Rayan

On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels $M(a)$ est diagonalisable $M_3(\mathbb{R})$.

Déterminons $\chi_{M(a)} = (\lambda I_3 - M(a))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -a \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$\chi_{M(a)}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-a)$$
$$\chi_{M(a)}(X) = (X-1)(X-2)(X-a).$$

$\chi_{M(a)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et admet 3 valeurs propres : $\{1; 2; a\}$.

On distingue 3 cas : $a \neq 1$ et $a \neq 2$, $a = 1$, $a = 2$

Cas où $a \neq 1; a \neq 2$: $M(a)$ admet 3 valeurs propres distinctes donc M est diagonalisable.

Cas où $a = 1$: $\chi_{M(a)} = (X-2)(X-1)^2$

$M(a)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \dim E_1 = 2$
$\Leftrightarrow rg(M(a) - I_3) = 1$

d'après le théorème du rang.

$$A - I_3 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \end{array}$$

C_1 est combinaison linéaire de C_2 et C_3 avec C_2, C_3 non colinéaires

Ainsi $rg(A - I_3) \geq 2$

or 1 est valeur propre de $M(a)$ donc $rg(A - I_3) \leq 2$

Donc $rg(A - I_3) = 2$

Nous avons une contradiction donc $M(a)$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ avec $a = 1$.

Cas où $a = 2$ $\chi_{M(a)} = (X-1)(X-2)^2$

$$A - 2I_3 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \end{array}$$

C_1 et C_2 sont colinéaires mais C_3 est non colinéaire avec C_1 ou C_2 $\Rightarrow rg(A - 2I_3) \geq 2$

or 2 est valeur propre de $M(a)$ donc $rg(A - 2I_3) \leq 2$

ainsi $rg(A - 2I_3) = 2$

D'après le théorème du rang $\dim(E_2) = 1$.

or la multiplicité de 2 est 2 ainsi on a une contradiction, $M(a)$ n'est pas diagonalisable sur $a = 2$.

Finalement, $Sol = \{ a \in \mathbb{R} \} \setminus \{1, 2\}$.

Exercice : Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs propres de u ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

EMILIE

1)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & \lambda-m \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ \lambda-1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 2-m & \lambda-m \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 2-m & \lambda-m \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ \lambda-m & 2-m & \lambda-m \end{vmatrix} (\lambda-1)$$

En développant selon la première colonne :

$$= (\lambda-1) \left[(-1)^{3+1} (\lambda-m) \cdot (\lambda-2) \right]$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-m)(\lambda-2) \qquad \text{Donc } \chi_u = (X-1)(X-m)(X-2)$$

Ainsi les valeurs propres de u sont 1, m et 2.
$\mathrm{Spec}(u) = \{1, m, 2\}$

2) Puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ si u a 3 valeurs propres alors u est diagonalisable.
Il faut donc que $m \neq 1$ et $m \neq 2$.

3) Cherchons des bases de E_2 et E_1, sous espaces propres de u

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ / $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ On cherche

$$AX = 2X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow X \in \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_{v_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_{v_2}} \Big)$$

(Tout le détails des calculs n'est pas présenté par soucis de place)

De même on cherche à trouver X tel que $AX = X$

$\Rightarrow \begin{cases} x + \quad + z = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $X \in \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{u_3}\right)$.

(u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}3$ en effet :

. la famille est libre :

soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \quad + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0. \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$

. $\mathrm{card}(u_1, u_2, u_3) = 3 = \dim \mathbb{R}3$.

. (u_1, u_2, u_3) étant une famille libre de cardinal maximal c'est une base (le tout de $\mathbb{R}3$).

En notant $B' = (u_1, u_2, u_3)$,

par théorème de changement de base nous avons $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que :

$\mathrm{Mat}_{B_0}(u) = P \,\mathrm{Mat}_{B'}(u) P^{-1}$ avec $P = P_{B_0 \to B}$ et $P^{-1} = P_{B \to B_0}$

$\Rightarrow \quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Ainsi on peut montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall D \in M_n(\mathbb{R}) (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$

d'où $A^k = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Et puisque $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 & 1 \\ 0 & 2^{k+1} & 1 \\ 2^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{k+2}-1 \\ -2^{k+2}+1 & 2^{k+2} & 2^{k+2}-1 \\ 0 & 0 & 2^{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{k+2}-1 \\ -2^{k+2}+1 & 2^{k+2} & 2^{k+2}-1 \\ 0 & 0 & 2^{k+2} \end{pmatrix}$

~fin~

Bastien

Énoncé :

La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est elle diagonalisable ?

Résolution :

$Rg(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n))$

$= \dim(C_1) = 1$

Donc par théorème du rang :

$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - 1 \geq 1$

Ainsi 0 est valeur propre de A

et $n - 1 \leq \dim(E_0(A)) \leq m_0$

d'où $m_0 \geq n - 1$

Comme $X^{m_0} \mid \chi_A$, $X^{n-1} \mid \chi_A$

$\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$\chi_A = Q X^{n-1}$

Or, par analyse des degrés et des coefficients dominants

$Q = X$

Donc $\chi_A = X^n$

Ainsi, 0 est la seule valeur propre de A

or, $m_0 = n - 1 \neq n = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Groupe D

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer les vp λ_1 et λ_2 de f
2. Démontrer que $\mathbb{R}^2 = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f)$
3. En déduire f diagonalisable
4. Déterminer $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$

1. $\chi_A = (\lambda+5)(\lambda+2)$
$= (\lambda-1)(\lambda+8)$
$Spec_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -8\}$

2. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 3x$
$E_1(A) = Vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{u_1}\right)$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -8\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow 6x - 6y = 0$
$\Leftrightarrow E_8(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

De plus $\dim E_1(A) + \dim E_8(A) = \dim E$
Donc A est diagonalisable.

4. On a donc $Mat_B(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \end{array} = D$

et avec $\left.\begin{array}{l} u_1 = e_1 + 3e_2 \\ u_2 = e_1 + e_2 \end{array}\right\}$ $P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} /e_1 \\ /e_2 \end{array} \end{array}$

Par théorème de changement de base
tel que $A = PDP^{-1}$

Aissame

Exercice 8. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^kB - BA^k = kA^k$.
2. On considère maintenant l'endomorphisme u_B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par $u_B(M) = MB - BM$.
   a) À quelle condition la matrice A^k est-elle valeur propre de u_B ?
   b) En déduire que la matrice A est nilpotente.

