M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 18

24 – 28 janvier

Familles sommables II

Théorème de Lebesgue et intégrales à paramètre

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

N.B. Léo Dauchez (Groupe I) est dispensé de la phase 2.

Programme

Chapitre 11 « Familles sommables » [PDF]

— Théorème de Fubini

— Produit de Cauchy

Chapitre 12 « Théorèmes de Lebesgue et Intégrales à paramètre » [PDF]

— Théorème de convergence dominée.

— Théorème d'intégration terme-à-terme de Lebesgue.

— Théorèmes de continuité pour une intégrale à paramètre : une version avec une hypothèse de domination globale, une autre avec une hypothèse de domination locale.

— Théorèmes de dérivabilité pour une intégrale à paramètre : une version avec une hypothèse de domination globale, une autre avec une hypothèse de domination locale.

— Théorème sur les dérivées d'ordre supérieur pour une intégrale à paramètre : une version avec une hypothèse de domination globale, une autre avec une hypothèse de domination locale.

À venir

Chapitre 13 « Espaces préhilbertiens ».

Questions de cours

Q1. — Théorème de Fubini (énoncé et démonstration).

Q2. — Théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (énoncé et démonstration).

Q3. — Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe et propriété algébrique de l'exponentielle (énoncés et démonstrations). Convergence de la série $\sum_{p\geqslant 2}(\zeta(p)-1)$ et valeur de sa somme (démonstration).

Q4. — Théorème de convergence dominée (énoncé). Démonstration de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en justifiant l'existence des termes en jeu en cours d'étude.

Q5. — Théorème d'intégration terme-à-terme de Lebesgue(énoncé). Limite éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x}\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.

Q6. — Théorèmes de continuité pour une intégrale à paramètre : une version avec domination globale, une autre avec domination locale (énoncés et démonstration dans le cas où l'on dispose d'une domination globale).

Q7. — La fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

Q8. — Théorèmes de dérivabilité pour une intégrale à paramètre : une version avec domination globale, une autre avec domination locale (énoncés, démonstration dans le cas où l'on dispose d'une domination globale, la justification de la continuité de la dérivée pourra être omise).

Q9. — Dérivabilité de la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,x^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

sur $\mathbf{R}_+$ et expression intégrale de sa dérivée.

Q10. — Critères $\mathcal{C}^k$ pour une intégrale à paramètre : une version avec domination globale, une autre avec domination locale (énoncés).

Q11. — La fonction

$$\Gamma \left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et expressions intégrales de ses dérivées itérées.

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°19. —

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t dt$.
2. Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

Exercice CCINP n°25. —

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice CCINP n°30 (amputé de sa question de cours). —

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*