M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 17

17 – 21 janvier

Familles sommables I

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Chapitre 11 « Familles sommables » [PDF]

— Ensembles dénombrables
— Familles sommables de réels positifs ou nuls
— Théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs ou nuls
— Familles sommables de nombres complexes
— Théorème de sommation par paquets pour les familles de nombres complexes
— Théorème de Fubini

À venir

Fin du chapitre 11 « Familles sommables » : Produit de Cauchy, Théorème de commutative convergence. Chapitre 12 « Théorème de Lebesgue et intégrales à paramètre ».

Questions de cours

Q1. — Définition d'un ensemble dénombrable. Toute partie infinie de $\mathbf{N}$ est dénombrable (démonstration).

Q2. — L'ensemble $\mathbf{Z}$ est dénombrable (illustration graphique et démonstration). L'ensemble $\mathbf{N}^2$ est dénombrable (illustration graphique). L'ensemble $\mathbf{Q}$ est dénombrable (démonstration).

Q3. — Définitions d'une famille sommable de nombre réels positifs et de la somme d'une telle. Si $a > 1$ et $b > 1$, sommabilité et valeur de la somme de la famille $\left(\dfrac{1}{a^n\, b^m}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$.

Q4. — Définition d'une suite exhaustive de parties d'un ensemble dénombrable. Étude de la sommabilité et calcul de la somme éventuelle d'une famille de réels positifs ou nuls grâce à une suite exhaustive de parties de l'ensemble des indices (énoncé et démonstration).

Q5. — Lien fondamental entre familles sommables de réels positifs ou nuls indexées par $\mathbf{N}$ et séries convergentes (énoncé et démonstration). Étant donné $q \in \mathbf{R}_{>0}$, la famille $(q^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ n'est pas sommable.

Q6. — Définition d'une partition d'un ensemble. Théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs ou nuls (énoncé). Étant donné $\alpha > 0$, étude de la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$.

Q7. — Définition d'une famille sommable de nombres complexes. Calcul de la somme d'une famille sommable de nombres complexes grâce à une suite exhaustive de parties de l'ensemble des indices (énoncé). Théorème de sommation par paquets pour les familles sommables de nombres complexes (énoncé).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°56. — On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Exercice CCINP n°75. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exercice CCINP n°112. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*