Pierre

Exercice 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $(X-2)^2$.

D'après le théorème de la division euclidienne il existe un unique $\begin{cases}(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2, \\ \deg(R) < \deg(X-2)^2 = 2\end{cases}$

Ainsi, $\deg(R)$ est, au maximum ~~de~~ 1.
On peut alors poser $R = AX + B$ avec $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On a alors :

$$(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2 = (X-2)^2 Q + R$$

ie : $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2 = (X-2)^2 Q + AX + B$.

On évalue en $X = 2$:

$$(-1)^{2n} + 0 - 2 = 0 + A.2 + B$$

ie $2A + B = -1$. $(*)$

On remarque que 2 est racine double de $(X-2)^2$
On dérive, on a :

$$2n(X-3)^{2n-1} + n(X-2)^{n-1} = 2(X-2)Q + (X-2)^2 Q' + A.$$

On évalue en $X = 2$:
$2n(-1)^{2n-1} = A$

$$(*) \Rightarrow \quad 2 \cdot 2n(-1)^{2n-1} + B = -1$$
$$\Rightarrow \quad B = -1 - 4n(-1)^{2n-1}$$

$$\Rightarrow \quad R = AX + B$$
$$= \left(2n(-1)^{2n-1}\right) X + \left(-1 - 4n(-1)^{2n-1}\right)$$
$$= (-1)\left(2n(-1)^{2n-2} X + \underline{1} - 4n(-1)^{2n}\right)$$
$$= (-1)(2nX + 1 - 4n)$$
$$= 2n(-X + 2n) - \underline{1} \quad .$$

Bilal

Exercice 7 ★★★

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer alors que :

$$P \text{ est de signe constant positif } \Leftrightarrow \exists\,(U,V) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = U^2 + V^2$$

On procède par double-implication :

($\Leftarrow$) Immédiat en tant que somme de carrés

($\Rightarrow$) Supposons P de signe constant positif

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) = n$, on ne traite pas le cas où $\deg(P) = -\infty$, car on aurait $P = 0_{\mathbb{R}[X]}^2 + 0_{\mathbb{R}[X]}^2$.

On remarque que si n est impair, $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ $\underset{\text{dom}(P) \geqslant 0}{\wedge}$

On en déduit qu'il est nécessaire que le degré de P soit pair pour qu'il puisse être constant positif.

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

I) pour $n = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $P = \lambda$.

Il vient : $P = (\sqrt{\lambda})^2 + 0_{\mathbb{R}[X]}^2$. La propriété est vraie au rang 0.

H) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la propriété est vraie pour un degré de $2n$.

Montrons la propriété pour $\begin{cases} P \in \mathbb{R}[X] \\ \deg(P) = 2n + 2. \end{cases}$

En particulier, $P \in \mathbb{C}[X]$. D'après le théorème de d'Alembert Gauss, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $(X-\alpha) \mid P$.

On distingue les cas sur α :

- si $\alpha \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, alors $(X-\bar{\alpha}) \mid P$ et donc, $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) \mid P$.

Or, $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) = (X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$
$= (X-\mathrm{Re}(\alpha))^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2$

On effectue la division euclidienne de P par $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$.

$$\exists (Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2, \begin{cases} P = (X-\alpha)(X-\bar{\alpha})Q + R \\ \deg(R) \leq 1. \end{cases}$$

or, $R(\alpha) = R(\bar{\alpha}) = 0$, ainsi R s'annule plus de fois que son degré.
On en déduit que $R = 0$.

Ainsi, $P = (X-\alpha)(X-\bar{\alpha})Q = ((X-\mathrm{Re}(\alpha))^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2)Q$.

On remarque que P et $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ sont de signe constant positif, donc Q l'est aussi nécessairement.

Par analyse de degrés, $\deg(Q) = 2n$. On applique l'hypothèse de récurrence sur Q.

$$\exists (U,V) \in \mathbb{R}[X]^2, \ Q = U^2 + V^2$$

Donc, $P = (X-\mathrm{Re}(\alpha))^2U^2 + (X-\mathrm{Re}(\alpha))^2V^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2U^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2V^2$.

En posant $U' = (X-\mathrm{Re}(\alpha))^2(U^2+V^2)$ et $V' = \mathrm{Im}(\alpha)^2(U^2+V^2)$, nous vérifions la propriété au rang $2n+2$.

• si $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)B$.

Supposons par l'absurde $B(\alpha) \neq 0$.

Quand $X \to \alpha^-$, $X-\alpha < 0$ donc $B < 0$
$X \to \alpha^+$, $X - \alpha > 0$ donc $B > 0$.

Si $B(\alpha) \neq 0$, on obtient donc que B n'est pas continu en α, ce qui est absurde.

Donc $(X-\alpha) \mid B$. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^2 Q$.

Par analyse des degrés, $\deg(Q) = 2n$. On applique alors l'hypothèse de récurrence sur Q :

$\exists (U,V) \in \mathbb{R}[X]^2,\ Q = U^2 + V^2$.

Il vient : $P = (X-\alpha)^2 U^2 + (X-\alpha)^2 V^2$.

Donc la propriété est encore vraie au rang $2n+2$.

c) Finalement, par principe de récurrence :

$$\boxed{\begin{array}{l} P \in \mathbb{R}[X] \text{ est de signe constant positif} \\ \qquad \Leftrightarrow \exists (U,V) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = U^2 + V^2 \end{array}}$$.

Görgülü
Erem

Exercice 2. Montrer que X^2+X+1 divise $X^{3n+2}+X^{3m+1}+X^{3p}$ pour tous $n, m, p \in \mathbb{N}$.

Le polynôme X^2+X+1 admet j et $\bar{j}$ comme racines, par conséquent on a :
$$X^2+X+1 = (X-j)(X-\bar{j})$$

Ainsi, $(X-j)(X-\bar{j})$ divise le polynôme $X^{3n+2}+X^{3m+1}+X^{3p}$ (où $n, m, p \in \mathbb{N}$), si le polynôme admet j et $\bar{j}$ pour racine.

