-1)^{3+3} \cdot (\lambda-m)(\lambda-2)$$

On a : $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-m)$

et $Spec_{\mathbb{R}}(A) = Spec(u) = \{1, 2, m\}$.

79 67 38

2) <u>1° cas</u> : Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$:
alors χ_A est scindé à racines simples,
donc A diagonalisable.

<u>2° cas</u> : Si $m = 1$.
alors $\chi_A = (X-1)^2.(X-2)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $A - I_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

C_2 et C_3 sont non colinéaire donc $rg(A - I_3) \geq 2$.
et 1 est valeur propre de A donc $rg(A - I_3) \leq 2$.
Finalement, $rg(A - I_3) = 2$ et par théorème du rang :
$\dim(E_1) = 1$
Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 vaut 2. D'où A non diagonalisable.

<u>3° cas</u> : Si $m = 2$.
alors $\chi_A = (X-1).(X-2)^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $rg(A - 2I_3) = 1$ d'où $\dim(E_2) = 2$ (par théorème du rang).

et comme $\dim E_1 = 1$ on a : $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim E_1 + \dim E_2$.
donc A est diagonalisable.

Sirine 3) On suppose que $m = 2$.

d'où : $\chi_A = (X-2)^2 \cdot (X-1)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $A = \mathcal{M}at_{B_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

avec $B_0 = \mathcal{C}an(\mathbb{R}^3)$

* Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(u)$

$\Leftrightarrow u((x,y,z)) - (x,y,z) = 0$.

$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}, y \in \mathbb{R}$.

D'où $E_1(u) = Vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}\right)$

De la même façon on trouve : $E_2(u) = Vect\left(\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{u_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{u_3}\right)$

Or on sait $\mathbb{R}^3 = E_1(u) \oplus E_2(u)$.

et par concaténation des bases dans une somme directe on a : $B = (u_1, u_2, u_3)$ base de $\mathbb{R}^3$.

Et on a : $\mathcal{M}at_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$.

Par théorème de changement de bases, il vient :

$$A = \mathrm{Mat}_{B_0}(u) = \underbrace{P_{B_0 \to B}}_{P} \cdot \underbrace{\mathrm{Mat}_B(u)}_{D} \cdot \underbrace{P_{B \to B_0}}_{P^{-1}}$$

avec $P = \mathrm{Mat}_{B, B_0}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} / e_1 \\ / e_2 \\ / e_3 \end{array}$

et $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{B_0, B}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} / u_1 \\ / u_2 \\ / u_3 \end{array}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_3$

et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On montre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = P \, D^k \, P^{-1}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2^k \\ -2^k & 2^k & 2^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

PAUL khôlle numero 14

Exercice :

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $A = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ -4\mathrm{i} & -3\mathrm{i} \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Donner un polynôme annulateur de A.

3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par X^2+1 , pour $n \geqslant 2$.

4. Déterminer A^n.

1) Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on a :

$$\begin{aligned} \chi_A &= X^2 - Tr(A)X + det(A) \\ &= X^2 + 1 \\ &= (X-i)(X+i) \end{aligned}$$

Donc χ_A est scindé à racine simple sur $\mathbb{C}$. On en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2) On sait d'après le théorème de Cayley-Hamilton que $\chi_A(A) = 0$.
Donc le polynome X^2+1 annule A.

3) D'après le theoreme de la division euclidiene sur $\mathbb{C}[X]$, on a

$$\exists!(Q,R) \in \mathbb{C}[X]^2, \quad X^n = (X^2+1)Q + R$$
$$deg(R) < deg(X^2+1)$$

Donc on a pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $R = aX + b$.

De plus, en évaluant en $X = i$ et $X = -i$, on a le système :

$$\begin{cases} i^n = ai + b \\ (-i)^n = -ai + b \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} i^n = ai + b \\ i^n + (-i)^n = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i^n = ai + b \\ b = \dfrac{i^n + (-i)^n}{2} \end{cases}$$

