M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 25

28 mars – 1$^{\text{er}}$ avril

Fonctions à valeurs dans un e.v.n. de dim. finie II

Endomorphismes des espaces euclidiens

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. Paul Mouchène et Léo Dauchez (Groupe I) sont dispensés de la phase 2.

Programme

Chapitre 16 *Fonctions à valeurs dans un e.v.n. de dim. finie* [PDF]

- Dérivée en un point, fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Fonction de classe $\mathcal{C}^k$
- Arcs paramétrés
- Fonctions continues par morceaux sur un segment
- Approximation uniforme de fonctions continues par morceaux sur un segment
- Intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles
- Lien entre intégration et dérivation

Chapitre 17 *Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens* [PDF]

- Matrices orthogonales
- Isométries d'un espace euclidien
- Isométries d'un plan euclidien
- Réduction des isométries d'un espace euclidien
- Éléments caractéristiques d'une isométrie positive de $\mathbf{R}^3$
- Endomorphismes symétriques et matrices symétriques
- Théorème spectral

À venir

Chapitre 18 *Équations différentielles linéaires.*

Questions de cours

Q1. — Dérivation d'une composée de deux fonctions [C16.26 – énoncé et démonstration].

Q2. — Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, pour une fonction à valeurs vectorielles [C16.64 – énoncé et démonstration].

Q3. — Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs vectorielles [C16.67 – énoncé et démonstration].

Q4. — Formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction à valeurs vectorielles [C16.69 – énoncé] et majoration du reste [C16.70 – énoncé et démonstration].

Q5. — Définition d'une matrice orthogonale [C17.2]. Structure de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ [C17.13 – énoncé et démonstration]. Description en extension de $\mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ [C17.7 – énoncé et démonstration].

Q6. — Première caractérisation des matrices orthogonales [C17.20 – énoncé et démonstration].

Q7. — Deuxième caractérisation des matrices orthogonales [C17.21 – énoncé et démonstration].

Q8. — Définition d'un endomorphisme orthogonal [C17.23]. Définition d'une isométrie [C17.24]. Équivalence des deux notions [C17.26 – énoncé et démonstration].

Q9. — Caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux [C17.37 – énoncé et démonstration].

Q10. — Théorème de réduction des isométries négatives d'un plan euclidien [C17.46 – énoncé et démonstration].

Q11. — Un résultat de stabilité pour les isométries [C17.48 – énoncé et démonstration]. Réduction des isométries d'un espace euclidien quelconque [C17.49 – énoncé et démonstration].

Q12. — Définition d'un endomorphisme symétrique [C17.53]. Caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques [C17.57 – énoncé et démonstration].

Q13. — Un résultat de stabilité pour les endomorphismes symétriques [C17.60 – énoncé et démonstration]. Théorème spectral [C17.63 – énoncé]. Orthodiagonalisabilité d'une matrice réelle symétrique [C17.64 – énoncé et démonstration]. Une matrice à coefficients complexes et symétrique n'est pas nécessairement diagonalisable [C17.65 – contre-exemple et justification].

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°63. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.

3. Justifier que la matrice A_n est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A_n ?

Exercice CCINP n°68. — Soit la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice CCINP n°78 (énoncé tronqué). — Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $\langle\, x\,,\, y\,\rangle$ le produit scalaire de x et de y et $||\cdot||$ la norme associée.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, $||\,u(x)\,|| = ||\,x\,||$. Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que :

$$u \in \mathcal{O}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad (u\,(e_1)\,, u\,(e_2)\,, \ldots, u\,(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E\,.$$

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*