Soit $k \in \mathbb{N}$, On pose $P(k)$: " $A^kB - BA^k = kA^k$ "

Initialisation :
Soit $k = 0$,
$A^0B - BA^0 = B - B = 0$
$0A^0 = 0$
Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé
On suppose que $P(k)$ est vraie.

HR : $A^kB = kA^k + BA^k$
$A^{k+1}B = kA^{k+1} + ABA^k$
Or $AB = A + BA$
$A^{k+1}B = kA^{k+1} + (A + BA)A^k = kA^{k+1} + A^{k+1} + BA^{k+1}$
$A^{k+1}B = (k+1)A^{k+1} + BA^{k+1}$

2. a) Soit :
$u_B \mid M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
$M \longmapsto MB - BM$
$u_B(A^k) = A^kB - BA^k = kA^k$
Il faut que $A^k \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

b) Par l'absurde, On suppose que A n'est pas nilpotente ainsi il existe une infinité de valeur propre car $u_B(A^k) = kA^k$

Or $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'où la contradiction.

Frederic

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Determiner les element propre de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^N$:

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \end{array} \right.$$

, f est-il diagonalisable

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

on a $A \neq 0_{Mn}$ avec toute les collone de A egale donc :
$1 \leq rg(A) \leq 1 \Rightarrow rg(A) = 1$

d'après le theorème du rang : $rg(A) = Ker(A) + n$
$\Rightarrow Ker(A - 0 id_E) = n - 1$

donc on a $\chi_u \mid X^{n-1}$ donc $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_u = X^{n-1} Q$

par analyse du coefficiant dominant et du degré pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\chi_u = X^{n-1}(X + \alpha) = X^n + X^{n-1}\alpha$$

alors $\alpha = -Tr(A)$
$= -n$

donc $\chi_u = X^{n-1}(X - n)$

alors 0 et n sont valeur propre et $\dim(E_n) \geq 1$, $\dim(E_0) \geq n-1$

donc $n \leq \dim(E_n) + \dim(E_0) \leq n$
alors $\dim(E_n) + \dim(E_0) = n$

donc f est trigonalisable

Devicn

EXERCICE 14. — *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Résoudre l'équation* $X^2 = A$ *d'inconnue* $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \times \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\big((\lambda-2)(\lambda+1)+2\big)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda)$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(\chi_A) = \{0, 1, 2\}$

On cherche les sous-espaces propres:

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ -4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2x \end{cases}$$

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2x \end{cases}$$

$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto AX \end{array} \right.$ alors $A = \mathrm{Mat}_{B_0}(\varphi)$ où B_0 est la base canonique.

$\mathrm{Spec}(\varphi) = \mathrm{spec}(A) = \{0, 1, 2\}$ donc φ a 3 valeurs propres distinctes donc φ est diagonalisable.

De plus, $E_0(A) = E_0(\varphi)$, $E_1(A) = E_1(\varphi)$ et $E_2(A) = E_2(\varphi)$

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_0(\varphi) \oplus E_1(\varphi) \oplus E_2(\varphi)$

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Par le théorème de changement de base : Denion

$$Mat_{B_0}(\varphi) = P_{B_0 \to B} \times Mat_B(\varphi) \times P_{B_0 \to B}^{-1}$$

$$P = P_{B_0 \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Mat_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

On a donc $A = PDP^{-1}$

Soit $X \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $X^2 = A$

On note $M = P^{-1} \times P$

Alors $M^2 = P^{-1} \times PP^{-1} \times P = P^{-1} X^2 P$

Donc $PM^2P^{-1} = X^2$

$\Rightarrow PM^2P^{-1} = A$

$\Rightarrow M^2 = D$ car $A = PDP^{-1}$

On en déduit que :

$$MD = M \times M^2 = M^3 = M^2 \times M = DM$$

On a donc $MD = DM$

$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ avec $a, b, \ldots, i \in \mathbb{R}$

$$MD = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

$$MD = DM \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 2g = 0 \\ b = 0 \\ e = e \\ 2h = h \\ 2c = 0 \\ 2f = f \\ 2i = 2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow d = g = b = h = c = f = 0 \, , \quad e = e \text{ et } i = i$$

Donc $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ et M est diagonale

$$M^2 = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ e^2 = 1 \\ i^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e = \pm 1 \\ i = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = M_1$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = M_2$

ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = M_3$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = M_4$

Comme $X = PMP^{-1}$, alors $X = PM_1P^{-1}$ ou PM_2P^{-1} ou PM_3P^{-1} ou PM_4P^{-1}

Siaine

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(P) = P - (X+1)P'$. Justifier que ϕ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

On note $\mathcal{B} = \mathcal{C}an(\mathbb{R}_n[X])$.

On a : $\phi(1) = 1$

$\phi(X) = -1$

$\phi(X^2) = X^2 - (X+1)\times 2X = -X^2 - 2X$

$\phi(X^3) = -2X^3 - 3X^2$

$\vdots$

$\phi(X^n) = (1-n)X^n - nX^{n-1}$

On écrit :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phi(1) & \phi(X) & \phi(X^2) & & \cdots & & \phi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & -2 & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & -3 & & & \\ & & 0 & -2 & & & 0 \\ & & & 0 & \ddots & & -n \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 1-n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /1 \\ /X \\ /X^2 \\ \vdots \\ /X^n \end{array} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

On remarque que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\phi)$ est une matrice triangulaire supérieure, ainsi ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

d'où $\mathrm{Spec}(\phi) = \underbrace{\{1, 0, -1, -2, \dots, 1-n\}}_{n+1 \text{ valeurs propres 2 à 2 distinctes}}$

On a donc : $\# \mathrm{Spec}(\phi) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$

D'où ϕ diagonalisable

Exercice CCNIP : N° 72

Exercice : *les deux questions sont indépendantes.*

Clara

1. Montrer que quels que soient les réels ,a, c, d, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

2. Soit l'application φ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dns E définie par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer les valeurs propres de φ.

   (c) φ est-il diagonalisable ?

①

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A = \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda-a)(\lambda-d) - c^2$

$= \lambda^2 + (-a-d)\lambda + ad - c^2$

$\Delta = (-(a+d))^2 - 4(ad - c^2)$

$= (a-d)^2 + 4c^2 \geq 0.$

si $\Delta > 0$, alors χ_A scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples donc A diagonalisable.

si $\Delta = 0$, on a $a = d$ et $c = 0$.

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a I_2$ et donc A est diagonalisable.

