M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 20

21–25 février

Espaces préhilbertiens II

Séries entières I

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. Léo Dauchez (Groupe I) est dispensé de la phase 2.

Programme

Chapitre 13 *Espaces préhilbertiens réels* [PDF]

- Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Inégalité de Bessel.

Chapitre 14 *Séries entières* [PDF]

- Notion de séries entières
- Rayon de convergence d'une série entière
- Calcul pratique du rayon de convergence
- Somme et produit de séries entières

À venir

Fin du Chapitre 14 *Série entières* : Suites et séries de fonctions de la variable complexe à valeurs complexes, Modes de convergence et continuité de la somme d'une série entière, Dérivation et intégration terme-à-terme d'une série entière de la variable réelle, Développement d'une fonction en série entière, Exemples fondamentaux de développements en séries entières, Table des développements en séries entières usuels.

Questions de cours

Q1. — Projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel de dimension finie [C13.83 – illustration géométrique, énoncé, démonstration].

Q2. — Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie [C13.84 – énoncé, démonstration].

Q3. — Une condition suffisante pour qu'un sous-espace vectoriel et son orthogonal soient supplémentaires [C13.86 – énoncé, démonstration]. Inégalité de Bessel [C13.98 – énoncé, démonstration].

Q4. — Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide d'un espace préhilbertien [C13.92]. Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien [C13.96 – illustration géométrique, énoncé, démonstration].

Q5. — Théorème d'approximation dans un espace préhilbertien [C13.103 – énoncé mettant en jeu une série, démonstration].

Q6. — Lemme d'Abel [C14.4 – illustration géométrique, énoncé, démonstration]. Définition du rayon de convergence d'une série entière [C14.5].

Q7. — Caractérisation du rayon de convergence [C14.6 – illustration géométrique, énoncé, démonstration].

Q8. — Détermination du rayon de convergence à partir d'un point atypique [C14.9 – illustration géométrique, énoncé, démonstration].

Q9. — Série entière et relation de comparaison O sur les coefficients [C14.14 – énoncé, démonstration]. Série entière dont les modules des coefficients sont équivalents [C14.15 – énoncé, démonstration].

Q10. — Somme de deux séries entières [C14.26 – énoncé, démonstration]. Définition du produit de Cauchy de deux séries entières [C14.28]. Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières [C14.29 – énoncé].

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°77. — Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice CCINP n°80. — Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice CCINP n°81. — On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}\left({}^tAA'\right)$, où tr $\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*