Or $j^{3n+2}+j^{3m+1}+j^{3p} = (j^3)^m j^2 + (j^3)^m j + (j^3)^p$
$$= j^2+j+1 = 0$$

De plus le polynôme étant à coefficients réels, $\bar{j}$ est nécessairement racine et par conséquent factorisable par X^2+X+1

finalement $X^2+X+1 \mid X^{3n+2}+X^{3m+1}+X^{3p}$ (n, m et $p \in \mathbb{N}$)

Mathilde

Montrer que $\cos(\frac{\pi}{9})$ est irrationnel.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

• $\cos(3x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$

$= (\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x))\cos(x)$

$- (\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x))\sin(x)$

$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

• On sait que $\cos(3 \times \frac{\pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = 4\cos^3(\frac{\pi}{9}) - 3\cos(\frac{\pi}{9})$

• On pose $X = \cos(\frac{\pi}{9})$ et on résout l'équation :

$4X^3 - 3X = \frac{1}{2}$ ou $8X^3 - 3X = 1$

Par l'absurde, on suppose X rationnel et donc il existe $Q, P \in \mathbb{R}$, $Q \wedge P = 1$ tel que $X = \frac{Q}{P}$.

On a alors :

$8(\frac{P}{Q})^3 - 6(\frac{P}{Q}) = 1$

d'où $Q^3 = 8P^3 - 6PQ^2 = P(8P^2 - 6Q^2)$ donc $P \mid Q^3$ mais $P \wedge Q = 1$ donc $P = 1$. Cela implique :

$Q^3 = 8 - 6Q^2$

Soit $Q^3 + 6Q^2 - 8 = 0$

$Q = 1/\cos(\frac{\pi}{9})$ donc on a forcément $Q > 0$ (ie dans le premier quart du cercle trigo). Par $Q \geq 2$, on a $6Q^2 + Q^3 - 8 > 0$ et par $Q = 1$ on obtient -1 donc il n'existe pas de solution entière positive donc on a $X = \pm 1$ ce qui contredit

$-1 < \cos(\frac{\pi}{9}) < 1$ donc $\cos(\frac{\pi}{9})$ est irrationnel.

Margaux

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième polynôme de Legendre par : $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}((X^2-1)^n)^{(n)}$ (2)

1) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$$

2) En déduire que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $]-1,1[$.

4) Considérons Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Montrer que
$$\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,dt = 0$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}((X-1)^n(X+1)^n)^{(n)}$$

D'après la formule de Leibniz :
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(X-1)^n\right]^{(k)}\left[(X+1)^n\right]^{(n-k)}$$
$$= \frac{1}{2^n \cancel{n!}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-k)!}}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{\cancel{k!}}(X+1)^k$$
$$= \boxed{\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k} \quad (1)$$

2) D'après (1), $\operatorname{dom}(L_n(X)) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

D'après (2),
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}(X^{2n}+\dots)^{(n)}$$
$$= \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{(2n)!}{n!}X^n+\dots\right)$$

et donc $\operatorname{dom}(L_n(X)) = \frac{(2n)!}{2^n n!^2}$

Par unicité de l'écriture polynômiale,

$$\frac{(2n)!}{2^n n!^2} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n(X) = (X^2-1)^n$.

On pose $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{P}_k$: " $P_n^{(k)}$ possède k racines distinctes dans $]-1;1[$ ".

· Initialisation : pour $k=0$

$P_n^{(0)}(X) = P_n(X) = (X^2-1)^n$ admet comme racines 1 et -1 donc admet 0 racines distinctes dans $]-1,1[$.

donc $\mathcal{P}_0$ vraie.

· Hérédité

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $P_n^{(k)}$ possède k racines distinctes dans $]-1;1[$ notées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ avec $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\alpha_i \in]-1,1[$. Ainsi,

$P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(\alpha_1) = \dots = P_n^{(k)}(\alpha_k) = P_n^{(k)}(1) = 0$

Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_0 \in]-1,\alpha_1[$, $\beta_k \in]\alpha_k, 1[$ et $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$, $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tels que $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $P_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$ et donc $P_n^{(k+1)}$ possède $k+1$ racines distinctes dans $]-1;1[$ donc $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie.

Ce qui achève la récurrence.

Ainsi, $P_n^{(n)}$ possède n racines distinctes comprises entre -1 et 1. Or $\deg(P_n^{(n)}) = n$, il n'y a donc pas d'autres racines. On en déduit :

$L_n(X) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \in]-1,1[$, racines de L_n distinctes.

4) $\int_{-1}^{1} L_n(t) Q(t) dt = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(t) Q(t) dt$

(IPP, les fcts étant $\mathcal{C}^1$) $= \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} \left(\underbrace{[P_n^{(n-1)}(t) Q(t)]_{-1}^{1}}_{0 \text{ comme } 1 \text{ et } -1 \text{ racines de } P_n^{(n-1)}} - \int_{-1}^{1} P_n^{(n-1)}(t) Q'(t) dt \right)$

$= -\frac{\binom{2n}{n}}{2^n} \int_{-1}^{1} P_n^{(n-1)}(t) Q'(t) dt.$

Margaux (suite)

En itérant le processus, on a $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,dt = (-1)^k \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)}(t)\,Q^{(k)}(t)\,dt$$

donc pour $k = n-1$,

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,dt = (-1)^{n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} \int_{-1}^{1} P_n'(t)\,\underbrace{Q^{(n-1)}}_{= \text{cste car } d^\circ Q \leq n-1}(t)\,dt$$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $Q^{(n-1)}(t) = \lambda$ et ainsi,

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,dt = (-1)^{n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} \lambda \left[P_n(t)\right]_{-1}^{1} = 0$$

Bastien

Ennoncé : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifie :

$$P(a) > 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ P^{(k)}(a) \geq 0$$

Demontrer que le polynôme P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

Solution :

D'après la formule de Taylor exacte on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

On on a $P(a) > 0$ donc a n'est pas racine de P.

Soit $b \in [a, +\infty[$,

$$P(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k$$

$$= P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k$$

On $P(a) > 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P^{(k)}(a) \geq 0$

D'où $$P(b) = \underbrace{P(a)}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k}_{\geq 0} > 0$$

Ainsi P ne possède pas de racine dans $[a, +\infty[$.

David

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, quelle est la multiplicité de 1 pour le polynôme $P = X^n - X^{n-1} - X + 1$?

On remarque que $P(1) = 0$
donc $\underline{Mult(1, P) \geq 1}$

* $P' = nX^{n-1} - (n-1)X^{n-2} - 1$

Or, $P'(1) = n - n + 1 - 1 = 0$
donc $\underline{Mult(1, P) \geq 2}$

* $P^{(2)} = n(n-1)X^{n-2} - (n-1)(n-2)X^{n-3}$

Or, $P^{(2)}(1) = n(n-1) - (n-1)(n-2)$
$P^{(2)}(1) = 2(n-1) \neq 0$

Ainsi $\underline{Mult(1, P) = 2}$

Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$ pour $n \geq 2$.