Finalement, quels que soient les réels a, c, d, A est diagonalisable.

②ⓐ $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Montrons que φ est linéaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$\varphi(\lambda A + B) = \begin{pmatrix} \lambda d + h & -\lambda b - f \\ -\lambda c - g & \lambda a + e \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & -f \\ -g & e \end{pmatrix} = \lambda \varphi(A) + \varphi(B)$

Finalement, φ est linéaire

On en déduit que φ est un endomorphisme de E

ⓑ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que λ est valeur propre de φ

$\exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $M \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$

On a : $M = \lambda \varphi(M)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda d & -\lambda b \\ -\lambda c & \lambda a \end{pmatrix}$$

finalement, on obtient $\begin{cases} a = \lambda d \\ b = -\lambda b \end{cases}$ et $\begin{cases} c = -\lambda c \\ d = \lambda a \end{cases}$

d'où, $b(1+\lambda) = 0$
$c(1+\lambda) = 0$

si $\lambda \neq -1$.

$b = c = 0$, et on a $a = \lambda^2 a$ donc soit $\lambda = 1$
soit $\lambda = 0$ et $a = 0 = d$ ↯
car M serait la matrice nulle

donc si $\lambda = 1$, $a = d$

et $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$

d'où 1 est valeur propre
et $\dim E_1(M) = 1$.

si $\lambda = -1$, on a $a = -d$, $a, c, b \in \mathbb{R}$

et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ finalement -1 est valeur propre
et $\dim E_{-1}(M) = 3$.

④ On a trouvé que $\dim E_1(M) + \dim E_{-1}(M) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$
donc φ est diagonalisable.

Marine

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que A est diagonalisable.

(b) Déterminer une base de vecteurs propres.

(c) Détermiiner A^n, pour $n \geqslant 1$ $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - w_n \\ w_{n+1} &= 2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n.

a. $\chi_A = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & \lambda+1 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix}$.

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$= (\lambda+1)\big((\lambda-2)(2-\lambda)+1\big) = (\lambda+1)(-\lambda^2+4\lambda-3)$

$\Delta = 16 - 12 = 4$. $\qquad \lambda_1 = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$

$\lambda_2 = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$.

Donc $\underline{Spec_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1, 3\}}$

A possède 3 valeures propres distinctes donc A est diagonalisable.

b. • $\underline{E_1(A)}$: $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$

Donc $\underline{E_1(A) = Vect\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}\Bigg)}$.

- $\underline{E_{-1}(A)}$: $\begin{cases} -3x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases}$

$L_3 - 2L_2$

$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ Donc $\underline{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2}\Big)}$

- $\underline{E_3(A)}$ $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ $\underline{E_3(A) = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3}\Big)}$

La base de vecteurs propre est $(u_1, u_2, u_3) = \mathcal{B}$

c. A est diagonalisable ; $A = PDP^{-1}$

avec,

$D = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /u_1 \\ /u_2 \\ /u_3 \end{array}$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{array}$

Et on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\underline{A^n = PD^nP^{-1}}$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et (après calculs) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

2) On pose $X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\to$ (X_n) est une suite géométrique, donc $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$

D'où $X_n = PD^nP^{-1}X_0$

après calculs on trouve : $PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} U_0 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}\right)W_0 \\ U_0 + (-1)^n V_0 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\right)W_0 \\ (-1)^n V_0 + \left(\frac{(-1)^n}{2} + \frac{3^n}{2}\right)W_0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} U_n = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} \\ V_n = \frac{1}{2} + \frac{3(-1)^n}{2} \\ W_n = \frac{3(-1)^n}{2} + \frac{3^n}{2} \end{cases}$

Bien

EXERCICE 4. — *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A.*

1. *Déterminer les valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 de f.*
2. *Démontrer que $\mathbf{R}^2 = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f)$, où pour tout $k \in [\![1,2]\!]$, $E_{\lambda_k}(f) := \mathrm{Ker}(\lambda_k f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$.*
3. *En déduire que f est diagonalisable.*
4. *Déterminer une matrice $P \in GL_2(\mathbf{R})$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ diagonale telles que*

$$A = P\,D\,P^{-1}.$$

Démontrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $B^3 = A$.

1. On calcul le polynôme caractéristique de A :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$$

$$= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 18$$

$$= \lambda^2 + 7\lambda - 8$$

$\Delta(P) = 81$.

$\lambda_1 = \dfrac{-7-9}{2}$; $\lambda_2 = \dfrac{-7+9}{2}$

$\lambda_1 = -8$ $\qquad \lambda_2 = 1$.

3. $P(X) = (X-1)(X+8)$
P est scindé racines simples donc par caractérisation de la diagonalisabilité, A est diagonalisable $\Rightarrow$ f est diagonalisable

4. A est diagonalisable, il existe donc une matrice P inversible tq : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = D$.

On pose alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

et $B = PMP^{-1}$.

Alors, $B^3 = PM^3P^{-1} = A$.

Martin

EXERCICE 10. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ défini par :*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} x_i \right). \end{array} \right.$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

On introduit la matrice dans la base canonique de f :

$\mathcal{M}at_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ en effet $f(e_1) = (1, \dots, 1)$

...

$f(e_n) = (1, \dots, 1)$

On remarque que $rg(\mathcal{M}at_{B_0}(f)) = 1$
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$

D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$

On en déduit que 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$

On introduit le polynome caractéristique qu'on note χ :

Comme χ est de degré n et que 0 est racine de degré au moins $n-1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$\chi = X^{n-1}(X-\alpha)$ la multiplicité de $E_\alpha(f)$ est ≥ 1 comme vp mais inférieure à 1 à cause de la dimension de l'espace

Ainsi si $\alpha \neq 0$, on a : $\begin{cases} \chi \text{ est scindé à racines simples} \\ \text{La multiplicité est égale à la dimension des sous espaces propres} \end{cases}$

ainsi f est diagonalisable

cette condition n'est pas vérifiée pour $\alpha = 0$

Exer

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Résoudre l'équation $X^2 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Il y vient après calcul :

$$\chi_A(x) = x(x-1)(x-2)$$

* On trouve les éléments propres :

▷ $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$

▷ $(x, y, z) \in E_0(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -4y + 2z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases}, y \in \mathbb{R}$

d'où $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

de même on montre que :

$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

De sorte que $PDP^{-1} = A$, avec D une matrice diagonale (A est donc diagonalisable).