Donc, $b = \dfrac{i^n + (-i)^n}{2}$ et $a = \dfrac{(-i)^{n+1} + i^n}{2i}$

Finalement,

$$R = \frac{(-i)^{n+1} + i^n}{2i} X + \frac{i^n + (-i)^n}{2}$$

4) On avait la relation pour $n \geq 2$,

$$X^n = (X^2 + 1) Q + R$$

En évaluant en $X \leftarrow A$ et par Cayley-Hamilton on obtient :

$$A^n = \underbrace{(A^2 + I_2)}_{=0} Q(A) + aA + b I_2$$

$$\Rightarrow A^n = \frac{(-i)^{n+1} + i^n}{2i} A + \frac{i^n + (-i)^n}{2} I_2$$

Julien

Exercice de Khôlle
Semaine n° 14

Exercice 4
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle. On définit l'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\phi(M) = tr(A)M - tr(M)A$$

1. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, puis déterminer $Ker(\phi)$ et $Im(\phi)$.
2. Montrer que ϕ est diagonalisable.

1) On a bien $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\phi(\lambda M + \mu N) = tr(A).(\lambda M + \mu N) - tr(\lambda M + \mu N).A$

(tr linéaire) $= \lambda\, tr(A).M + \mu\, tr(A).N - (\lambda\, tr(M) + \mu\, tr(N))A$.

$= \lambda \phi(M) + \mu \phi(N)$

Ainsi, $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$M \in Ker(\phi) \iff \phi(M) = 0$

$\iff tr(A).M - tr(M).A = 0$

$\iff M = \dfrac{tr(M)}{tr(A)}.A$ $\quad (tr(A) \neq 0)$.

Ainsi, $M \in Vect(A)$, et $Ker(\phi) \subset Vect(A)$.

Soit $M \in Vect(A)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $M = \lambda A$.

$\phi(M) = tr(A).M - tr(M).A$

$= \lambda\, tr(A).A - \lambda\, tr(A).A$ $\quad$ (tr linéaire)

$= 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Ainsi, $\underline{Ker(\phi) = Vect(A)}$.

· Soit $M \in Im(\phi)$, alors il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \phi(N)$.

$\Rightarrow M = Tr(A).N - Tr(N).A$

$\Rightarrow Tr(M) = Tr(A).Tr(N) - Tr(N).Tr(A) = 0$

$\Rightarrow M \in Ker(Tr)$.

$\Rightarrow \underline{Im(\phi) \subset Ker(Tr)}$.

Or par formule du rang, on a : $dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 = dim(Ker(\phi)) + rg(\phi)$

$\Rightarrow \underline{dim(Im(\phi)) = n^2 - dim(Vect(A)) = n^2 - 1}$.

Or Tr est une forme linéaire, donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; en particulier $\underline{dim(Ker(Tr)) = n^2 - 1}$.

Ainsi, par égalité des dimensions finies, $\underline{Im(\phi) = Ker(Tr)}$.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\phi^2(M) = \phi(Tr(A).M - Tr(M).A)$

$= Tr(A).\phi(M) - Tr(M).\underbrace{\phi(A)}_{=0}$ car $A \in Vect(A) = Ker(\phi)$.

Ainsi, $\phi^2(M) - Tr(A).\phi(M) = 0$.

ie $\underline{\phi(M).(\phi(M) - Tr(A)) = 0}$.

On a donc explicité un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ annulant ϕ ; ce qui équivaut à ce que ϕ soit diagonalisable.

Rose — Colle S14 — L.04/01/21

Soit u un endomorphisme de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit Π_u son polynôme minimal. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P et Π_u sont premiers entre eux.

Il faut montrer :

$$P(u) \in GL(E) \iff P \wedge \Pi_u = 1.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $P \wedge \Pi_u = 1$

Par le théorème de Bézout :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad AP + B\Pi_u = 1$$

On a donc :

$$A(u) \circ P(u) + B(u) \circ \underbrace{\Pi_u(u)}_{=0_{\mathcal{L}(E)}} = id_E \quad \Rightarrow \quad A(u) \circ P(u) \overset{\circledast}{=} id_E.$$

Comme deux polynômes d'un même endomorphisme commutent toujours, on a aussi :

$$P(u) \circ A(u) \overset{\circledast}{=} id_E$$

$\circledast$ et $\circledast$ donnent : $\underline{P(u) \in GL(E)}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $P \in GL(E)$

Notons $D = P \wedge \Pi_u$.

