M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 26

4 – 8 avril

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. Paul Mouchène et Léo Dauchez (Groupe I) sont dispensés de la phase 2.

Programme

Chapitre 18 *Équations différentielles linéaires* [PDF]

- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1) vectorielles
- EDL1 scalaires
- Système fondamental de solution d'une EDL1 vectorielle homogène
- Variations des constantes pour une EDL1 vectorielle
- Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 (SDL1) généraux
- Exponentielle de matrice
- Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants

Questions de cours

Q1. — Définition d'une EDL1 vectorielle [C18.2]. Définition d'un problème de Cauchy pour une EDL1 vectorielle [C18.3]. Théorème de Cauchy pour une EDL1 vectorielle [C18.4 – énoncé]. Propriété du flot d'une EDL1 vectorielle [C18.6 – énoncé et démonstration].

Q2. — Théorème de structure pour l'ensemble solution d'une EDL1 vectorielle homogène [C18.7 – énoncé et démonstration].

Q3. — Théorème de structure pour l'ensemble solution d'une EDL1 vectorielle avec second membre [C18.9 – énoncé et démonstration].

Q4. — Théorème de structure pour l'ensemble solution d'une EDL1 scalaire homogène [C18.20 – énoncé et démonstration].

Q5. — Théorème de structure pour l'ensemble solution d'une EDL1 scalaire avec second membre et variation de la constante [C18.21 – énoncé et démonstration].

Q6. — Théorème de Cauchy pour une EDL1 scalaire [C18.22 – énoncé]. Propriété des courbes intégrales d'une EDL1 scalaire [C18.23 – énoncé et démonstration].

Q7. — Définition d'un système fondamental de solutions pour une EDL1 vectorielle homogène [C18.29]. Caractérisation d'un système fondamental de solutions [C18.32 – énoncé et démonstration].

Q8. — Présentation de la méthode de variation des constantes pour obtenir une solution particulière d'une EDL1 vectorielle, étant donné un système fondamental de solutions de l'EDL1 homogène associée [Partie 4 du Chapitre 18].

Q9. — Définition d'un SDL1 [C18.40]. Théorème de Cauchy pour un SDL1 [C18.44 – énoncé]. Structure de l'ensemble solution d'un SDL1 homogène [C18.45 – énoncé]. Structure de l'ensemble solution d'un SDL1 avec second membre [C18.46 – énoncé].

Q10. — Définition de l'exponentielle d'une matrice [C18.53]. Exponentielle d'une matrice diagonale [C18.54 – énoncé et démonstration]. Une fonction dérivable fondamentale [C18.57 – énoncé et démonstration].

Q11. — Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants à l'aide d'une exponentielle de matrice [C18.63 – énoncé et démonstration].

Q12. — Résolution d'un SDL1 homogène à coefficients constants dans le cas diagonalisable [C18.64 – énoncé et démonstration].

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°42. — On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice CCINP n°74. —

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice CCINP n°75. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*