* Les vecteurs propres de A étant les vecteurs propres de X, on considère alors M une matrice qui contient les carrées des valeurs propres de A, On cherche $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$

Les matrices M sont en fait les 4 matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\varepsilon_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in \{1,2\} \ \varepsilon_i = \pm 1$$

Reciproquement si $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\varepsilon_2 \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in \{1,2\}$ $\varepsilon_i = \pm 1$

alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = D$

De plus on remarque que M et D commutent en effet $MD = DM$.

finalement, si $X^2 = PDP^{-1}$
$X^2 = PM^2P^{-1} = A$

L'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$ est l'ensemble des matrices de la forme $\underline{X = PMP^{-1}}$ où M est une matrice diagonale : c'est à dire :

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

avec $\underline{\forall i \in \{1,2\}, \ \varepsilon_i = \pm 1}$.

David

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. On souhaite résoudre l'équation $(E) : M^2 - M = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser la matrice A. On notera P une matrice de passage.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ solution de (E). Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
3. En déduire les solutions de (E).

1/ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

* $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A)$

$= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -4 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$

$= \lambda^2 - 8\lambda + 12$

$\Delta(\lambda) = 64 - 48 = 4^2$

D'où, $\lambda_1 = \frac{8-4}{2} = 2$

et $\lambda_2 = \frac{8+4}{2} = 6$

Ainsi, $\chi_A = (X-2)(X-6)$

donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P \in GL_2(\mathbb{R})$

* On a :

$E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - I_2)$

donc on cherche $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

D'où $E_2(A) = (\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_1})$

De même, $E_6(A) = \mathrm{Vect}(\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_2})$

Ainsi, soit $\underline{e} = (e_1, e_2)$ base canoniquement associée à $M_2(\mathbb{R})$ et $\underline{u} = (u_1, u_2)$ base de $M_2(\mathbb{R})$

On a $P_{\underline{u} \to \underline{e}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P$

et $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2/ On a :

(E) : $M^2 - M = A$, $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow M^2 - M = PDP^{-1}$

$\Rightarrow P^{-1}(M^2 - M)P = D$

$\Rightarrow P^{-1}M^2P - P^{-1}MP = D$

$\Rightarrow (P^{-1}MP)^2 - P^{-1}MP - D = 0$

$\Delta = I_2 + 4D > 0$

D'où, $P^{-1}MP = \frac{1}{2I_2}\left(I_2 + \sqrt{I_2 + 4D}\right)$

$$P^{-1}MP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et $P^{-1}MP = \frac{1}{2I_2}\left(I_2 - \sqrt{I_2 + 4D}\right)$

$$P^{-1}MP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par comparaison, $P^{-1}MP$ est diagonale

3/ On en déduit les 2 solutions de (E) :

$M = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $M = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$

Le calcul de ces 2 matrices est pour le PLAISIR du lecteur.

Pierre. Khôlle de la semaine 14.

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -4 \\ -1 & \lambda & 8 \\ 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda & 8 \\ 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda & 8 \\ 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 9 \\ 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= \left[1\,(\lambda+1)(\lambda-5) + 9\right](\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

E_2. $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $X \in E_2 \iff \begin{cases} -2x + 4z = 0 \\ x - 2y - 8z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\iff \begin{cases} -4y - 12z = 0 \\ x - 2y - 8z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + 3z = 0 \\ x - 2y - 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3z, \ t \in \mathbb{R} \\ x = 2z \end{cases}$$

d'où $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim E_2 \neq 2$

donc A n'est pas diagonalisable et μ_A est non scindé à racine simple sur $\mathbb{R}$. On a $\mu_A = (X-1)(X-2)^2$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

E_2 : Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in E_2 \iff \begin{cases} y+z=0 \\ \cancel{-2y-2z=0} \\ \cancel{y+z=0} \end{cases}$

d'où $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

ainsi, $\dim E_2 = 2$ et $E_2 \oplus E_1 = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
car $\dim E_1 = 1$.

De plus, B est alors diagonalisable, donc μ_B est scindé à racine simple sur $\mathbb{R}$.

Comme le polynome minimal est invariant de similitude, si A et B étaient semblables $\mu_A = \mu_B$.

Ici ce n'est pas le cas car l'un est scindé à racine simple et pas l'autre

finalement, A et B ne sont pas semblables

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice de taille $2n$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A. En déduire que si $n > 1$, alors 0 est valeur propre de A et donner la dimension du sous-espace propre associé.

2. Déterminer deux vecteurs propres associés à deux autres valeurs propres.

3. A est-elle diagonalisable ?

Bilal

1) $$A \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & & & \\ a & b & \vdots & & \vdots \\ b & a & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & & \\ C_1 & C_2 & & & \end{array} \end{array}$$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

car des lignes sont identiques

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 b = 0 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 (a^2 - b^2) = 0 & L_1 \leftarrow aL_2 + bL_1 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \text{ ou } |a| = |b| \\ \lambda_1 b + \lambda_2 a = 0 \end{cases}$$. Comme $|a| \neq |b|$, on déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Donc (C_1, C_2) forme une famille libre.

On en déduit : $rg(A) = \dim(Vect(C_1, C_2)) = 2$.

Par théorème du rang, $\dim(Ker(A)) = 2n - rg(A)$

$$\Rightarrow \dim(Ker(A)) = 2(n-1).$$

Ainsi, si $n > 1$, $\dim(Ker(A)) \geq 1$. Donc 0 est valeur propre de A.

Et on a : $\dim(E_0(A)) = \dim(Ker(A)) = 2n - 2$.

2) • On remarque que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na+nb \\ \vdots \\ na+nb \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\overbrace{na+nb}^{\lambda_1}$.

• On pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ il vient : $AX = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \cdots \\ b & a & b & a & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na-nb \\ -na+nb \\ \vdots \\ na-nb \\ -na+nb \end{pmatrix}$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre $\underbrace{na-nb}_{\lambda_2}$.

3) Par la question précédente, on a : $\begin{cases} \dim(E_{\lambda_1}(A)) \geq 1 \\ \dim(E_{\lambda_2}(A)) \geq 1 \end{cases}$

et par la question 1, $\dim(E_0(A)) = 2n-2$.