En appliquant le théorème de la division euclidienne
$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} X^n = Q(\underbrace{X^2 - X - 2}_{B}) + R & (1) \\ \deg(R) < \deg(B) & (2) \end{cases}$

Par (2), $\deg(R) < 2$ donc
$\underline{R = aX + b}$, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$

Or, les racines de $(X^2 - X - 2) = (X+1)(X-2)$ sont -1 et 2. D'où le système avec (1) :

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2^n = 2a + b \\ (-1)^n = -a + b \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} a = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \\ (-1)^n = -a + b \end{cases}$

Ainsi, $a = \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$ et $b = (-1)^n + \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$

Finalement, $\underline{R = \left(\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}\right) X + (-1)^n + \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}}$

Ryan

Scinder $P = X^8+1$ dans $\mathbb{C}[X]$, en déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes de degré 2.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que,

$$P(z) = 0$$
$$z^8 + 1 = 0$$
$$z^8 = -1$$
$$z^8 = e^{i\pi}$$
$$z^8 = (e^{i\frac{\pi}{8}})^8$$

$$\left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^8 = 1$$

Ainsi $\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{8}}} \in \mathbb{U}_8 = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{8}}, k \in [\![0,7]\!] \right\}$.

Ainsi, $\exists k \in [\![0,7]\!]$, $\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{8}}} = e^{i\frac{2k\pi}{8}}$

$\Rightarrow \exists k \in [\![0,7]\!]$, $z = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{8}}$.

$\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P) = \left\{ e^{i(2k+1)\frac{\pi}{8}}, k \in [\![0,7]\!] \right\}$.

Alors, $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = Q \prod_{k=0}^{7} (X - e^{i\frac{\pi}{8}(2k+1)}).$$

En analysant le degré, $Q \in \mathbb{K}_0[X]$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tq $Q = \lambda$
en analysant les coefficients dominants, $\lambda = 1$.

Finalement, $\underline{X^6+1 = \prod_{k=0}^{7} \left(X - e^{i(2k+1)\frac{\pi}{8}}\right)}$.

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P) = \left\{ e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{3\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{7\pi}{8}}, \underset{e^{-i\frac{7\pi}{8}}}{\underset{\parallel}{e^{i\frac{9\pi}{8}}}}, \underset{e^{-i\frac{5\pi}{8}}}{\underset{\parallel}{e^{i\frac{11\pi}{8}}}}, \underset{e^{-i\frac{3\pi}{8}}}{\underset{\parallel}{e^{i\frac{13\pi}{8}}}}, \underset{e^{-i\frac{\pi}{8}}}{e^{i\frac{15\pi}{8}}} \right\},$$

Nous avons ainsi 8 racines, 2 à 2 conjuguées

$$\underline{X^6+1} = \prod_{k=0}^{3} \left(X - e^{i(2k+1)\frac{\pi}{8}}\right)\left(X - e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{8}}\right).$$

$$= \prod_{k=0}^{3} \left(X^2 - X\left(e^{i(2k+1)\frac{\pi}{8}} + e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{8}}\right) + e^{i0}\right)$$

$$\underline{= \prod_{k=0}^{3} \underbrace{\left(X^2 - 2X\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{8}\right) + 1\right)}_{\text{degré } 2 \text{, dans } \mathbb{R}[X]}}.$$

Exercice 4. Déterminer les racines du polynôme $8X^3-12X^2-2X+3$, sachant qu'elles sont en progression arithmétique.

Clara

On pose :

$P(X) = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$

Les racines sont en progression arithmétique donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha-k)=0$ et $P(\alpha+k) = 0$.

Il n'y a que 3 racines car $\deg P = 3$.

$P(X) = 8\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{3}{8}\right)$

On a donc $\alpha + (\alpha-k) + (\alpha+k) = +\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 3\alpha = +\frac{3}{2}$ d'où $\alpha = +\frac{1}{2}$

de plus, $\alpha(\alpha-k)(\alpha+k) = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^2-k^2) = \frac{3}{8}$

donc $k^2 = \dfrac{\frac{3}{8} - \alpha^3}{-\alpha} = 1$ donc $k = 1$ (ou -1)

et finalement on obtient $S = \left\{ -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right\}$

Mathias Banque d'exercices

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ telle que $P(X+a) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant.

Exercice 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-2)^{2n} + (X-1)^n + 1$ par $X^2 - 3X + 2$. où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$P(X+a) = P(X)$. ⊛

Montrons que $P \in \mathbb{C}_0[X]$.

(A) : Soit P vérifiant l'hypothèse. Comme $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ est solution de l'équation, on peut supposer $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} [P]_k X^k$; $P(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} [P]_k (X+a)^k$

En $X \leftarrow 0$: ⊛ nous livre : $P(0) = [P]_0 = P(a)$.

De plus, avec $X \leftarrow a$, on a : $P(2a) = P(a) = [P]_0$.

Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(na) = [P]_0$.

D'où : $P(na) - [P]_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{d^\circ P} [P]_k (na)^k = 0$.

Ainsi, $Q = \sum_{k=1}^{d^\circ P} [P]_k X^k$ possède une infinité de racines,

c'est le polynôme nul, i.e. $P = [P]_0 + Q = [P_0]$.

Avec $[P]_0 \in \mathbb{C}$.

D'où, $P \in \mathbb{C}_0[X]$.

(S) : Soit $P \in \mathbb{C}_0[X]$, ainsi : $P = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a bien : $P(X) = \lambda = P(X+a)$.

Par conséquent, $Sol_{⊛} = \{ P : P \in \mathbb{C}_0[X] \}$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n + 1$.

$B = X^2 - 3X + 2$. On cherche le reste de la division euclidienne de A par B. Par le théorème de la division euclidienne : $\exists ! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$, $\begin{cases} A = BQ + R \\ d^\circ R < d^\circ B \end{cases}$

Or, $d°B = 2$, ainsi : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $R = \alpha X + \beta$.

On remarque : $\begin{cases} A(1) = (-1)^{2n} + 1 = 2 \\ A(2) = 1^n + 1 = 2 \end{cases}$

De plus, $B = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$.

$$\begin{cases} 2 = A(1) = \underbrace{B(1)}_{=0}Q(1) + \alpha + \beta \\ 2 = A(2) = \underbrace{B(2)}_{=0}Q(2) + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 2 \end{cases} \overset{L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$

D'où, $R = 2$.