- Si $\deg(D) = 0$, c'est terminé (polynôme de degré 0 unitaire $= 1$).
- Si par l'absurde, on suppose que $\deg(D) \geqslant 1$, on a en se plaçant sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \ D(\lambda) = 0.$

On alors : $\begin{cases} \lambda \text{ est valeur propre de } u \text{ comme racine de } \Pi_u \\ \lambda \text{ est racine de } P \end{cases}$

On a donc :

$\exists\, Q \in \mathbb{C}[X], \quad P = Q\,(X-\lambda) \in GL(E)$

C'est-à-dire : $\det(Q(u) \circ (u - \lambda id_E)) \neq 0$

ie $\det(Q(u)) . \underbrace{\det(u - \lambda id_E)}_{\substack{\parallel \\ 0}} \neq 0$ car λ valeur propre de u

On a : $0 \neq 0$

Contradiction.

D'où : $\deg(D) = 0$ et comme D est unitaire, $D = 1$.

C'est-à-dire :

$$\underline{P \wedge \Pi_u = 1}$$

1/2.

Clarisse
Semaine 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X^2 = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

* Soit $\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_{\varphi_A}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\left((\lambda-2)(\lambda+1) + 2\right) = (\lambda-2)\left(\lambda^2 - \lambda\right) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(\varphi_A) = \{0, 1, 2\}$, φ_A possède $\underbrace{3}_{=\dim(\mathcal{M}_{3,1})}$ valeurs propres 2 à 2 distinctes $\Rightarrow$ φ_A diagonalisable.
$\Rightarrow$ A diagonalisable

* $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}\right)$ car $Av_1 = 2v_1$.

* Soit $X \in E_0(A)$, $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ -4y + 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{u_1}\right)$

* Soit $X \in E_1(A)$, $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 4y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad E_1(A) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}^{U_2}\right)$

A étant diagonalisable on a : $\mathcal{M}_{3,1} = E_1(A) \oplus E_0(A) \oplus E_2(A)$
Ainsi par concaténation des bases on a :
$B = U_1 \# U_2 \# U_3$ une base de $\mathcal{M}_{3,1}$

Ainsi, par théorème de changement de base on a.

$$\text{Mat}_{B}(\varphi_A) = P_{B_0 \to B} \underbrace{\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi_A(U_1) & \varphi_A(U_2) & \varphi_A(U_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /U_1 \\ /U_2 \\ /U_3 \end{array} \end{array}}_{= D} P^{-1}$$

* On cherche d'abord l'ensemble de $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que
$Y^2 = D$ ie $YD = DY$
Soit Y tel que $YD = DY$ alors

$$YD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2c = 0 \\ 0 = d \\ e = e \\ 2f = f \\ 0 = 2g \\ h = 2h \\ 2i = 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = e \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = i \end{cases}$$

$$\{Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ Y^2 = D\} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}_{(a,e,i) \in \mathbb{R}^3} = \{Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ YD = DY\}$$

Ainsi si $Y^2 = D$ alors Y est diagonale

Semaine 14
Clausse

$$Y^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On a $X^2 = A \Leftrightarrow XA = AX$

$\Leftrightarrow XPDP^{-1} = PDP^{-1}X$

$\underset{P^{-1}x\,-\,xP}{\Leftrightarrow} P^{-1}XPD = DP^{-1}XP$

Ainsi $P^{-1}XP \in \{Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ Y^2 = D\}$

$P^{-1}XP = Y \Leftrightarrow X = PYP^{-1}$

avec $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ainsi $\{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ X^2 = A\} = \left\{ PYP^{-1},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix} \right.$

Exercice : Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$ et-elle diagonalisable ?

2. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Margaux

1) $\chi_A = \begin{vmatrix} \lambda & b & -c \\ -a & \lambda & c \\ a & -b & \lambda \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda & b & -c \\ \lambda-a & \lambda+b & 0 \\ a & -b & \lambda \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda & b & -c \\ \lambda-a & \lambda+b & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix}$

$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & b & -c \\ \lambda-a & \lambda+b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2-C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3-C_1}}{=} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda+b & -\lambda-c \\ \lambda-a & b+a & -\lambda+a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= \lambda \times 1 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -\lambda+b & -\lambda-c \\ b+a & -\lambda+a \end{vmatrix}$

$= \lambda((-\lambda+b)(-\lambda+a) - (b+a)(-\lambda-c))$

$= \lambda(\lambda^2 - \lambda a - \lambda b + ab + \lambda b + bc + \lambda a + ac)$

$= \lambda(\lambda^2 + ab + bc + ac)$

$\Delta = -4(ab+bc+ac)$

* si $ab+bc+ac<0$ i.e $\Delta>0$

χ_A possède 3 valeurs propres distinctes et comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, A est diagonalisable.