Comme tous les sous-espaces propres sont en somme directe, on a par formule de Grassmann :

$$\dim\left(E_0(A) \oplus E_{\lambda_1}(A) \oplus E_{\lambda_2}(A)\right)$$

$$= \dim(E_0(A)) + \dim(E_{\lambda_1}(A)) + \dim(E_{\lambda_2}(A)) \geq 2n.$$

Or, $E_0(A) \oplus E_{\lambda_1}(A) \oplus E_{\lambda_2}(A) \subset E \Rightarrow \dim(E_0(A) \oplus E_{\lambda_1}(A) \oplus E_{\lambda_2}(A)) \leq 2n$

donc la dimension de la somme directe vaut $2n$.

On en déduit par caractérisation de la décomposition en somme directe : $E = E_0(A) \oplus E_{\lambda_1}(A) \oplus E_{\lambda_2}(A)$.

Finalement, par caractérisation de la diagonalisabilité, A est diagonalisable.

Mathias

Banque d'exercices

Exercice 5. Soit $n \geqslant 2$. On note φ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que φ est diagonalisable.
3. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note $Q_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
   Montrer que les polynômes Q_k sont des vecteurs propres de φ.
4. En déduire que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire la matrice de φ dans cette base.

1. - φ est linéaire car $\mathbb{R}_n[X]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
   - Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

* Si $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \in \mathbb{R}_n[X]$

* Si $\deg(P) \leq n-1$, $\deg(\varphi(P)) \leq n \Rightarrow \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

* Si $\deg(P) = n$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $[P]_n = \lambda$. $\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$.

$[\varphi(P)]_{n+1} = -\frac{n}{n}\lambda + \lambda$

$[\varphi(P)]_{n+1} = 0$. Ainsi, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

D'où, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. Soit $B_0 = (1, X, \ldots, X^n)$, la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$M = Mat_{B_0}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \cdots & \cdots & \varphi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1/n & & \vdots \\ 0 & 1-\frac{1}{n} & 2/n & \\ \vdots & 0 & 1-\frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} /1 \\ \vdots \\ \\ \\ /X^n \end{array} \quad \bullet\ \varphi(1) = X \times 1$$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(X^k) = \frac{1}{n}X(1-X)kX^{k-1} + X^{k+1}$
  $\Rightarrow \varphi(X^k) = \frac{k}{n}X^k + X^{k+1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$

$\chi_\varphi = \chi_M$. Or, χ_M est triangulaire i.e. $\chi_M = \prod_{k=0}^{n}\left(X - \frac{k}{n}\right)$

D'où, $\chi_\varphi = \prod_{k=0}^{n}\left(X - \underbrace{\frac{k}{n}}_{\lambda_k}\right)$. Comme χ_φ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, φ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. * Soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrons que $\varphi(Q_k) = \lambda_k Q_k$.

- $Q_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

• $\varphi(Q_k) = \frac{1}{n} X(1-X)\left(k X^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k) X^k (1-X)^{n-1-k}\right) + X^{k+1}(1-X)^{n-k}$

$\varphi(Q_k) = X^{k+1}(1-X)^{n-k} + \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n+1-k} - \frac{(n-k)}{n} X^{k+1}(1-X)^{n-k}$

$\varphi(Q_k) = X^k(1-X)^{n-k}\left(X - \frac{(n-k)X}{n} + \frac{k}{n}(1-X)\right)$

$\varphi(Q_k) = Q_k\left(\cancel{\frac{k}{n}X} + \frac{k}{n} - \cancel{\frac{k}{n}X}\right)$

$\varphi(Q_k) = \lambda_k Q_k$

• $\varphi(Q_0) = \varphi((1-X)^n)$

$\varphi(Q_0) = X(1-X)^n - \frac{n}{n} X(1-X)(1-X)^{n-1}$

$\varphi(Q_0) = 0$

$\varphi(Q_0) = \lambda_0 Q_0$ car $\lambda_0 = 0$.

Ainsi, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, Q_k est vecteur propre associé à λ_k.

4. $B = (Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, en effet :

- $\# B = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$
- B est une famille de vecteurs propres de sous-espaces propres distincts, c'est donc une famille libre.

$$\mathrm{Mat}_B(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(Q_0) & \cdots & \varphi(Q_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} Q_0 \\ \\ \\ Q_n \end{array}$$

Benjamin

Colle Semaine n° 13

Exercice 1 :

Soit $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}_{\geq 1})$ dont les coefficients sont notés $c_1, \dots, c_n$. soit $M = C\,{}^tC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) Determiner le rang de M
2) Calculer le polynôme caractéristique de M
3) A quelle condition sur les (c_i) M est-elle diagonalisable ?

1) $$M = \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & \cdots & c_1c_n \\ c_2c_1 & c_2^2 & \cdots & c_2c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_nc_1 & c_nc_2 & \cdots & c_n^2 \end{pmatrix}$$

On note $C_1, \dots, C_n$ les n colonnes de M.
On remarque alors :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_i C_j = c_j C_i$

1er cas : $\forall i \in [\![1,n]\!], c_i = 0$. Alors $M = 0$ et $rg(M) = 0$

2nd cas : $\exists i_0 \in [\![1,n]\!], c_{i_0} \neq 0_{\mathbb{R}}$ Alors :
- $C_{i_0} \neq 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})}$ car $c_{i_0}^2 \neq 0_{\mathbb{R}}$
- $\forall j \in [\![1,n]\!], j \neq i_0, \quad C_{i_0} = \frac{c_j}{c_{i_0}} C_i$

Donc $rg(M) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)) = 1$

2) Dans tous les cas : $rg(M) \leq 1$.
Donc d'après le théorème du rang :
$$\dim(E_0) = \dim(\mathrm{Ker}(M)) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) - rg(M) \geq n-1$$

De plus, la multiplicité d'une valeur propre étant supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre associé, on a :
$$\mathrm{mult}(0, \chi_M) \geq n-1 \Rightarrow X^{n-1} \mid \chi_M$$

Ainsi, puisque χ_M est unitaire de degré n :
$$\exists\, a \in \mathbb{R},\ \chi_M = X^{n-1}(X-a) = X^n - aX^{n-1}$$

Or, on sait que :
$$[\chi_M]_{n-1} = -\mathrm{Tr}(M)$$
Donc :
$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = a$$

On en conclut : $\boxed{\chi_M = X^{n-1}\left(X - \sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)}$

3) $\underline{1^{er} \text{ cas} : \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 0}$
Alors :
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ c_i = 0$$
$\Rightarrow M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
$\Rightarrow M$ est diagonalisable car diagonale.

