M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 16

10 – 14 janvier

Convexité

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Chapitre 10 « Convexité »[PDF]

- Parties convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
  - Segment
  - Partie convexe
  - Barycentres
- Fonctions convexes
  - Définition de la convexité d'une fonction via des inégalités
  - Caractérisation géométrique de la convexité d'une fonction
  - Inégalité de convexité généralisée
  - Inégalité des trois pentes
  - Quelques propriétés remarquables des fonctions dérivables
- Fonctions convexes dérivables
- Exemples d'inégalités de convexité
  - Inégalités de convexité pour $\exp$, $\ln$ et $\sin$
  - Inégalité arithmético-géométrique
  - Inégalités de Young, de Hölder et de Minkowski

À venir

Chapitre 11 « Familles sommables ».

Questions de cours

Q1. — Définition d'un segment dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (C10.2). Définition d'une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (avec une illustration géométrique) (C10.5). Toute boule ouverte d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé (E, N) est convexe (énoncé formalisé et démonstration) (C10.9).

Q2. — Caractérisation de la convexité via les barycentres (C10.21, énoncé et démonstration).

Q3. — Définition d'une fonction convexe (C10.24, avec une illustration géométrique). Caractérisation d'une fonction convexe via son épigraphe (C10.32, énoncé et démonstration).

Q4. — Inégalité de convexité généralisée (C10.35, énoncé et démonstration).

Q5. — Inégalité des trois pentes (C10.38, énoncé, démonstration et illustration géométrique).

Q6. — Caractérisation des fonctions convexes dérivables (C10.49, énoncé et démonstration).

Q7. — Le graphe d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de ses tangentes (C10.52, énoncé intégral, démonstration du sens direct et illustration géométrique).

Q8. — Inégalité arithmético-géométrique (C10.57, énoncé et démonstration). Inégalité d'Young (C10.60, énoncé et démonstration).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°70. — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exercice CCINP n°88. —

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E$, $u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.

   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

Exercice CCINP n°93. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*