M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 8

18–22 octobre

Espaces vectoriels normés II

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Début du du Chapitre 4 « Espaces vectoriels normés » [PDF]
— Norme sur un espace vectoriel normé
— Suites d'éléments dans un espace vectoriel normé
— Topologie d'un espace vectoriel normé
— Étude locale d'une application
— Applications linéaires continues
— Compacité
— Espaces vectoriels de dimension finie

À venir

Chapitre 5 « Intégration sur un intervalle quelconque »

Questions de cours

Q1. — L'application $||\cdot||$ définie par, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$|| A || = \sup_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |[A]_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $|| A \times B || \leqslant || A || \times || B ||$ (C4.125, démonstration).

Q2. — Définitions d'un ouvert et d'un fermé d'un espace vectoriel normé (C4.70) ; Propriétés topologiques des boules ouvertes et des boules fermées (C4.73, énoncés, illustrations graphiques et démonstrations ensemblistes).

Q3. — Définition de l'adhérence d'une partie en termes de boules (C4.77) ; Caractérisation séquentielle de l'adhérence (C4.83-1, énoncé et démonstration).

Q4. — Caractérisation des fermés via l'adhérence (C4.82-1 et C4.82-3, énoncé et démonstration) ; Caractérisation séquentielle des fermés (C4.83-2, énoncé) ; Caractérisation séquentielle de la densité (C4.84, énoncé).

Q5. — Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux **K**-espaces vectoriels normés, A une partie de E, $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et une application $f\colon A \longrightarrow F$. Énoncer la définition formelle de l'assertion : $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ (C4.100) ; Caractérisation séquentielle de $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ (C4.106, énoncé et démonstration).

Q6. — Prolongement d'identités sur une partie dense par continuité (C4.113, énoncé et démonstration).

Q7. — Caractérisation des applications linéaires continues (C4.116, énoncé et démonstration).

Q8. — Toute application linéaire

$$f\colon (\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}^p, ||\cdot||_\infty)$$

est continue (C4.117-1, adapter la démonstration vue en classe dans le cas $p = n$).

Q9. — Caractérisation des applications bilinéaires continues (C4.126, énoncé et démonstration).

Q10. — Définition d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé (C4.129 et C4.130) ; Deux propriétés topologiques des compacts (C4.132, énoncé et démonstration).

Q11. — CNS pour qu'une partie d'un compact soit elle-même compacte (C4.134, énoncé et démonstration).

Q12. — Théorème des bornes atteintes (4.138, énoncé et démonstration).

Q13. — Énoncer une synthèse des propriétés topologiques des **K**-espaces vectoriels normés de dimension finie, portant sur :

- les normes (C4.146) ;
- les parties ouvertes (C4.147) ;
- les parties compactes (C4.148) ;
- les sous-espaces vectoriels (C4.149) ;
- les applications linéaires (C4.151)
- les application bilinéaires (C4.152).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°37. — On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice CCINP n°38. — On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On pose : $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1. (a) Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.

   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

Exercice CCINP n°79. — Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\, (f, g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*