$\underline{2^{nd} \text{ cas} : a = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0}$

Alors a est valeur propre de multiplicité 1.
Donc, puisque $1 \leq \dim(E_a) \leq \mathrm{mult}(\chi_M, a) = 1$, $\dim(E_a) + \dim(E_0) = n = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$. Donc M est diagonalisable.
Pour conclure, $\underline{M \text{ est toujours diagonalisable}}$.

Julien

Exercice de Khôlle
Khôlle n° 13.

On pose $f : \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{array} \right.$

f est-elle diagonalisable ?

On pose $B = \mathcal{C}an_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$= (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

On a alors :

$f(E_{11}) = E_{12}$; $f(E_{12}) = E_{21}$; $f(E_{21}) = E_{22}$; $f(E_{22}) = E_{12}$

d'où :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /E_{11} \\ /E_{12} \\ /E_{21} \\ /E_{22} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(E_{11}) & f(E_{12}) & f(E_{21}) & f(E_{22}) \end{array} & \end{array} = M$$

On calcule ainsi χ_f :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\chi_f(\lambda) = |\lambda I_3 - M| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & -1 \\ \lambda-1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda-1 & -1 & \lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4.$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \\ \lambda+1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1+C_4.$$

$$= (\lambda-1) \cdot (-1)^{4+1}(-1)\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \\ \lambda+1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$ (on développe selon la première ligne)

$$= (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ \lambda+1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1+C_2$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$$ (On développe selon la première colonne)

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+i)(\lambda-i)$$ (scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$).

Ainsi, χ_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$, car χ_f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Margaux

Exercice 6. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u.

1. u possède-t-il des valeurs propres?
2. Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Montrer que la matrice de u dans la base $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est indépendante du choix de x.

1) Si u admettait une valeur propre λ alors $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(\lambda id_E - u)$ serait un sous-espace vectoriel de E stable par u, or E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u. Donc <u>u n'admet pas de valeurs propres</u>.

2) On a $\#(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) = n = \dim(E)$. Reste à montrer que la famille est libre. Raisonnons par l'absurde en supposant la famille liée.

Alors il existe $p \leq n-1$ ainsi que $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$u^p(x) = a_0 x + \ldots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$ (*)

Soit $y \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$. Alors il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $y = \lambda_0 x + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x)$

Donc $u(y) = \lambda_0 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, \ldots, u^{p-1}(x))$ d'après (*)

et donc $\mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est stable par u. ↯

Donc la famille est libre. C'est donc <u>une base</u>.

3) Soient $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$u^n(x) = b_0 x + \ldots + b_{n-1} u^{n-1}(x)$

$$\mathrm{Mat}_{(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))}(u) = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} u(x) & u^2(x) \ldots & u^n(x) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & & 0 & b_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} x \\ u(x) \\ \vdots \\ u^{n-1}(x) \end{array} \end{array}$$

Par ailleurs, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$,

$u^n(u^i(x)) = b_0 u^i(x) + b_1 u(u^i(x)) + \ldots + b_{n-1} u^{n-1}(u^i(x))$

Comme $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, $\forall y \in E$,

$u^n(y) = b_0 y + \dots + b_{n-1} u^{n-1}(y)$

et donc on a

$$\mathrm{Mat}_{(y,\, u(y), \dots,\, u^{n-1}(y))}(u) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(y) & u^2(y) & \cdots & u^n(y) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & \ddots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix} & \begin{matrix} y \\ u(y) \\ \vdots \\ u^{n-1}(y) \end{matrix} \end{array}$$

Clarisse
Semaine 13

Exercice 3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que p^2 est un projecteur de E un $\mathbb{K}$−e.v. de dimension $n \geq 1$.

1. Déterminer les valeurs propres possibles pour p.
2. Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

1) $p \in \mathcal{L}(E)$, tel que p^2 est un projecteur, c'est à dire

$$p^2 = p^4 \Rightarrow p^4 - p^2 = id_E$$

$Q(X) = X^4 - X^2 = 0$ est un polynôme annulateur de p

$$Q(X) = X^2(X^2-1) \qquad Spec_{\mathbb{R}}(Q) = \{0, 1, -1\}$$

$$Spec_{\mathbb{C}}(Q) = \{0, 1, -1\}$$

or $Spec(p) \subset \{0, -1, 1\}$

Les valeurs propres possibles pour p sont donc 0, 1 et -1

2) Montrons que p est diagonalisable $\Longleftrightarrow p^3 = p$

p est diagonalisable, alors $\exists$ B une base de E, tel que

$Mat_B(p)$ est diagonale

$$\Leftrightarrow Mat_B(p) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \ddots \ 0}^{m_0} & & 0 \\ & \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{m_1} & \\ 0 & & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{m_{-1}} \end{pmatrix}$$

avec m_0, m_1, m_{-1} les multiplicités respectives de 0, 1 et -1

$$\text{or } (Mat_B(p))^3 = \begin{pmatrix} 0^3 & & & & \\ & \ddots \ 0^3 & & & \\ & & 1^3 \ \ddots \ 1^3 & & \\ & & & (-1)^3 \ \ddots & \\ & & & & (-1)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots \ 0 & & \\ & & 1 \ \ddots \ 1 & \\ 0 & & & -1 \ \ddots \ -1 \end{pmatrix}$$

on a $\left(\mathrm{Mat}_B(p)\right)^3 = \mathrm{Mat}_B(p)$

$\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(p^3) = \mathrm{Mat}_B(p)$

$\Leftrightarrow p^3 = p$

Rose

Colle S13

L 14/12/20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $rg(A) = 1$.

1) Montrer que A est semblable à une matrice dont seule la dernière colonne est non nulle.

2) En déduire que $A^2 = Tr(A).A$ et exprimer $\det(I_n + A)$ en fonction de $Tr(A)$.

3) Caractériser les matrices diagonalisables de rang 1.

1) Soit $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$

En notant $B_0 = Can(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, on a : $Mat_{B_0}(\varphi) = A$.

Comme $\underset{\underset{rg(\varphi)}{\parallel}}{rg(A)} = 1$, on a par le théorème du rang :

$\dim(Ker(\varphi)) = n-1$.