* si $ab+bc+ac>0$ i.e $\Delta<0$:

χ_A n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et donc A n'est pas diagonalisable

* si $ab+bc+ac=0$ i.e $\Delta=0$:

χ_A possède comme unique racine 0

Ainsi, A diagonalisable $\Leftrightarrow$ A semblable à la matrice nulle

$\Leftrightarrow$ A est la matrice nulle

$\Leftrightarrow$ $a=b=c=0$

BARBOSA
Mathias
MP

Banque d'exercices

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $f_A : M \longmapsto AM$.

1. Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est diagonalisable.
2. Montrer que f_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

1. Supposons que $A^2 \underset{(1)}{=} A$, alors $P = X^2 - X$ annule f_A.
En effet, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $P(f_A)(M) = (f_A^2 - f_A)(M)$
$P(f_A)(M) = A^2M - AM \underset{(1)}{=} AM - AM = 0$.
Et $P = X(X-1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f_A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrons que : f_A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Cette équivalence revient donc à montrer que : $P \in \mathrm{Ann}(f_A) \Leftrightarrow P \in \mathrm{Ann}(A)$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où les $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des réels presque tous nuls.
Ainsi, $P(f_A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f_A^k$.
$P(f_A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f_A^k = 0$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = 0$
$\Leftrightarrow P(A) = 0$.
On a donc : f_A est diagonalisable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f_A) = 0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))}$
$\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(A) = 0_{M_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, f_A est diagonalisable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Léonard

Semaine 14 : réduction des endomorphismes et des matrices II.

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie $n \geq 1$ f, g des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. On suppose que f possède n valeurs propres 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{K}$. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(g)$ sont diagonales.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ les n valeurs propres distinctes de f. f est diagonalisable ainsi, on a la décomposition :

$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}(f)$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $x \in E_{\lambda_i}(f)$, ainsi $f(x) = \lambda_i x$.

$\Rightarrow g \circ f(x) = g(\lambda x)$

$(g \circ f = f \circ g$ et g linéaire$) \Rightarrow f(g(x)) = \lambda g(x)$

Ainsi $g(x) \in E_{\lambda_i}(f)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g_{E_{\lambda_i}(f)}$ est l'endomorphisme induit par g sur $E_{\lambda_i}(f)$ défini par

$$g_{E_{\lambda_i}(f)} \left| \begin{array}{l} E_{\lambda_i}(f) \longrightarrow E_{\lambda_i}(f) \\ x \longmapsto g(x) \end{array} \right.$$

Par le cours, $g_{E_{\lambda_i}(f)}$ est diagonalisable dans $E_{\lambda_i}(f)$ ie il existe $\mathcal{B}_{E_{\lambda_i}(f)}$ une base de $E_{\lambda_i}(f)$ telle que $Mat_{\mathcal{B}_{E_{\lambda_i}(f)}}(g_{E_{\lambda_i}(f)})$ soit diagonale.

Par concaténation des bases dans une somme directe,

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1}(f) \# \mathcal{B}_{\lambda_2}(f) \# \dots \# \mathcal{B}_{\lambda_n}(f)$ est une base de E

Par construction même de cette base, $Mat_{\mathcal{B}}(g)$ est diagonale.

Comme $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition de E,

$Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est également diagonale. $\square$

Benjamin

Colle semaine 14

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :
A nilpotente si et seulement si $tr(A) = \dots = tr(A^n) = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que A est nilpotente.
Alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \quad A = P\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{T}P^{-1}$$

Par récurrence, on montre que :
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ A^k = PT^kP^{-1}$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ T^k = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ (produits par blocs)

La trace étant un invariant de similitude, on lit alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ Tr(A^k) = Tr(T^k) = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \ Tr(A^k) = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la dimension de l'espace :

(I) $n = 1$

Supposons que $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et $Tr(A) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a) \\ Tr(A) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0$$

Donc $A = 0_{\mathcal{M}_1(\mathbb{C})}$ et A est nilpotente.

