M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 14

13 – 17 décembre

Suites et séries de fonctions I

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Chapitre 9 « Suites et séries de fonctions »[PDF]

— Convergence simple d'une suite de fonctions.
— Convergence uniforme d'une suite de fonctions.
— Convergence simple (resp. uniforme, normale) d'une série de fonctions.
— Des limites d'une limite uniforme d'une suite de fonctions.
— Intégration de suites (resp. de séries) de fonctions.

À venir

Fin du chapitre 9 « Suites et séries de fonctions » : Dérivations de suites (resp. de séries) de fonctions ; Approximation par des fonctions en escalier ; Théorème d'approximation de Weierstraß.

Questions de cours

Q1. — Définition de la convergence simple d'une suite de fonctions (C9.1). définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions (C9.6). expression de la convergence uniforme d'une suite de fonctions via la norme infinie (énoncé et démonstration) (C9.10). La suite de fonctions

$$\left(f_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge simplement, mais pas uniformément sur $[0,1[$ (exercice résolu en classe).

Q2. — Définition de la convergence normale d'une série de fonctions (C9.22). La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence simple, puis sa convergence uniforme (C9.24, C9.26, énoncés et démonstrations).

Q3. — Théorème de la double limite en un point de l'intervalle (C9.40, énoncé et démonstration). Application à la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (C9.41, énoncé).

Q4. — Intégration d'une limite de suite de fonctions continues sur un segment (C9.48, énoncé et démonstration).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°8. —

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice CCINP n°9 (privé de sa question de cours). — On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}\,x\right)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice CCINP n°11. —

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.