# M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

## Programme de khôlle de la semaine 9

## 8–12 novembre

## Intégration sur un intervalle quelconque

David BLOTTIÈRE

# Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

# Programme

Chapitre 5 « Intégration sur un intervalle quelconque » [PDF]

— Fonctions continues par morceaux sur un intervalle.

— Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert : propriétés élémentaires (e.g. linéarité, positivité, croissance), théorème de domination, relations de comparaison $o$, $O$ et $\sim$, fonctions intégrables, intégrales faussement impropres.

— Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle ouvert : propriétés élémentaires (e.g. linéarité, positivité, croissance), théorème de domination, fonctions intégrables, changement de variable.

# À venir

Fin du chapitre 5 « Intégration sur un intervalle quelconque » : D'autres propriétés de l'intégrale sur un intervalle quelconque : relation de Chasles, majoration du module d'une intégrale de fonction intégrable, séparation de l'intégrale pour une fonction continue et de signe constant, intégration par parties.

Chapitre 6 « Polynômes ».

# Questions de cours

**Q1. —** Définition d'une intégrale convergente sur $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ (Colonne de gauche de C5.11). L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{4}$ (C5.15, démonstration).

**Q2. —** Définition d'une intégrale convergente sur sur $]a, b]$, où $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ (Colonne de droite de C5.11). L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) \, \mathrm{d}t$ est convergente et vaut $-1$ (C5.13, démonstration).

**Q3. —** Intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$ et sur $]0, 1]$ (C5.17, énoncé intégral et démonstration pour $[1, +\infty[$).

**Q4. —** Propriétés élémentaires des intégrales convergentes sur $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ (Énoncé intégral des résultats de la colonne de gauche de C5.25 et démonstration de la propriété de dérivation).

**Q5. —** Théorème de la limite monotone pour les fonctions (Colonne de gauche de C5.27) et critère pour qu'une intégrale de fonction positive sur $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, converge (Colonne de gauche de C5.28, énoncé et démonstration).

**Q6. —** Théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives sur $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ (Colonne de gauche de C5.29, énoncé et démonstration). Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$ (C5.31, démonstration).

**Q7. —** Théorème d'intégrations des o pour les intégrales de fonctions positives sur $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ (Énoncé intégral des résultats de la colonne de gauche de C5.41 et démonstration du résultat (a)).

**Q8. —** L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente, mais non absolument convergente (C5.40, démonstration).

**Q9. —** Le faux problème de convergence sur $[a, b[$, où $-\infty < a < b < +\infty$ (Colonne de gauche de C5.48, énoncé et démonstration). Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ (C5.49 démonstration).

**Q10. —** Théorème de changement de variable (C5.63, énoncé). Existence et valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ (C5.66, démonstration et calcul, résolu en classe le lundi 8 novembre).

## Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

**Exercice CCINP n°35. —** $E$ et $F$ désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient $f$ une application de $E$ dans $F$ et $a$ un point de $E$. On considère les propositions suivantes :

   **P1.** $f$ est continue en $a$.

   **P2.** Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. Soit $A$ une partie dense dans $E$, et soient $f$ et $g$ deux applications continues de $E$ dans $F$. Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

**Exercice CCINP n°36. —** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   **P1.** $f$ est continue sur $E$.

   **P2.** $f$ est continue en $0_E$.

   **P3.** $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.

2. Soit $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f(x)|$ . On considère l'application $\varphi$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
   Démontrer que $\varphi$ est linéaire et continue.

**Exercice CCINP n°41. —** Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
**Remarques** :

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

# Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*