Maëva

Exercice de Colle semaine 11

HP

Énoncé : Scinder $P = X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes de degré 2.

Soit $P := X^8 + X^4 + 1$

Dans $\mathbb{C}[X]$.

On pose $x = X^4$. On résout alors $x^2 + x + 1 = 0$.

$\Delta = -3 < 0 \Rightarrow$ 2 racines complexes conjuguées.

$$x_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2\pi i}{3}} = \bar{j} \quad , \quad x_2 = \bar{x_1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = j$$

Donc $P = \left(x - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)\left(x - e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)$

En repassant à la puissance 4 :

$$P = \left(X^4 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)\left(X^4 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

Or, $e^{-\frac{i\pi}{6}}$ est racine évidente de P :

$$\left(\frac{X}{e^{-\frac{i\pi}{6}}}\right)^4 = 1 \Rightarrow \exists k \in [\![0,3]\!] \ , \ \frac{X}{e^{-\frac{i\pi}{6}}} = e^{\frac{i2k\pi}{4}}$$

D'où $X = e^{i\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi(3k-1)}{6}\right)}$, $k \in [\![0,3]\!]$

et de même, on a $X = e^{\pi i\left(\frac{3k+1}{6}\right)}$

Ainsi, $\forall k \in [\![0,3]\!]$, $e^{i\pi\left(\frac{3k-1}{6}\right)} \in \mathrm{Spect}_{\mathbb{C}}(P)$ et $e^{i\pi\left(\frac{3k+1}{6}\right)} \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P)$

Ainsi, $P = 1 \times \prod_{k=0}^{3}\left(X - e^{i\pi\left(\frac{3k-1}{6}\right)}\right)\left(X - e^{i\pi\left(\frac{3k+1}{6}\right)}\right)$

Ainsi $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P) = \left\{ e^{-\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi 5}{6}}, e^{\frac{i\pi}{6}}, \underbrace{e^{\frac{i2\pi}{3}}}_{j}, e^{\frac{i\pi 7}{6}}, e^{\frac{i\pi 5}{3}}, \underbrace{e^{\frac{i4\pi}{3}}}_{j} \right\}$

Dans $\mathbb{R}$ on a donc :

- $(X - j)(X - \bar{j}) = (X^2 + X + 1)$
- $(X - e^{-\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{i\pi}{6}}) = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)$
- $(X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i\pi}{3}}) = (X^2 - X + 1)$
- $(X - e^{\frac{5\pi}{6}i})(X - e^{\frac{i\pi 7}{6}}) = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

Ainsi, $P = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$

Valentin

Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P' | P$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' | P$

Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = P'Q$

or si $\deg(P) = n$ on a nécessairement $d°P = d°P' + d°Q$

$\Leftrightarrow n = n-1 + d°Q$

$\Rightarrow d°Q = 1$

Alors $\exists (a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $Q = aX + b$

$\Rightarrow P = (aX+b)P'$

$\Rightarrow P' - \frac{1}{aX+b} P = 0$

or sur $]-\infty ; \frac{-b}{a}[$, on a $P' \underbrace{- \frac{1}{aX+b}}_{a(t)} P = 0$

avec $\forall t \in]-\infty ; \frac{-b}{a}[$, $a(t) = -\frac{1}{aX+B}$ et ainsi $A(t) = -\frac{\ln(aX+b)}{a}$

De même sur $]-\frac{b}{a} ; +\infty[$.

On en déduit l'ensemble S des $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' | P$:

$$S = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(X) = \lambda(X + \frac{b}{a}),\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Exercice 1. On pose $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X$ et on définit la suite de polynômes (P_n) par $P_{n+1} = 2XP_n - P_n$. Calculer P_2, P_3, P_4. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.

Aissane $P_{n+1} = (2X-1)P_n$

$P_2(X) = (2X-1)X$

$P_3(X) = (2X-1)^2 X$

$P_4(X) = (2X-1)^3 X$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$P_n(X) = (2X-1)^{n-1} X$

$\deg(P_n) = \deg((2X-1)^{n-1}) + \deg(X) = n$

$\mathrm{Dom}(P_n) = \mathrm{Dom}((2X-1)^{n-1}) = 2^{n-1}$

Clarisse
MP

Exercice :

1. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$(coefficients **entiers**).
On suppose qu'il existe quatre entiers λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $P(\lambda_i) = 7$, pour tout entier $i \in [\![1\,;4]\!]$. distincts
Montrer que l'équation $P(n) = 14$ n'a pas de solution entière.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et a un réel tel que : $P(a) > 0$ et $\forall k \in [\![1\,;\deg(P)]\!] : P^{(k)}(a) \geqslant 0$.
Montrer que P n'a pas de racine dans $[a\,;+\infty[$.

1) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{Z}^4$, tel que $\forall i \in [\![1,4]\!]$
$P(\lambda i) = 7$

$\Rightarrow$ On pose $Q(x) = P(x) - 7$ $\quad Q \in \mathbb{Z}[x]$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad Q(\lambda i) = 0$

ie $Q(x) = Q_1(x) \prod_{i=1}^{4} (x - \lambda i) \quad Q_1 \in \mathbb{Z}[x]$

On suppose par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$P(n) = 14 \iff Q(n) + 7 = 14$$
$$\iff Q(n) = 7$$
$$\iff Q_1(n) \prod_{i=1}^{4} (n - \lambda i) = 7$$

Or $Q_1 \in \mathbb{Z}[x]$ donc $Q_1(n) \in \mathbb{Z}$.
De plus les λi étant distincts $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $(n - \lambda i)$ sont deux à deux distincts.
Or 7 ne peut pas être le produit de 5 nombres entiers dont au moins 4 sont distincts. Contradiction :
$P(n) = 14$ n'a pas de solution entière.

2) $P \in \mathbb{R}[x]$ $\quad d^{\circ}P \geq 1$ $\quad P(a) > 0 \quad a \in \mathbb{R}$,
Par la formule de Taylor on a :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Par l'absurde on suppose qu'il existe $\alpha \in [a, +\infty[$ tel que

$$P(\alpha) = 0 \iff \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (\alpha - a)^k = 0$$

$$\iff P(a) + \sum_{k=1}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (\alpha - a)^k = 0$$

$$\begin{cases} \text{or } P(a) > 0 \\ \text{et } \forall k \in [\![1, \deg(P)]\!], \ \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!} \geq 0 \\ \alpha \in [a, +\infty[\implies (\alpha - a) \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi, $P(a) + \sum_{k=1}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (\alpha - a)^k = 0$ est impossible

car somme d'un nombre strictement positif et de nombre positifs ne peuvent donner 0. Contradiction.

