M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 23

14 – 18 mars

Probabilités II

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. Léo Dauchez (Groupe I) est dispensé de la phase 2.

Programme

Chapitre 15 *Probabilités* [PDF]

- Ensemble des parties d'un ensemble
- Tribu et espace probabilisable
- Probabilité et espace probabilisé
- Propriétés élémentaires d'une probabilité
- Probabilités conditionnelles
- Événements indépendants
- Variable aléatoire discrète et loi d'une telle
- Couple de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales
- Indépendance de variables aléatoires
- Loi uniforme sur un ensemble fini
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi géométrique
- Espérance
- Écart-type
- Covariance

À venir

Fin du chapitre 15 *Probabilités* : variance, loi faible des grands nombres, fonction génératrice.
Chapitre 16 *Fonction de la variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.*
Chapitre 17 *Équations différentielles linéaires.*

Questions de cours

Q1. — Définition d'une loi binomiale [C15.94]. Situation de reconnaissance d'une loi binomiale [C15.98 – énoncé]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale [C15.115(c) – énoncé et démonstration].

Q2. — Définition d'une loi de Poisson [C15.100]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson [C15.115(d) – énoncé et démonstration].

Q3. — Définition d'une loi géométrique [C15.104]. Situation de reconnaissance d'une loi géométrique [C15.105 – énoncé]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique [C15.115(e) – énoncé et démonstration].

Q4. — Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$ [C15.171 – démonstration].

Q5. — Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson [C15.101 – énoncé et démonstration].

Q6. — Queue d'une loi géométrique, absence de mémoire pour une loi géométrique et réciproque [C15.107 – énoncé et démonstration].

Q7. — Théorème de transfert [C15.118 – énoncé]. Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes possédant toutes deux une espérance [C15.124 – énoncé et démonstration].

Q8. — Moment d'ordre n d'une variable aléatoire discrète [C15.125 – énoncé]. Une variable aléatoire qui possède un moment d'ordre 2 possède un moment d'ordre 1 [C15.127 – énoncé et démonstration].

Q9. — Structure de $\ell^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ [C15.129 – énoncé et démonstration]. Définition de la covariance de deux variables aléatoires discrètes possédant une variance [C15.133]. Calcul pratique de la covariance [C15.136 – énoncé et démonstration].

Q10. — Inégalité de Markov [C15.122 – énoncé et démonstration]. Inégalité de Cauchy-Schwarz [C15.131 – énoncé et démonstration].

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°102. — Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbf{P}(X_i \leqslant n)$, puis $\mathbf{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbf{P}(Y \leqslant n)$, puis $\mathbf{P}(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice CCINP n°103. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.

Exercice CCINP n°111. — On admet, dans cet exercice, que :

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in]-1, 1[\,, \quad \sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q} \text{ converge et } \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\, (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.

   (b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.

   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*