

# MP

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique



Programme de khôlle de la semaine 24

21 – 25 mars

Probabilités III

Fonctions à valeurs dans un e.v.n. de dim. finie I



David BLOTTIÈRE

## Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

**N.B.** Léo Dauchez (Groupe I) est dispensé de la phase 2.

## Programme

### Chapitre 15 *Probabilités* [PDF]

- Ensemble des parties d'un ensemble
- Tribu et espace probabilisable
- Probabilité et espace probabilisé
- Propriétés élémentaires d'une probabilité
- Probabilités conditionnelles
- Événements indépendants
- Variable aléatoire discrète et loi d'une telle
- Couple de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales
- Indépendance de variables aléatoires
- Loi uniforme sur un ensemble fini
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Espérance
- Écart-type
- Covariance
- Variance
- Loi faible des grands nombres
- Fonction génératrice

### Chapitre 16 *Fonctions à valeurs dans un e.v.n. de dim. finie* [PDF]

- Dérivée en un point, fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- Fonction de classe  $\mathcal{C}^k$
- Arcs paramétrés

## À venir

Chapitre 16 *Fonction de la variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie* : Fonctions continues par morceaux sur un segment ; Approximation uniforme de fonctions continues par morceaux sur un segment ; Intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles ; Lien entre intégration et dérivation.  
Chapitre 17 *Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens*.

## Questions de cours

**Q1.** — Définition de la variance d'une variable aléatoire discrète [C15.137]. Formule de König-Huygens [C15.138]. Variance d'une somme [C15.145 – énoncé et démonstration].

**Q2.** — Existence et valeur de la variance pour une variable aléatoire suivant une des lois  $\mathcal{B}(n, p)$ ,  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $\mathcal{G}(p)$  [C15.139(c),(d),(e) – énoncé et démonstration].

**Q3.** — Inégalité de Markov [C15.122 – énoncé et démonstration]. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev [C15.143 – énoncé et démonstration].

**Q4.** — Loi faible des grands nombres [C15.147 – énoncé, démonstration et interprétation].

**Q5.** — Définition de la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  [C15.149]. Deux propriétés de la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  [C15.151 – énoncé et démonstration].

**Q6.** — Rayon de convergence de la série génératrice et calcul de la fonction génératrice pour une variable aléatoire suivant une des lois  $\mathcal{B}(n, p)$ ,  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $\mathcal{G}(p)$  [C15.153(b),(c),(d) – énoncé et démonstration].

**Q7.** — Fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  [C15.159 – énoncé et deux démonstration].

**Q8.** — Liens entre la fonction génératrice et l'espérance (resp. la variance) d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  [C15.156 – énoncé intégral et démonstration des résultats concernant l'espérance].

**Q9.** — Définition d'une fonction à valeurs vectorielles dérivable en un point et de son vecteur dérivé en ce point, le cas échéant [C16.2]. lien fondamental entre dérivabilité/vecteur dérivé et DL à l'ordre 1 pour les fonctions à valeurs vectorielles [C16.6 – énoncé et démonstration].

**Q10.** — Composée d'une fonction dérivable par une application linéaire [C16.11 – énoncé et démonstration].

**Q11.** — Composition de deux fonctions dérivables par une application bilinéaire [C16.12 – énoncé et démonstration].

**Q12.** — Formule de Leibniz [C16.25 – énoncé et démonstration].

## Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [\[PDF\]](#).

**Exercice CCINP n°95.** — Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.  
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.  
On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note  $Y$  le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
  - (a) Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
  - (b) Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
  - (a) Déterminer la loi de  $X$ .
  - (b) Déterminer la loi de  $Y$ .

**Exercice CCINP n°98.** — Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers  $n$  correspondants distincts.

On admet que les  $n$  appels constituent  $n$  expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ).

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de  $X$ . Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des  $n - X$  correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
  - (a) Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(Y = k | X = i)$ .
  - (b) Prouver que  $Z = X + Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

**Indication** : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : 
$$\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

- (c) Déterminer l'espérance et la variance de  $Z$ .

**Exercice CCINP n°101.** — Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

À l'instant  $t = 0$ , il se trouve au point  $A$ .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On note  $A_n$  l'événement «l'animal est en  $A$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet».

On note  $B_n$  l'événement «l'animal est en  $B$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet».

On note  $C_n$  l'événement «l'animal est en  $C$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet».

On pose  $P(A_n) = a_n$ ,  $P(B_n) = b_n$  et  $P(C_n) = c_n$ .

1. (a) Exprimer, en le justifiant,  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

(b) Exprimer, de même,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ . Elle est diagonalisable puisque symétrique à coefficients réels (théorème spectral).

(a) Prouver que  $-\frac{1}{2}$  est valeur propre de  $A$  et déterminer le sous-espace propre associé.

(b) Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

**Remarque** : le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .

**Remarque** : aucune expression finalisée de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  n'est demandée.

## Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle*.