P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Pauline

Énoncé :

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P(X+1) = P(X)$.

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que : $\deg(P) \geq 1$ et $P(X+1) = P(X)$.

D'après d'Alembert-Gauß, P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, tel que : $P(\alpha) = 0$.
Or, $P(X) = P(X+1)$.
Ainsi : $P(\alpha+1) = 0$, $P(\alpha+2) = 0$ ...
Ainsi P a une infinité de racine, il s'agit du polynôme nul.
Donc, $\deg(P) = -\infty$. Contradiction avec les hypothèses.

Synthèse : Vérifions que les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 conviennent.

$P : X \mapsto \lambda \in \mathbb{C}$, convient.
En effet, $P(X) = P(X+1) = \lambda$.

Le polynôme nul convient également : $P(X) = P(X+1) = 0$.

Conclusion:

$$Sol = \{ P \in \mathbb{C}[X],\ \deg(P) \leq 0 \}$$

Laetitia

Enoncé

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, telque $d^oP \geq 1$
Mq $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto P(z) \end{array} \right.$ est surjective

2. Détermine tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$, tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$

3. Détermine tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$, tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, telque $d^oP \geq 1$.
Soit $z' \in \mathbb{C}$. On cherche à résoudre l'équation
$(E) : P(z) = z' \iff P(z) - z' = 0$
On note $Q = P - z'$. $d^oQ \geq 1$, donc d'après le théorème de D'Alembert Gauß, il existe $z \in \mathbb{C}$, tel que
$Q(z) = 0$
D'où f est surjective.

2. . Soit P un polynôme constant de $\mathbb{C}[X]$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que $P = \lambda$
Soit $z \in \mathbb{C}$. $P(z) = \lambda$. $P(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.
Les polynômes constants réels conviennent.
. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré supérieur ou égal à 1.
D'après la question 1, $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$
Supposons que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. Dans ce cas, $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ $\S$.
Finalements, les seuls polynômes solutions sont les polynômes constants réels.

3. On raisonne par analyse-synthèse.
(A). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
Dans ce cas, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow P(x) = \overline{P(x)}$
$= (P - \overline{P})(x) = 0$
Ainsi, le polynôme $P - \overline{P}$ admet une infinité

de racines, c'est donc le polynôme nul.

D'où $P = \overline{P}$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients de P.

Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \overline{a_n} \Rightarrow a_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

D'où $P \in \mathbb{R}[X]$

S Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $P(x) \in \mathbb{R}$

D'où $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Benjamin

Colle semaine n°11

$\boxed{\text{Déterminer les polynômes } P \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } P(X+1) = P(X)}$

- Les polynômes de $\mathbb{K}_0[X]$ conviennent.
- Par l'absurde, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant tel que $P(X+1) = P(X)$.

Par D'Alembert - Gauss, puisque $\deg(P) \geq 1$, P admet une constante complexe α.

Or, $P(\alpha) = 0 = P(\alpha + 1)$: $\alpha + 1$ est aussi racine de P. Par récurrence, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; P(\alpha + n) = 0$$

Donc P a une infinité de racines, c'est le polynôme nul : il y a contradiction.

On en déduit :

$$\boxed{\mathbb{K}_0[X] = \{ P \in \mathbb{K}[X], \; P(X+1) = P(X) \}}$$

$\boxed{\text{Déterminer les polynômes } P \in \mathbb{C}[X] \text{ tels que } P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}}$

- Les polynômes de $\mathbb{R}_0[X]$ conviennent.
- Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. ($\deg(P) \geq 1$)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $Q = P - z_0$ est de degré supérieur ou égal à 1 donc par le théorème de D'Alembert - Gauss :

$$\exists z \in \mathbb{C}, \; Q(z) = 0 \iff P(z) = z_0$$

Ainsi :

$$\forall z_0 \in \mathbb{C},\ \exists z \in \mathbb{C},\ P(z) = z_0$$

Avec $z_0 = i$:

$$\exists z \in \mathbb{C},\ P(z) = i$$

Or $P(z) \in \mathbb{R}$ par hypothèse : il y a contradiction.

On en conclut :

$$\boxed{\mathbb{R}_0[X] = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}\}}$$

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

Analyse :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad (a_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{C}^n,\ n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \overline{P(x)} = P(x)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

propriétés de la conjugaison et $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Par unicité de la décomposition dans $(1, X, \dots, X^n)$:

$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \overline{a_k} = a_k$, c'est-à-dire $a_k \in \mathbb{R}$.

Synthèse :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il est clair que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[X] = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}\}}$

Pierre

Semaine 11.

Exercice 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère $f \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$ qu'on suppose nilpotent, et on note $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer alors que :

$$P(0) = 0 \Leftrightarrow P(f) \text{ est un endormorphisme nilpotent}$$

On pose a le nilindice de f et n le degré de P $\begin{cases} a \in \mathbb{N}^* \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $P(f)$ nilpotent, posons α l'indice de nilpotence de $P(f)$.

$P(f) = \sum_{k=0}^{n} [P]_k f^k$

de plus, $P(f^a) = \sum_{k=0}^{n} [P]_k (f^a)^k$

or $\cdot\ \forall k \in [\![1, n]\!], (f^a)^k = 0$ car $f^a = 0$

$\cdot\ (f^a)^0 = id_E$.

d'où $P(f^a) = P(0) = [P]_0 \, id_E$.

De plus, $P(f)^\alpha = 0 = \left(\sum_{k=0}^{n} [P]_k f^k \right)^\alpha$

$\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} [P]_k f^k = 0$

or $f^{a-1} \neq 0$ donc $\exists x \in E \setminus \{0\}, f^{a-1}(x) \neq 0$.

