

M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique



Programme de khôlle de la semaine 19

31 janvier – 4 février

Espaces préhilbertiens I



David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte deux phases.

1. Rédaction d'une question de cours (10 points - 20 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (10 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

- Chapitre 13 *Espaces préhilbertiens réels* [PDF]
 - Notion de produit scalaire sur un \mathbf{R} -espace vectoriel.
 - Exemples fondamentaux de produits scalaires.
 - Théorèmes de Cauchy-Schwarz et de Minkowski.
 - Norme associée à un produit scalaire.
 - Orthogonalité d'une famille de vecteurs.
 - Orthogonalité de sous-espaces vectoriels.
 - Projecteur orthogonal.
 - Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
 - Espaces euclidiens et bases orthonormales d'un tel.

À venir

- Fin du Chapitre 13 *Espaces préhilbertiens réels* [PDF] : Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie ; Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie ; Inégalité de Bessel.
- Chapitre 14 *Séries entières*

Questions de cours

- Q1.** — Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$: définition de la forme et démonstration que celle-ci définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$.
- Q2.** — Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité (énoncés et démonstrations).
- Q3.** — Inégalité de Minkowski (énoncé et démonstration) et cas d'égalité (énoncé). Identité de polarisation (énoncé et démonstration). Identité du parallélogramme (énoncé, démonstration et interprétation géométrique).
- Q4.** — Propriété d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls (énoncé et démonstration). Théorème de Pythagore (énoncé et démonstration).

Q5. — Des sous-espaces deux-à-deux orthogonaux sont en somme directe (énoncé formalisé et démonstration). Définition de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Structure de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel (énoncé et démonstration).

Q6. — Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt (énoncé intégral, démonstration des propriétés (a) et (b)).

Q7. — Coordonnées d'un vecteur dans une BON (Base OrthoNormée) (énoncé et démonstration). Produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées dans une BON et norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées dans une BON (énoncés et démonstrations).

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle*.