M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 13

6 – 10 décembre

Réduction II

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Chapitre 8 « Réduction des endomorphismes et des matrices » [PDF]
— Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice.
— Sous-espaces stables.
— Polynôme caractéristique.
— Diagonalisabilité.
— Trigonalisabilité.
— Polynômes d'endomorphismes.

À venir

Fin du Chapitre 9 « Suites et séries de fonctions ».

Questions de cours

Q1. — Définition de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre (C8.47). Multiplicité d'une valeur propre versus dimension du sous-espace propre correspondant (C8.48, énoncé et démonstration).

Q2. — Définition d'une matrice diagonalisable (C8.54). Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(a) il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres pour u ;
(b) il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale ;
(c) pour toute base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est diagonalisable sur $\mathbf{K}$.
(C8.59, démonstration).

Q3. — Caractérisation de la diagonalisabilité via la décomposition de l'espace en somme directe de sous-espaces propres (C8.62, énoncé et démonstration).

Q4. — Caractérisation de la diagonalisabilité via la somme des dimensions des sous-espaces propres (C8.64, énoncé et démonstration). Condition suffisante de diagonalisabilité via le nombre de valeurs propres (C8.65, énoncé et démonstration). Caractérisation de la diagonalisabilité via le polynôme caractéristique et les multiplicités de ses valeurs propres (C8.68, énoncé).

Q5. — Définition d'une matrice trigonalisable (C8.76). Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(e_k) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$;

(b) il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure ;

(c) pour toute base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est trigonalisable sur $\mathbf{K}$.

(C8.59, démonstration à adapter).

Q6. — Degré et coefficients remarquables du polynôme caractéristique (C8.35, énoncé) . Trigonalisabilité et trigonalisation de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{R}$ (C8.87).

Q7. — Caractérisation de la trigonalisabilité via le polynôme caractéristique (C8.83, énoncé et démonstration).

Q8. — Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}[X], +, \,.\,, \times) & \longrightarrow & (\mathcal{L}(E), +, \,.\,, \circ) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$$

est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres (C8.90, démonstration) et pour tout $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent (C8.91, démonstration).

Q9. — Valeurs propres et polynômes d'endomorphismes (C8.94, énoncé et démonstration).

Q10. — Théorème de Cayley-Hamilton (C8.96, énoncé général et démonstration dans le cas où la matrice est diagonale, puis dans le cas où la matrice est diagonalisable).

Q11. — Lemme des noyaux (C8.103, énoncé et démonstration). Lemme des noyaux généralisés (C8.104, énoncé).

Q12. — Synthèse personnelle des résultats du chapitre 8 portant sur la diagonalisabilité, incluant le critère polynomial C8.106 discuté lundi 6 décembre (énoncés).

Q13. — Synthèse personnelle des résultats du chapitre 8 portant sur la trigonalisabilité, incluant le critère polynomial C8.107 discuté lundi 6 décembre (énoncés).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°67. — Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice CCINP n°69. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice CCINP n°72. — Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*