$(*)$ donne alors, en évaluant en x : $[P]_0 x + \dots + [P]_n f^n(x) = 0$

f^{a-1} et f est linéaire $\Rightarrow [P]_0 f^{a-1}(x) + \underbrace{\dots + [P]_n f^{\overbrace{n+(a-1)}^{\geq a}}(x)}_{= 0 \text{ car } f \text{ nilpotente}} = 0$

donc $[P]_0 \underbrace{f^{a-1}(x)}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow [P]_0 = 0$

finalement, $P(0) = 0$

[⇐] Supposons $P(0) = 0$.

on a $P(0) = \sum_{k=0}^{n} [P]_k 0^k = [P]_0 \mathrm{id}_E = 0$

$\Rightarrow [P]_0 = 0$.

ainsi, $P(f)^a = ([P]_0 \mathrm{id}_E + \sum_{k=1}^{m} [P]_k f^k)^a$

$= \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} [P]_0^i \mathrm{id}_E^i (\sum_{k=1}^{m} [P]_k f^k)^{a-i}$

$\underset{[P]_0^i = 0 \text{ pour } i \neq 0}{=} \binom{a}{0} [P]_0^0 \mathrm{id}_E^0 (\sum_{k=1}^{n} [P]_k f^k)^a$

$= (\sum_{k=1}^{m} [P]_k f^k)^a$

on obtient que des itérés supérieur ou égale à a de f.

or $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq a}$, $f^k = 0$.

d'où $(\sum_{k=1}^{m} [P]_k f^k)^a = 0 = P(f)^a$.

finalement $P(f)$ est nilpotent, d'indice inférieur ou égal à a.

Frederic

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et a et b deux nombre complexes
1. On Suppose dans cette question $a \neq b$ Determiner le reste de P par $(X-a)(X-b)$
2) On suppose maintenant que $a = b$. Determiner le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$

Ex 1. D'après le theoreme de division euclidienne : $\exists (R,Q) \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = Q(X-a)(X-b) + R \quad \text{avec} \quad d(X-a)(X-b) > d^\circ R$$

donc $\forall X \in \mathbb{R}$

$$P(X) = Q(X)(X-a)(X-b) + R(X)$$

pour $X \leftarrow a$ et $X \leftarrow b$ on a :

$$P(a) = R(a) \text{ et } P(b) = R(b)$$

on a aussi $2 > d^\circ R$

donc $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ tel que $R \cancel{(X)} = \alpha X + \beta$

on a alors $\begin{cases} P(a) = \alpha a + \beta \\ P(b) = \alpha b + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{P(a) - P(b)}{a - b} \\ \beta = -a\dfrac{P(a) - P(b)}{a - b} + P(a) \end{cases}$

2. D'après le theoreme de taylor exact :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$$

$$= P(a) + (X-a)P'(a) + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$$

$$= P(a) + (X-a)P'(a) + (X-a)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(X-a)^{k-2}}{k!} P^{(k)}(a)$$

or $d^\circ P(a) + (X-a)P'(a) < d^\circ (X-a)^2$

donc le reste de P est $R = P(a) + (X-a)P'(a)$

Rose

Colle S 11

L. 30/11/2020

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ tel que :

$$\forall k \in [\![0; n]\!] \quad , \quad P(k) = \frac{1}{k+1}$$

Que vaut $P(n+1)$?

Soit $n \in \mathbb{N}$

Notons $Q(X) \overset{(*)}{=} (X+1)\,P(X) - 1 \in \mathbb{R}[X]$

On a :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \quad k \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(Q)$$

D'où :

$$\exists\, A \in \mathbb{R}[X] \quad , \quad Q(x) \overset{(*)}{=} A(X) \prod_{k=0}^{n} (X-k)$$

Or $\deg(Q) = \deg(A) + \deg\left(\prod_{k=0}^{n} (X-k)\right)$

$\Rightarrow \deg(A) = n+1 - (n+1)$

$\Rightarrow \deg(A) = 0$

Donc : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad A = \lambda$

Pour trouver λ, on évalue Q en -1 :

$$\begin{cases} Q(-1) = -1 & \text{par } (*) \\ Q(-1) = \lambda\,(-1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n} (k+1) & \text{par } (*) \end{cases}$$

Ainsi, $\lambda = \dfrac{-1}{(-1)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} (k+1)} = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$

Finalement, $P(n+1) = \dfrac{Q(n+1)+1}{n+2}$

$$\Leftrightarrow P(n+1) = \frac{1}{n+2}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (n+1-k) + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow P(n+1) = \frac{(-1)^n + 1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow P(n+1) = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Julien

Exercice de colle
Semaine n° 11

EXERCICE 17. — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $P_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$. Démontrer que les racines de P dans $\mathbf{K}$ sont simples.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère α une racine de P_n dans $\mathbb{C}$, qui existe par D'Alembert-Gauss.

On suppose par l'absurde que α n'est pas une racine simple de P_n, par exemple d'ordre 2.

Par caractérisation de la multiplicité des racines, on aurait alors :
$(X-\alpha) \mid P_n'$.

Cela équivaut à ce que α soit racine de P_n'.

Or $P_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} X^k = P_{n-1}$.

Ainsi, on a :
$P_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \alpha^k = 0 = P_{n-1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \alpha^k$

$\Rightarrow \frac{\alpha^n}{n!} = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$.

Or $P_n(0) = 1$, donc α n'est pas racine de P_n $\lightning$.

On raisonne de même pour les racines réelles sous réserve d'existence de racines.

On a donc montré que si P_n possède des racines dans $\mathbb{K}$, ces dernières sont simples.

Julien

Exercice de khôlle
Semaine n° 11.

EXERCICE 6. — *Soit α un nombre réel et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\mathrm{sh}(\alpha)X + \mathrm{ch}(\alpha))^n$ par X^2-1.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $P_n = (sh(\alpha)X + ch(\alpha))^n$.

On note $R_n \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de P_n par (X^2-1). On a alors :

$\exists! (Q_n, R_n) \in \mathbb{K}[X]$,
$$\begin{cases} P_n = Q_n(X^2-1) + R_n \\ \deg(R_n) < \deg(X^2-1) = 2. \end{cases}$$

Ainsi, $\deg(R_n) \leq 1$, donc il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}$, $R_n = \alpha_n X + \beta_n$.