Soit B' une base de $Ker(\varphi)$

Par le théorème de la base incomplète, il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $B = B' \# X_0$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et on a :

$$Mat_B(\varphi) = \begin{array}{c} \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & - & 0 \\ | & & | \\ 0 & - & 0 \end{matrix}}_{\varphi(B')} \; \underbrace{\begin{matrix} * \\ | \\ * \end{matrix}}_{\varphi(X_0)} \right) \end{array} \begin{matrix} /B' \\ /X_0 \end{matrix} = B$$

Par théorème de changement de bases :

$$\underbrace{Mat_{B_0}(\varphi)}_{A} = \underbrace{P_{B_0 \to B}}_{= P \in GL_n(\mathbb{K})} \underbrace{Mat_B(\varphi)}_{B} . \underbrace{P_{B \to B_0}}_{P^{-1}}$$

D'où A est semblable à B dont seule la dernière colonne est non nulle.

2) $Tr(A) = Tr(B)$

Notons $\varphi(X_0) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la dernière colonne de B.

Ainsi $x_n = Tr(B) = Tr(A)$.

$$A^2 = P.B\underbrace{P^{-1}.P}_{=I_n}.B\,P^{-1} = P.B^2.P^{-1}$$

Or $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} = x_n \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} = x_n.B$

D'où $A^2 = P.\,Tr(A)\,B\,P^{-1}$

$\iff \underline{A^2 = Tr(A).A}$

Et $\underline{det(I_n+A)} = det(P.P^{-1} + P.B.P^{-1})$

$= det(P(I_n+B)P^{-1})$

$= det(P)\,det(I_n+B).\frac{1}{det(P)}$

$= det(I_n+B)$

$= \begin{vmatrix} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_{n-1} \\ 0 & & & 1+x_n \end{vmatrix}$

$= 1+x_n$

$= \underline{1+Tr(A)}$

3) Ainsi toute matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une autre matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont seule la dernière colonne est non nulle

. Si $Tr(A)=0$, alors 0 est l'unique valeur propre de B et donc de A (valeur propre de rang n)

Ainsi : A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ $\iff A = 0.I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

Comme A est semblable à $B \neq 0$, A n'est pas diagonalisable.

. Si $Tr(A) \neq 0$, 0 est valeur propre de rang $n-1$ et $Tr(A)$ est valeur propre de rang 1 ie $dim(E_0(A)) + dim(E_{Tr(A)}(A)) = n$

Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Ainsi, les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables si et seulement si $Tr(A) \neq 0$.

MaPaurie

Colle semaine 13

Énoncé :

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et ϕ l'endomorphisme de E qui à une suite (U_n) associe la suite (V_n) définie par $V_0 = U_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $V_n = \frac{U_n + U_{n-1}}{2}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ

Résolution :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $(\mathcal{E}_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \phi((U_n)) = \lambda (U_n) \\ (U_n) \in E \end{array} \right.$.

Ainsi, on peut réécrire : $(\mathcal{E}_\lambda) \left\{ \begin{array}{ll} \lambda U_0 = U_0 & (1) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \lambda U_n = \frac{U_n - U_{n-1}}{2} & (2) \\ (U_n) \in E & \end{array} \right.$

$(1) \Rightarrow \lambda = 1$ ou $U_0 = 0$.

<u>1er cas</u> : $\lambda = 1$

$(2) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{U_n - U_{n-1}}{2}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = -U_{n-1}$.

(U_n) est une suite géométrique de raison -1.

Par le cours sur les suites géométriques on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (-1)^n U_0$

Finalement, $Sol_{\mathcal{E}_1} = \{(U_n) \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (-1)^n a$, avec $a \in \mathbb{R}\}$.

$Sol_{\mathcal{E}_1} \neq \{0_E\}$, on en déduit que 1 est valeur propre et $E_1(\phi) = Sol_{\mathcal{E}_1}$.

<u>2ème cas</u> : $U_0 = 0$

$(2) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda U_n = \frac{U_n - U_{n-1}}{2}$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(2\lambda - 1) = -U_{n-1}$

<u>1er sous-cas</u> : $\lambda = \frac{1}{2}$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n-1} = 0 \Rightarrow (U_n) = (0_E)$

Ainsi, $Sol_{\mathcal{E}_{1/2}} = \{0_E\}$ donc $\frac{1}{2}$ n'est pas valeur propre de ϕ

2ème sous-cas : $\lambda \neq \frac{1}{2}$ (On rappelle que $U_0 = 0$ et $\lambda \neq 1$)

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \underbrace{(2\lambda - 1)}_{\neq 0_{\mathbb{K}}} = -U_{n-1}$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{U_{n-1}}{(1-2\lambda)}$

Ainsi, (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{(1-2\lambda)}$.

Par le cours sur les suites géométriques, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$U_n = \left(\frac{1}{1-2\lambda}\right)^n U_0$.

Or, dans ce cas $U_0 = 0$ d'où $(U_n) = (0_E)$.

D'où, $Sol_{E_\lambda} = \{0_E\}$ pour $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

Conclusion :

* 1 est l'unique valeur propre de ϕ.

* Le sous-espace propre associé est Sol_{E_1}.

Enoncé : On note pour tout $a \in \mathbb{R}$, $H(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels $H(a)$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

Soit pour tout $a \in \mathbb{R}$, $H(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

On calcul le polynôme caractéristique de H :

$$\chi_H(a) = \det(\lambda I_n - H(a))$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -a \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-a)$$

On a donc $Spec_{\mathbb{K}}(H) = \{1, 2, a\}$

On étudie les valeurs de a.

* 1er cas : Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$. Dans ce cas H a trois valeurs propres 2 à 2 distinctes et ainsi comme $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{3} E_{\lambda_i}(H)\right) = 3 = \dim(M_{3,1}(\mathbb{R}))$ on a que H est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

* 2ème cas : si $a = 1$, $\chi_H = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ et H s'écrit $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans ce cas, Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(I_3 - H) \Leftrightarrow (I_3 - H)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ -y = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$\iff y = z = 0$

Donc $\mathrm{Ker}(I_3 - M) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$

Or, $\dim(\mathrm{Ker}(I_3 - M)) = 1 \neq m_1 = 2$

Donc dans ce cas, M n'est pas diagonalisable.

3ème cas : Si $a = 2$, $\chi_M = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ et M s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(2I_3 - M) \iff (2I_3 - M)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ \cancel{0 = 0} \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(2I_3 - M) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, 1))$

Or, $\dim(\mathrm{Ker}(2I_3 - M)) = 2 = m_2$

Et ainsi, M est diagonalisable.

Laetitia

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer l'ensemble des matrices M carrées d'ordre n et à coefficients réels telles que :

$$M^5 = M^2 \text{ et } tr(M) = n$$

On note M une telle matrice.

