M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 21

28 février – 4 mars

Séries entières II

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. Léo Dauchez (Groupe I) est dispensé de la phase 2.

Programme

Chapitre 14 *Séries entières* [PDF]

- Notion de séries entières
- Rayon de convergence d'une série entière
- Calcul pratique du rayon de convergence
- Somme et produit de séries entières
- Suites et séries de fonctions de la variable complexe à valeurs complexes
- Modes de convergence et continuité de la somme d'une série entière
- Dérivation et intégration terme-à-terme d'une série entière de la variable réelle
- Développement d'une fonction en série entière
- Exemples fondamentaux de développements en séries entières
- Table des développements en séries entières usuels

À venir

Chapitre 15 *Probabilités*.

Questions de cours

Q1. — Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence [C14.50 – énoncé et démonstration]. La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ a rayon de convergence 1, mais elle ne converge pas uniformément sur $D(0,1)$ [C14.52 – démonstration].

Q2. — Rayon de convergence des séries dérivées et primitives d'une série entière [C14.56 – énoncé et démonstration]

Q3. — Régularité de la somme d'une série entière [C14.58 – énoncé intégral et démonstration pour la dérivabilité et la dérivée]

Q4. — Primitivation terme-à-terme de la somme d'une série entière [C14.59 – énoncé et démonstration]. Calcul du DSE de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ avec calcul du rayon de convergence de la série entière sous-jacente.

Q5. — Rayons de convergence et calculs des sommes des séries entières suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2\, x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!}\, x^n$

Q6. — Si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$, alors la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est DSE [Démonstration à l'aide d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 et d'un raisonnement par analyse et synthèse].

Q7. — Table des développements en série entière usuels avec les rayons de convergence [Partie 12 du chapitre 14 – énoncé intégral et démonstration pour la fonction sinus uniquement].

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°20. —

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes.

(a) $\displaystyle\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, z^{2n+1}$ (b) $\displaystyle\sum n^{(-1)^n}\, z^n$ (c) $\displaystyle\sum \cos(n)\, z^n$

Exercice CCINP n°21. —

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice CCINP n°22. —

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction :

$$f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)\ .$$

   La série converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*