En remarquant que 1 et (-1) sont racines de X^2-1, on a :

$$\begin{cases} P_n(1) = R_n(1) = \alpha_n + \beta_n = (sh(\alpha) + ch(\alpha))^n \\ P_n(-1) = R_n(-1) = -\alpha_n + \beta_n = (-sh(\alpha) + ch(\alpha))^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_n + \beta_n = (sh(\alpha) + ch(\alpha))^n \\ 2\beta_n = (-sh(\alpha) + ch(\alpha))^n \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$
(système échelonné)

$$\iff \begin{cases} \alpha_n + \beta_n = (sh(a) + ch(a))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sh(a)^{n} ch(a)^{n-k}. \\ \beta_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (sh(a))^k (ch(a)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sh(a)^k ch(a)^{n-k} \left(1 - \frac{1}{2}(-1)^{k+1}\right) \\ \beta_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k sh(a)^n ch(a)^{n-k}. \end{cases}$$

Ainsi, $R_n = \alpha_n X + \beta_n$ comme définis.

Leonard Colle sur les polynômes.

Question de cours :

Théorème de d'Alembert-Gauß . Scindage de $\sum_{k=0}^{k=n} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$ et calcul de : $\prod_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice CCNIP : N° 28

Exercice :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, quel que soit n, $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. Déterminer le quotient de cette division.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ dont toutes les racines sont simples.

   (a) Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses racines sont simples.

   (b) En déduire que pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, les racines dans $\mathbb{C}$ de $P^2 + \alpha^2$ sont toutes simples.

1) Posons $P = (X-1)^2$. 1 est racine double de P. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $Q = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

$Q(1) = n - (n+1) + 1 = 0$

De plus $Q' = (n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1}$

$Q'(1) = (n+1)n - (n+1)n = 0$

Q a bien comme racine double 1 donc P divise Q.

$$
\begin{array}{l|l}
nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 & X^2 - 2X + 1 \\
-\left(nX^{n+1} - 2nX^n + nX^{n-1}\right) & nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} \ldots \\
\hline
(n-1)X^n - nX^{n-1} + 1 & \\
-\left((n-1)X^n - 2(n-1)X^{n-1} + (n-1)X^{n-2}\right) & \\
\hline
(n-2)X^{n-1} - (n-1)X^{n-2} + 1 &
\end{array}
$$

En itérant le processus (ou par récurrence), on a que

$Q = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + (n-2)X^{n-3} + \ldots + 1$

2) a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
Posons $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ les racines de P

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$ et P dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$
continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$.
Par le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que
$P'(\beta_i) = 0$
Ainsi P' a $(n-1) = \deg(P')$ racines sur $\mathbb{R}$ deux à deux distinctes. P' est donc scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples

b) $\alpha \in \mathbb{R}^*$, posons $R = P^2 + \alpha^2$
Soit z tel que $R(z) = 0$ alors $P^2(z) = \underbrace{-\alpha^2}_{<0}$
ainsi z est complexe : Les racines de R sont donc complexes.
En effet P est à coefficients réels et α est réel.

Par l'absurde, supposons qu'une racine de R soit double.
Notons β une telle racine. Alors $R'(\beta) = 0$.
Id est $2P'(\beta)P(\beta) = 0$
$2 \neq 0 \Rightarrow P'(\beta)P(\beta) = 0$

En élevant au carré, on obtient $P'(\beta)^2 P^2(\beta) = 0$
or $P^2(\beta) = -\alpha^2 \neq 0$
Ainsi $P'(\beta)^2 = 0$ et β est racine double de P'.

Contradiction avec le résultat de la question 2) a).

Colle: Dorian

Exercice 6. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la somme de deux racines de $2X^3 - X^2 - 7X + \lambda$ vaille 1.

Par analyse-synthèse:

Analyse:

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $P(X)$ dans $\mathbb{C}$ avec par exemple $x_1 + x_2 = 1$

$$\begin{aligned} P(X) &= 2(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3) \\ &= 2(X-x_1)(X^2-(x_2+x_3)X+x_2x_3) \\ &= 2\left(X^3-(x_1+x_2+x_3)X^2+(x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3)X-x_1x_2x_3\right) \end{aligned}$$

Alors $x_1+x_2+x_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$P(X) = (2X+1)(X-x_1)(X-x_2)$ donc $2X+1 \mid P(X)$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - X^2 - 7X + \lambda & 2X+1 \\ \cline{2-2} -\; 2X^3 - X^2 & X^2 - X - 3 \\ \cline{1-1} -2X^2 - 7X + \lambda & \\ +2X^2 + X + \lambda & \\ \cline{1-1} -6X + \lambda & \\ +6X + 3 & \\ \cline{1-1} \lambda + 3 & \end{array}$$

$P(X) = (2X+1)(X^2-X-3) + \lambda + 3$

$\lambda + 3$ est le reste de la division euclidienne de P par $2X+1$

Comme $2X+1 \mid P$ alors $\lambda + 3 = 0$ et donc $\lambda = -3$

<u>Synthèse</u> : si $\lambda = -3$

Alors $P(X) = (2X+1)(X^2-X-3)$

$$= (2X+1)\Big(X - \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}_{x_1}\Big)\Big(X - \underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_{x_2}\Big)$$

Donc $x_1 + x_2 = 1$

Malaurie
P

semaine 11

Énoncé :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$P(a) > 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ P^{(k)}(a) \geqslant 0.$$

Démontrer que le polynôme P ne possède pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Résolution :

Notons $d \in \mathbb{N}$ le degré de P (P ne peut pas être le polynôme nulle)

On applique la formule de Taylor exacte en a :

$$P = P(a) + \sum_{k=1}^{d} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$$

Soit $b \in [a, +\infty[$.

$$P(b) = \underbrace{P(a)}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{d} \frac{\overbrace{(b-a)^k}^{\geqslant 0}}{k!} \underbrace{P^{(k)}(a)}_{\geqslant 0}}_{\geqslant 0} > 0$$

En particulier, pour tout $b \in [a, +\infty[$, $P(b) \neq 0$.

Finalement, P ne possède pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Sirine

Exercice 5
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\int_0^1 f(x)x^k\,dx = 0$.

1. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $\int_0^1 f(x)P(x)\,dx = 0$.
2. On suppose que f possède moins de n zéros. On décide alors de noter $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ ($p \le n$) les zéros pour lesquels f change de signe et tels que :
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$$
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré p tel que fQ est de signe constant.
   (b) En déduire que f possède une infinité de zéros sur $[0,1]$.
3. Que peut-on alors conclure ?
4. En supposant cette fois-ci que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^k\,dx = 0$. Etablir que $f = 0$.

1) Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} [P]_k X^k$.