1. Déterminer les valeurs propres éventuelles de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire M.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M^5 = M^2$ et $Tr(M) = n$

$\lambda \in Spec(M) \Rightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, et $MX = \lambda X$

On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n X = \lambda^n X$.

(I) $n = 0$. $M^0 X = I_n X = X$

$\lambda^0 X = 1X = X$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $M^n X = \lambda^n X$

Alors $M^{n+1} X = M^n (MX) = M^n(\lambda X) = \lambda M^n X = \lambda^{n+1} X$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n X = \lambda^n X$

En particulier

$M^5 X - M^2 X = \lambda^5 X - \lambda^2 X$

$\Rightarrow (M^5 - M^2) X = (\lambda^5 - \lambda^2) X$

$\Rightarrow 0 = (\lambda^5 - \lambda^2) . X$

Or $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \Rightarrow \lambda^5 - \lambda^2 = 0$ (i.e $P(\lambda) = 0$)

D'où $\lambda^2(\lambda^3 - 1) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda - \bar{j}) = 0$

Ainsi, $Spec_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0, 1, j, \bar{j}\}$

2. On en déduit que $\chi_M = X^{m_0}(X-1)^{m_1}(X-j)^{m_j}(X-\bar{j})^{m_{\bar{j}}}$, avec m_0, m_1, m_j et $m_{\bar{j}}$ les multiplicités respectives de 0, 1, j et $\bar{j}$

Or $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \chi_M \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow m_j = m_{\bar{j}}$

On a alors : $\begin{cases} m_0 + m_1 + 2m_j = n \\ 0 m_0 + 1 m_1 + (j + \bar{j}) . m_j = Tr(M) = n \end{cases}$

Or $j + \bar{j} = 2 \, Re(j) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

D'où $\begin{cases} m_0 + m_1 + 2m_j = n \\ m_1 - m_j = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 + m_1 + 2m_j = n \\ m_1 = n + m_j \end{cases}$

On obtient alors $m_0 + (n + m_j) + 2m_j = n$.

$\Rightarrow m_0 + 3m_j = 0$

$\Rightarrow m_0 = m_j = 0$ car $m_0 \geq 0$ et $m_j \geq 0$

Finalement, $m_1 = n$

D'où $\chi_\Pi = (X-1)^n$ et 0, j et $\bar{j}$ ne sont pas valeurs propres de Π

Or $\lambda \in Spec_{\mathbb{R}}(\Pi) \Leftrightarrow \det(\Pi - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \Pi - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{R})$

Par conséquent, comme 0, j et $\bar{j}$ ne sont pas valeurs propres de Π, $\begin{cases} \Pi \in GL_n(\mathbb{R}) \\ \Pi - jI_n \in GL_n(\mathbb{R}) \\ \Pi - \bar{j}I_n \in GL_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

Ainsi

$\Pi^5 - \Pi^2 = 0 \Rightarrow \Pi^2(\Pi^3 - I_n) = 0$

$\Rightarrow \Pi^2(\Pi - I_n)(\Pi - jI_n)(\Pi - \bar{j}I_n) = 0$

On multiplie 2 fois par Π^{-1} à gauche :

$(\Pi - I_n)(\Pi - jI_n)(\Pi - \bar{j}I_n) = 0$

On multiplie à droite par $(\Pi - \bar{j}I_n)^{-1}$, puis par $(\Pi - jI_n)^{-1}$. On obtient finalement

$\Pi - I_n = 0 \Rightarrow \Pi = I_n$

On vérifie alors

. $tr(I_n) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

. $I_n^5 - I_n^2 = I_n - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

I_n appartient donc à l'ensemble donné.

Finalement

$\Pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tel que $\Pi^5 = \Pi^2$ et $tr(\Pi) = n \Leftrightarrow \Pi = I_n$

Pauline

Énoncé :

On définit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1- La matrice A est-elle diagonalisable ?

2- Calculer explicitement exp(A) défini par :

$$\exp(A) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

1) On détermine le polynôme caractéristique.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & 2 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & 2 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)\left((\lambda+3)(\lambda-3) + 8\right)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

$\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$.

. $E_1(A) = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = X \}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \in E_1(A) \Leftrightarrow AX = X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 2z = x \\ -3y - 2z = y \\ 4y + 3z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2y + z = 0 \quad \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} z.$

Ainsi: $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_2}\right)$

Ainsi: $\dim(E_1) = 2 = m_1.$

- $E_{-1}(A) = \{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = -X \}.$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow AX = -X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 2z = -x \\ -3y - 2z = -y \\ 4y + 3z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ 4y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y = -z. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z. \end{cases}$$

Ainsi: $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_3}\right)$

Ainsi : $\dim(E_{-1}) = 1 = m_{-1}$.

Ainsi, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\dim(E_1) = m_1$, $\dim(E_{-1}) = m_{-1}$, A est diagonalisable.

2) A étant diagonalisable, il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que :

$$A = P D P^{-1}.$$

Soit $B = (f_1, f_2, f_3)$ une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

. $D = \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, avec u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

car : $u(f_1) = 1 f_1$, $u(f_2) = 1 . f_2$ et $u(f_3) = -1 . f_3$

$$. P_{B_0 \to B} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /{}^te_1 \\ /{}^te_2 \\ /{}^te_3 \end{array} \end{array}$$

car : $\begin{cases} f_1 = 1 . {}^te_1 + 0 . {}^te_2 + 0 . {}^te_3 \\ f_2 = 0 . {}^te_1 - \frac{1}{2} . {}^te_2 + 1 . {}^te_3 . \\ f_3 = 1 . {}^te_1 - 1 . {}^te_2 + 1 . {}^te_3 . \end{cases}$

$$. P^{-1} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} {}^te_1 & {}^te_2 & {}^te_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /f_1 \\ /f_2 \\ /f_3 \end{array} \end{array}$$

car $\quad {}^te_1 = 1 . f_1 + 0 . f_2 + 0 . f_3$
$\quad {}^te_2 = 2 . f_1 + 2 . f_2 - 2 . f_3$
$\quad {}^te_3 = 1 . f_1 + 2 . f_2 - 1 . f_3 .$

Ainsi : $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P D^k P^{-1}}{k!}$

par récurrence, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P D^k P^{-1}$.

$$= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1}.$$

$$= P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$= P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$= \begin{pmatrix} e & 2e - 2e^{-1} & e - e^{-1} \\ 0 & 2e^{-1} - e & e^{-1} - e \\ 0 & 2e - 2e^{-1} & 2e - e^{-1}. \end{pmatrix}$$