M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 15

3 – 7 janvier

Suites et séries de fonctions 2

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Chapitre 9 « Suites et séries de fonctions »[PDF]
— Convergence simple d'une suite de fonctions.
— Convergence uniforme d'une suite de fonctions.
— Convergence simple (resp. uniforme, normale) d'une série de fonctions.
— Des limites d'une limite uniforme d'une suite de fonctions.
— Intégration de suites (resp. de séries) de fonctions.
— Dérivations de suites (resp. de séries) de fonctions.
— Approximation par des fonctions en escalier.
— Théorème d'approximation de Weierstraß.

À venir

Chapitre 10 « Convexité ».

Questions de cours

Q1. — Si, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n\, x^n}{n} \end{array} \right.$$

alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement (resp. uniformément, non normalement) sur $[0,1]$ (C9.29, démonstration).

Q2. — Primitivation d'une limite de suite de fonctions (C9.51, énoncé et démonstration).

Q3. — Théorème de la double limite en un point du bord de l'intervalle (C9.44, énoncé). La fonction

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

est continue sur $]1,+\infty[$ et $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ (C9.47).

Q4. — Primitivation terme-à-terme d'une somme de série de fonctions (C9.52, énoncé). Si $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbf{R}$, existence et valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\, n\, \cos(nt)$ (C9.53).

Q5. — Critère $\mathcal{C}^1$ pour une limite de suite de fonctions (C9.54, énoncé intégral et démonstration de C1, C2).

Q6. — Critère $\mathcal{C}^k$ pour une somme de série de fonctions (C9.57, énoncé). La fonction

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et expression de ses dérivées itérées sous forme de sommes de séries (C9.99).

Q7. — Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier (C9.60, énoncé et démonstration.)

Q8. — Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par une fonction polynomiale (C9.63,énoncé). Théorème des moments (C9.65, énoncé et démonstration).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°14. —

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice CCINP n°16. — On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice CCINP n°53. — On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

   $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*