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant l'hypothèse sur les traces est nilpotente.

Supposons que $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et $Tr(A) = \dots = Tr(A^{n+1}) = 0$

Soit $\chi_A = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$ le polynôme caractéristique de A. Par Cayley-Hamilton :

$\chi_A(A) = 0$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} a_k A^k = 0$

$\downarrow$ $Tr(.)$ linéaire

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} a_k \underbrace{Tr(A^k)}_{=0 \text{ sauf si } k=0} = 0$

$\Rightarrow a_0 \times Tr(I_{n+1}) = (n+1)a_0 = 0$

$\Rightarrow a_0 = 0$

On en déduit : $\chi_A = X\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k X^{k-1}\right)$ $(a_{n+1} \neq 0)$

Donc 0 est valeur propre de A.

Soit $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}))$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. 0 étant valeur propre de A donc de φ_A, il existe $e_0 \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ vecteur propre associé à la valeur propre 0.

On complète en $(e_0, e_1, \dots, e_n) = \mathcal{B}$ une base de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ par le théorème de la base incomplète. Si $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$, par théorème de changement de base :

$$A = Mat_{\mathcal{B}_0}(\varphi_A) = \overbrace{P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}}^{P} \, \widetilde{Mat_{\mathcal{B}}(\varphi_A)} \, P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}^{-1}$$

$$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P^{-1} \qquad B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On montre encore par récurrence et produits par blocs :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ A^k = P \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^k & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \alpha = \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k) + 0$$

Ainsi, l'hypothèse de récurrence s'applique à B :

B est nilpotente, donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$

Alors :

$$A^p = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$A^{2p} = A^p \times A^p = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^{2p} = 0$

On en conclut que A est nilpotente : $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

© Par principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$

$\left(\mathrm{Tr}(A) = \ldots = \mathrm{Tr}(A^n)\right) \Rightarrow A$ nilpotente.

L'équivalence est ainsi démontrée.

Pauline

Énoncé :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on définit la matrice B par blocs : $B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ A & O_n \end{pmatrix}$

1) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible

En déduire que B est semblable à la matrice B' définie par : $B' = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & -A \end{pmatrix}$

2) Établir alors que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

1) • Analyse : Supposons que P est inversible

Soient, $X = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ tels que :

$PX = C \iff X = P^{-1} C$.

$$P X = \begin{pmatrix} X + Y \\ X - Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} X + Y = C_1 \\ X - Y = C_2. \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y = C_1 \\ 2X = C_1 + C_2 \end{cases}$$

$(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$

$$\iff \begin{cases} X = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2. \\ Y = \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{2} C_2 \end{cases}$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_n & \frac{1}{2} I_n \\ \frac{1}{2} I_n & -\frac{1}{2} I_n \end{pmatrix}$

<u>Synthèse:</u> Vérifions que P^{-1} convient.

Or, $P P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$.

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_n & \frac{1}{2} I_n \\ \frac{1}{2} I_n & -\frac{1}{2} I_n \end{pmatrix}$

. Vérifions que $B = P B' P^{-1}$.

Or, $P B' P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_n & \frac{1}{2} I_n \\ \frac{1}{2} I_n & -\frac{1}{2} I_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} O_n & A \\ A & O_n \end{pmatrix}$

$= \underline{B}$

2) Montrons que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
Or, B est semblable à B'.
Montrons plutôt que:
A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ B' est diagonalisable.

[$\Rightarrow$] Supposons que A est diagonalisable.
Il existe $Q \in M_n(\mathbb{C})$ et $D \in M_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que: $A = Q D Q^{-1}$.

$$B^- = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QDQ^{-1} & O_n \\ O_n & -QDQ^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

B^- est semblable à une matrice diagonale, elle est donc diagonalisable.

$\Leftarrow$ Supposons que B^- est diagonalisable.

Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ tel que $P(B^-) = 0$.
Ainsi :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k B^{-k} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P(A) & O_n \\ O_n & P(-A) \end{pmatrix} = 0.$$
$\Rightarrow P(A) = 0$ et est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Ainsi, A est diagonalisable.