On a :
$$\int_0^1 f(x)P(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\left(\sum_{k=0}^{n} [P]_k x^k\right)dx$$

{linéarité de l'intégrale} $\rightsquigarrow$ $$= \sum_{k=0}^{n} [P]_k \int_0^1 f(x)x^k\,dx.$$

Or par hypothèse pour tout $k \in [\![0;n]\!]$,
$$\int_0^1 f(x)x^k\,dx = 0$$

D'où $$\int_0^1 f(x)P(x)\,dx = 0.$$

2) a) On choisit un polynôme Q qui s'annule en α_i pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, on pose :
$$Q = \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i) \qquad (\deg(Q) = p)$$

et on vérifie si fQ est de signe constant.

On a 4 possibilités :

x	0		α_1		α_2	...	α_p		1
f		$+ - + -$	0	$- + - +$	0	$+ - + -$	0	$- + - +$	
Q		$+ - - +$	0	$- + + -$	0	$+ - - +$	0	$- + + -$	
fQ		$+ + - -$	0	$+ + - -$	0	$+ + - -$	0	$+ + - -$	

Dans tous les cas, fQ est de signe constant.

b) Comme $\deg(Q) = p \leq n$, d'après la qu 1, on a :
$$\int_0^1 f(x)Q(x)dx = 0$$

Or fQ est de signe constant sur $[0;1]$ et continue sur $[0;1]$, on en déduit que
$\forall x \in [0;1], \ f(x)Q(x) = 0$

par intégrité : $f(x) = 0$ ou $Q(x) = 0$.

Or Q possède p racines sur $[0;1]$ (et ce n'est pas le polynôme nul)

On en déduit que f possède une infinité de 0 sur $[0;1]$.

3) On suppose : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(x) \cdot x^k dx = 0$.

Par linéarité de l'intégrale on a que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 f(x)P(x) = 0$.

f étant continue sur le segment $[0;1]$, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|P_n - f\|_\infty \to 0$

Sirine

On montre que :

$$\int_0^1 f(x) P_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

En effet,

$$\left| \int_0^1 f(x) P_n(x) - f^2(x)\,dx \right|$$

$$\leqslant \int_0^1 |f(x)|\,|(P_n(x) - f(x))|\,dx$$

Or f étant continue sur $[0,1]$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leq M$.

D'où :

$$0 \leq \left| \int_0^1 f(x) P_n(x) - f^2(x)\,dx \right| \leq \int_0^1 M \, \| P_n - f \|_\infty \,dx$$

$$= M \| P_n - f \|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Finalement, par théorème d'encadrement,

$$\int_0^1 f(x) P_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Or on sait :

$$\int_0^1 f(x) P_n(x)\,dx = 0$$

et par passage à la limite quand $n \to +\infty$:

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = 0.$$

$x \mapsto f^2(x)$ étant continue et de signe constant sur $[0,1]$, on en déduit que f est nulle sur le segment

Yann

Khôlle de Maths

Montrer que le polynôme $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \dots + \frac{X^{2n}}{(2n)!}$ n'a pas de racine réelle

- Tout d'abord étudions les variations de P en $-\infty$ et $+\infty$:

* En $-\infty$: $P(X) \sim \frac{X^{2n}}{(2n)!} \xrightarrow[X \to -\infty]{} +\infty$

* En $+\infty$: $P(X) \sim \frac{X^{2n}}{(2n)!} \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$

- Fixons maintenant $M = P(0)$ et posons A et B avec $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) > P(0)$ sur $]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$

- P est continue sur le segment $[AB]$ qui est fermé. P atteint donc un minimum en un réel $x_0 \in [A, B]$.
Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) > P(x_0)$

- On a $P(x_0)$ le minimum de P, reste à montrer que $P(x_0)$ est positif, ainsi P n'admettra pas de racines réelles.

- On peut alors distinguer 2 cas :

* Lorsque $x_0 \geqslant 0$, c'est évident que $P(x_0)$ est positif puisqu'on a $P(X) \geqslant 1$.

* Lorsque $x_0 < 0$, on a alors $P(x) = S_{2n}$
On reconnait donc ici une somme partielle et on a $P(x_0) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x_0^k}{k!}$

Il s'agit donc d'une somme partielle de série alternée d'indices pairs
On a donc P décroissante sur $]-\infty;0[$, et

$P(x) = S_{2n} \longrightarrow e^{x_0} > 0$
Par convergence monotone, sa limite est son minimum.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$, P n'admet donc pas de racine réelle.

EMILIE

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\int_0^1 f(x) x^k \, dx = 0$

1- Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $\int_0^1 f(x)P(x)dx = 0$

2- On suppose que f possède moins de n zéros. On décide alors de noter $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ $(p \leq n)$ les zéros pour lesquels f change de signe et tels que $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$

(a) Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré p tel que fQ est de signe constant

(b) En déduire que f a une infinité de zéros sur $[0,1]$

3- Que peut-on en conclure.

4- En supposant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^k dx = 0$ établir que $f = 0$

1- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

On a alors :

$\int_0^1 f(x)P(x)dx = \int_0^1 f(x) \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) dx$

$= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 f(x) x^k dx$ par linéarité de l'intégrale

$= 0$ d'après l'énoncé

2-a) En posant $Q = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ Q a est les mêmes zéros que f.

En effet on a par exemple :

x	0	α_1	α_n	...	α_p
$f(x)$	$+$	0 $-$	0	... $+$	0
$Q(x)$	$+$	$-$		$+$	
$f(x)Q(x)$	$+$	$+$		$+$	

ou

x	0	α_1	α_n		α_p
$f(x)$	$+$	0 $-$	0	$-$	0
$Q(x)$	$-$	$+$		... $+$	
$f(x)Q(x)$	$-$	$-$		$-$	

D'où l'existence.

b- Puisque $\deg(Q) = p \leq n$ on a $\int_0^1 f(x)Q(x)dx = 0$.

fQ étant continue sur $[0,1]$ comme produit de deux fonctions continues sur $[0,1]$, et de signe constant, on a :

$\int Q = 0$.

Or $\forall x \in [0,1]$ $x \notin (\alpha_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$, $Q(x) \neq 0$ par construction.

Par intégrité on a que $\forall x \in [0,1]$ $x \notin (\alpha_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$, $f(x) = 0$.

Et par définition des α_k, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 0$.

f a donc une infinité de zéros.

3- On a supposé en 2 que f avait moins de n zéros et on a montré qu'elle en avait en réalité une infinité.

f est donc la fonction nulle sur $[0,1]$